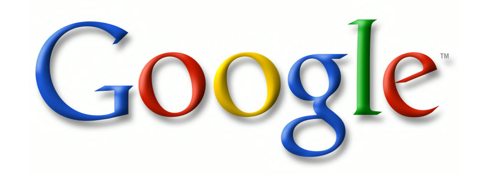
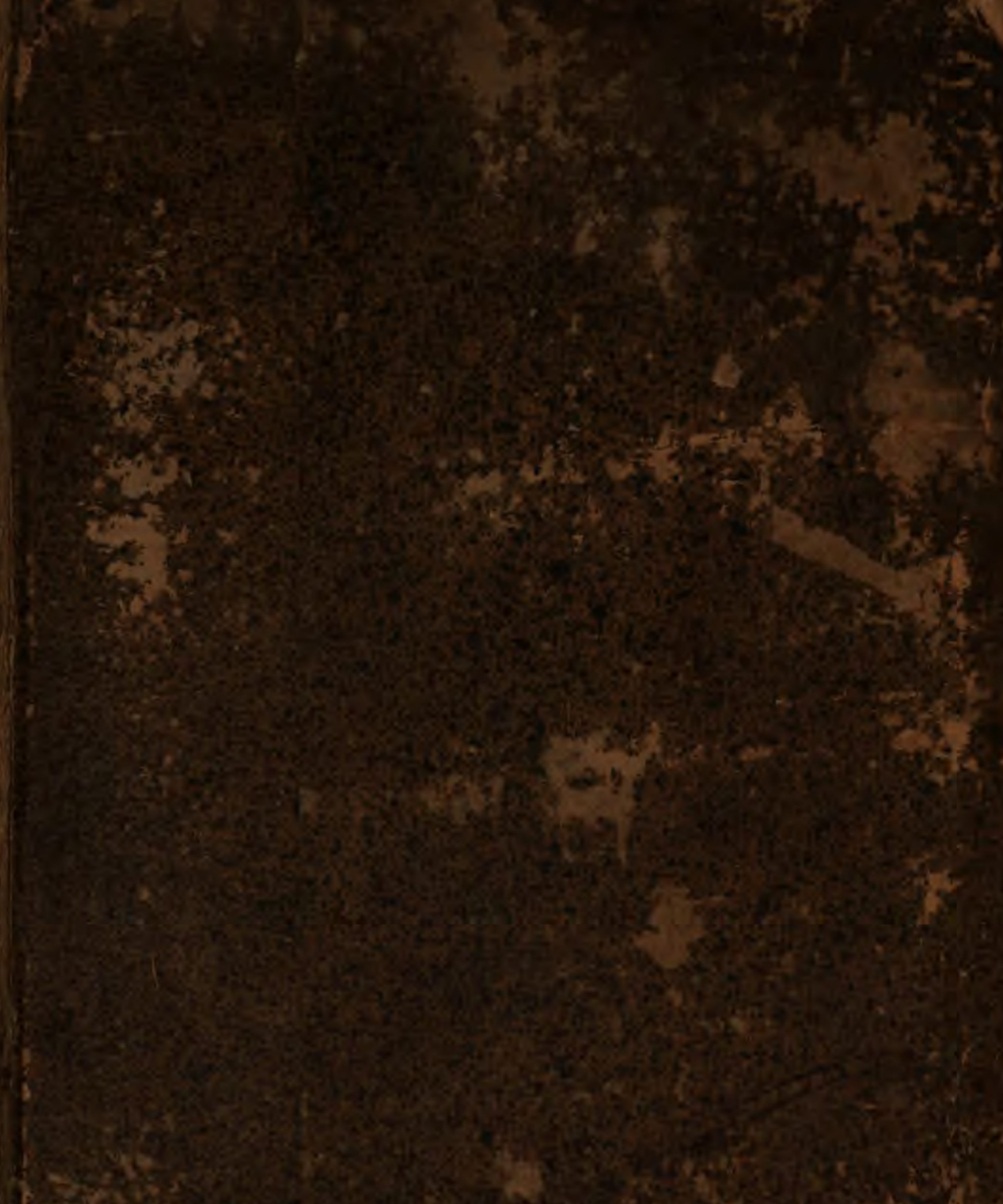
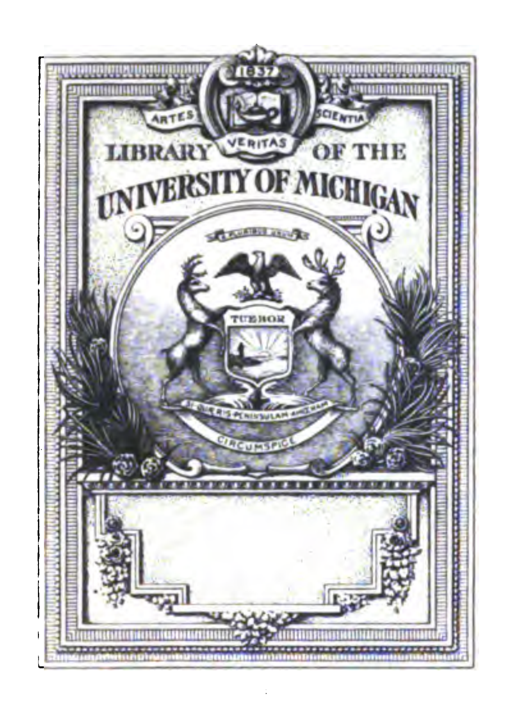
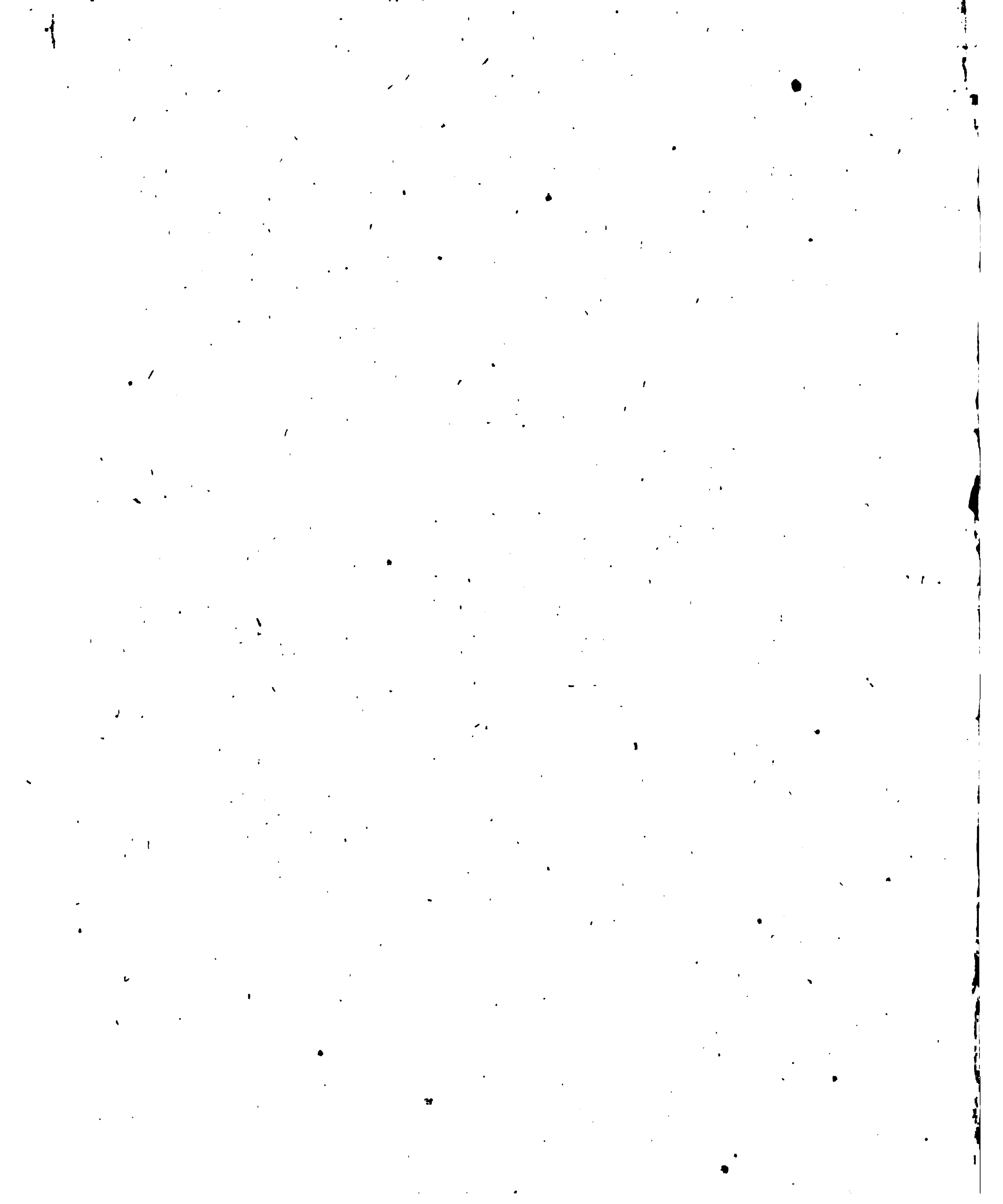





1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



Deutliche und vollständige
Vorlesungen
über die



und

Geometrie

Zum Gebrauche derjenigen, welche sich in diesen Wissenschaften durch eigenen Fleiß üben wollen, ausgefertiget

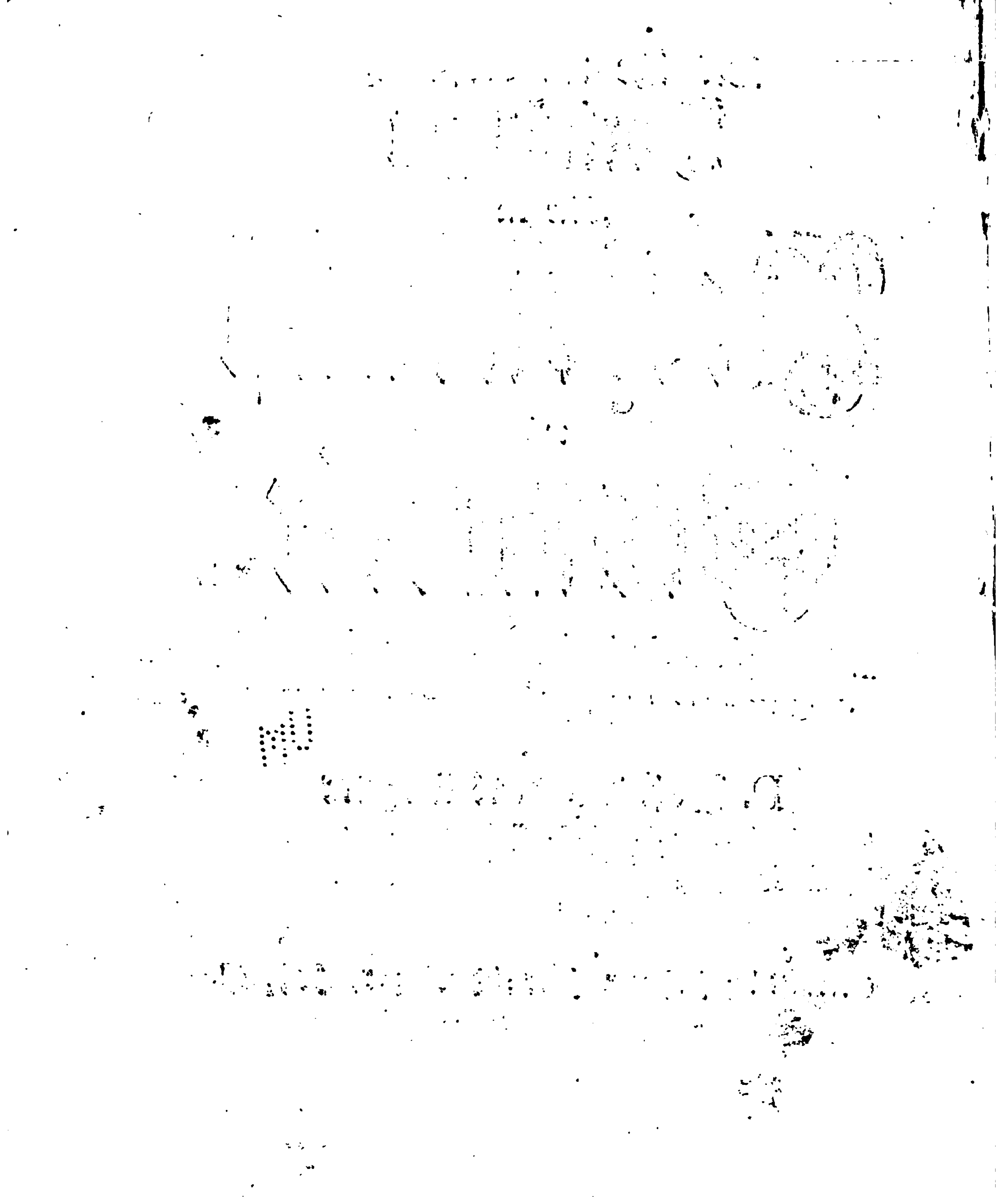
Von

D. Joh. Andreas Segner

Oeffentlichem Lehrer der Arzeneykunst, Mathematic und Naturlehre bey der Königl. und Churfürstl. Georg-Augustus Universität zu Göttingen, und Mitgliede der Königlichen Grosbritannischen, wie auch der Königl. Preussischen Societät der Wissenschaften.

LEMGO

Gedruckt bey Johann Heinrich Meyer, Hochgräfl. Lippil. Hof-Buchdrucker. 1747.



Dem

Durchlauchtigsten Fürsten und Herrn

HERRN

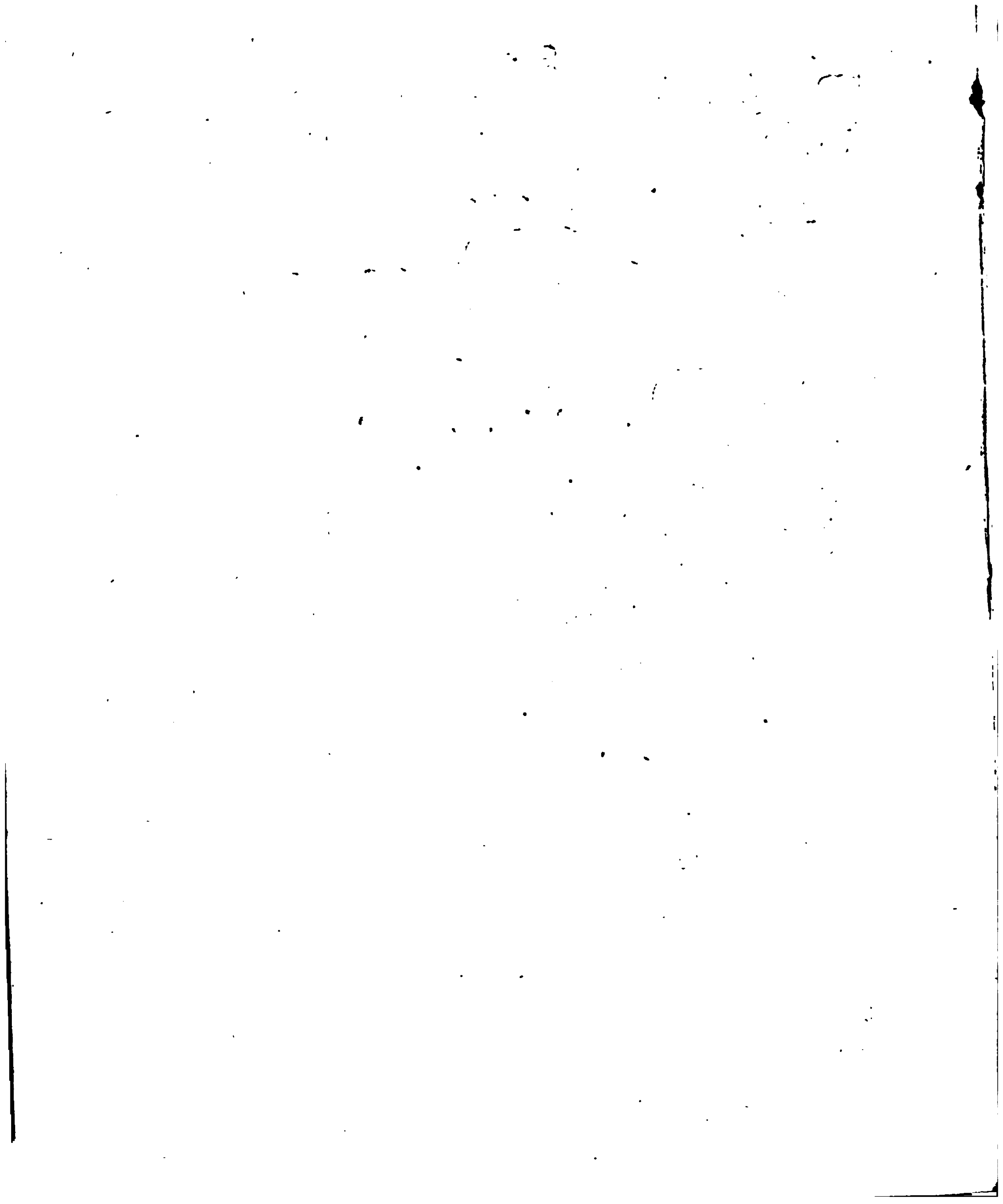
Carl Wilhelm Ferdinand

Erb Printzen und Herzogen

zu

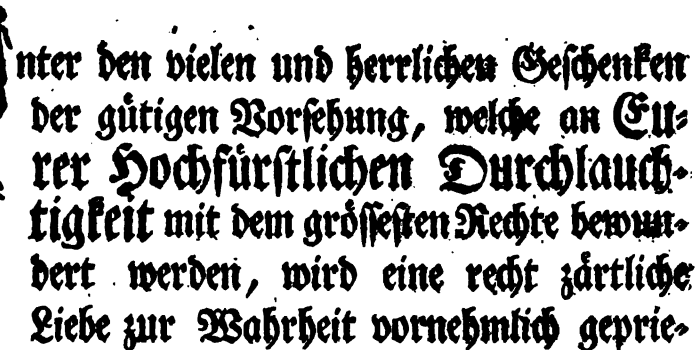
Braunschweig Lüneburg

Meinem gnädigsten Fürsten und Herrn.



Durchlauchtigster Erb Printz

Gnädigster Fürst und Herr,



Unter den vielen und herrlichen Geschenken der gütigen Vorsehung, welche an Eurer **Hochfürstlichen Durchlauchtigkeit** mit dem grössesten Rechte bewundert werden, wird eine recht zärtliche Liebe zur Wahrheit vornehmlich geprie-sen, so **Dieselben** am deutlichsten erblicken lassen, wenn diese ohne allem Putz, in welchem sie gemeiniglich vor erhabenen Personen zu erscheinen pfleget, sich bloß in ihrer natürlichen Schönheit darstellet. Und diese seltene Vollkommenheit ist dasjenige, so mich in der

Hoffnung erhält, es werden Eure Hochfürstliche Durchlauchtigkeit gegenwärtiges Buch einiger Dero erleuchteten Blicke würdigen, und gnädigst vermerken, daß Denenselben es in der tiefsten Unterthänigkeit zu zueignen, mich unterfangen habe. Es wird in demselben eine Wissenschaft vorgetragen, in welcher die Eurer Hochfürstlichen Durchlauchtigkeit so werthe und schätzbare Wahrheit in ihrem vollen Glanze pranget. Eben diese Wissenschaft ist der Leitfaden bey den meisten Entdeckungen, welche der menschliche Verstand machen kan. Sie öfnet uns insonderheit die Geheimnisse der Natur, in so weit es dem Schöpfer gefallen hat, uns die Einsicht in deren inneres zu verstatten; und zeiget die Spuren einer unendlichen Weisheit an dessen Werken auf das deutlichste. Sie schärfet den Verstand; nicht nur, indem sie ihm eine Menge der nützlichsten Begriffe beibringet: sondern auch, indem sie demselben die verschiedenen Wege zur Wahrheit zu gelangen, und sich derselben mit einer vollkommenen Gewißheit zu versichern, durch die wiederhohlte Uebung, recht bekannt machet. Die Begierde, allen diesen Nutzen mehr gemein zu machen, ist der Zweck meines Buches. Eure Hochfürstliche Durchlauchtigkeit sind überzeuget, daß es ein vor-

zūg-

[illegible] Amt der Fürsten sey, vor die allgemeine Wohlfarth zu sorgen; und Sie suchen Dero Hoheit hauptsächlich darinnen, daß Sie gebohren sind einen grossen Theil des menschlichen Geschlechts glücklich zu machen. Auch kan, bey den vielen, und zum Theil ganz neuen, Beyspielen Dero Durchlauchtigsten Stammhauses **Eurer Hochfürstlichen Durchlauchtigkeit** nicht verborgen seyn, daß dieses kaum auf eine edlere und erhabenere Art geschehen könne, als wenn vielen Gelegenheit gegeben wird, ihren Verstand zu bessern, und wenn sie dazu kräftig ermuntert werden. Dieses aber wird, in so weit die Geometrie etwas dazu beytragen kan, ganz gewiß erfolgen, wenn **Eure Hochfürstliche Durchlauchtigkeit** sie **Dero** Achtung zu würdigen geruhen wollen. Es wird **Dero** durchdringender Verstand andern zu einer Richtschnur dienen: und sie werden anfangen eine Wissenschaft hoch zu schätzen, von deren Werthe **Eure Hochfürstliche Durchlauchtigkeit** ein günstiges Urtheil fällen, ob sie zwar, denselben vor sich selbst zu ermessen, nicht fähig gewesen wären. Doch wird bey dem allen **Eurer Hochfürstlichen Durchlauchtigkeit** hoher Beyfall die allerschätzbarste Frucht meiner Arbeit seyn, wenn sie würdig ist

den-

denselben zu erhalten: und ich werde es vor meine grö-
ste Glückseligkeit achten, wann künftig, bey den eifrig-
sten Wünschen vor Dero unaufhörliche Zufriedenheit,
welche so vielen Tausend andern beifüge, mich zugleich
Eurer Hochfürstlichen Durchlauchtigkeit ho-
her und unschätzbarer Gnade in der tiefsten Ehrfurcht
werde erinnern können, mit welcher ich bin

Durchlauchtigster Erb Printz
Gnädigster Fürst und Herr

Eurer Hochfürstlichen Durch-
lauchtigkeit

unterthänigster und gehorsamster
Diener
J. A. Segner.

Vorrede.

Der Zweck bey der Ausfertigung des gegenwärtigen Buches war, denenjenigen, welche sich die Anfangsgründe der Mathematic durch eigenen Fleiß, oder unter der Anführung eines Lehrmeisters, der selbst nicht allzuweit in denselben gekommen ist, bekant machen wollen, dazu beförderlich zu seyn: andern aber die Wiederhohlung des mündlichen Vortrages zu erleichtern, und denselben, wo es nöthig ist, zu ergänzen. Man hat sich zu dem Ende einer an einander hangenden, deutlichen, weitläuftigen und ungezwungenen Schreibart bedienet: und, da man sich den Leser als neu in dieser Wissenschaft, und der geometrischen Schlüsse ungewohnet, vorstellen müssen; so ist man, sonderlich im Anfange, beflissen gewesen, die meisten Dinge von mehr als einer Seite vorzustellen, und durch verschiedene, aus verschiedenen Quellen hergehohlete Beweise, recht verständlich zu machen. Doch hat man sich dabey gehütet, den Zusammenhang der Sätze zu unterbrechen, und die Kette der Schlüsse, welche vom Anfange an durch das ganze Buch reichet, zu zerreissen. Selbst die Erklärungen der Wörter sind hievon nicht ausgenommen; welche nicht ehe angebracht worden sind, als, nachdem man, als bereits bekant, voraus setzen konte, daß dasjenige, so das Wort bedeuten soll, möglich sey, und nichts wiedersprechendes enthalte.

So angenehm diese Art des Vortrages einem Anfänger hoffentlich seyn wird; so würde sie doch endlich eckelhaft geworden seyn, wenn man sie durch das ganze

)( )(Buch

Buch in eben der Weitläuftigkeit hätte fortführen wollen. Man ist also auch darinnen der Lehrart gefolget, der man sich bey dem gewöhnlichen mündlichen Vortrage zu bedienen pfleget, daß man sich desto mehr zur Kürze gelenket, je weiter man in der Abhandlung gekommen; und man hat der Einsicht des Lesers desto mehr zu getrauet, je geübter man sich denselben vorstellen müssen. Es ist würklich ein grosser Theil dieses Buches zu Papier gebracht worden, nach dem man einem jungen von Adel den Inhalt desselben nach und nach erkläret hatte: und man hat dessen Einsicht zum Maas der Deutlichkeit und der Weitläuftigkeit oder Kürze angenommen, der man sich zu befleissigen hatte. Dieses ist die Ursache, warum es den Namen der **Vorlesungen** bekommen hat.

Ueberhaupt sind alle Beweise zu der grössesten Kürze und Einfalt gebracht worden, die man erreichen konte; und man hat sich dabey keine Mühe verdriessen lassen. Es ist aber diese Kürze aus der Menge der Begriffe und Schlüsse, welche in einem Beweise vorkommen, und keinesweges aus der Menge der Zeilen zu ermessen, in welchen er vorgetragen wird. Diese Kürze zu erhalten hat man hier und da von den gebahnten Strassen abweichen, und solche Wege gehen müssen, welche selten, und zum theil vielleicht niemals, betreten worden sind. Auch hat man sich kein Bedenken gemacht, Grundsätze anzunehmen, welche eben vor den Büchern des Euklides nicht stehen. Doch sind es wahre Grundsätze, und werden zum theile selbst von dem Euklides gebraucht, ob sie zwar den übrigen Grundsätzen desselben nicht ausdrücklich beygefüget sind:

zum

zum theile aber werden sie von verschiedenen neuern Geometren angenommen, oder verdienen wenigstens, daß sie angenommen werden. Man rechnet hierunter keines weges den Leibnitzischen Satz des zureichenden Grundes, und einige andere dieser Art. Denn ob sie wol in den Nebenbeweisen und zur Erläuterung gebrauchet werden: so kommen sie doch keines weges mit in die Hauptkette der Schlüsse; und es wäre in meinen Augen ein Fehler, wenn man sie würklich unter die Grundsätze der Geometrie rechnen wolte; als wozu es ihnen an der nöthigen Deutlichkeit mangelt. Man hat aber die Grundsätze selten von den übrigen abgesondert, sondern sie grösten Theils erst alsdann angebracht, wenn sie anzuwenden waren: weil man bemerket, daß die Anfänger sich öfters, ich weiß nicht was, vor Schwürigkeiten, bey denselben vorstellen, wenn sie von ihnen, ausser dem Zusammenhange mit dem übrigen, erblicket werden.

Sonst hat man die nöthige Strenge bey den Beweisen überall beyzubehalten getrachtet, und ist bemühet gewesen, sich in der Art zu schliessen den griechischen Urbildern eben so sehr zu nähern, als weit man in der Schreibart sich von denselben entfernete: ob zwar die Absicht war, diese Vorlesungen also einzurichten, daß sie auch Kindern vorgeleget werden könten. Denn es ist niemand deswegen mit Wind zu speisen, weil er einen schwachen Magen hat: Und man muß sich überdieses hüten von der Fähigkeit der Kinder aus der Fähigkeit derjenigen zu urtheilen, welche durch die gemeine grammaticalische Uebungen angewöhnet worden

 sind,

sind, den grösten Theil ihrer Zeit, an blosse Töne zu gedenken; welche in der Oratorie der Schulen nichts anders gelernet, als eine Menge klingender Wörter ohne Verstand zusammen zu fügen; bey welchen die natürliche Kraft zu schliessen durch eine übel ausgesonnene Logic, in Unordnung gebracht ist; und die durch eine lächerliche Metaphysic ausser den Stand gesetzet sind, die Schaalen von dem Kerne zu unterscheiden. Man führe ein Kind von acht bis zwölf Jahren ordentlich und bedächtlich in die Geometrie, so wird man Ursache genug finden, sich über dessen Einsicht zu verwundern. Es kan aber diese so unumgänglich nothwendige Ordnung bey unvollkommenen Beweisen nicht bestehen.

Es wäre zu weitläuftig, wenn man durch die Anführung besonderer Stellen eine Probe davon geben wolte, wie man alles dieses zu erreichen getrachtet hat. Ein Leser, so die Geometrie verstehet, wird, vermittelst des dem Werke beygefügten Inhaltes, die Materien leicht finden können, von welcher er insonderheit begierig ist zu wissen, auf was Art sie vorgetragen worden sind. Eben dieser Inhalt kan den ganzen Zusammenhang der Theile, und die Ordnung, welcher man gefolget, gleichsam in einem Blicke, vorstellen; insonderheit wenn auch die Zeichnungen zu Hülfe genommen werden, bey welchen man sich der Ordnung nicht weniger, als bey dem Texte, beflissen hat.

Man schmeichelt sich mit der Hoffnung, es werde bey diesem Durchblättern das Urtheil dahin ausfallen, daß wir alles so von der Rechenkunst und derjenigen

Geo-

Geometrie, welche ausser dem Cirkelkreise sich auf keine andere krumme Linie gründet, hauptsächlich zu wissen nöthig ist, in diese Vorlesungen zu bringen bemühet gewesen sind, und daß also dieselben in so ferne vollständig genennet werden können. Indessen ist man gar nicht gemeinet, junge Gemüther durch dieselbe, von Lesung der Bücher des Euklides und anderer scharfsinniger Männer, abzubringen. Man will sie vielmehr in den Stand setzen, diese Schriften mit Nutzen durchzugehen, und dadurch die Einsicht, welche sie vermittelst unserer Beihülfe erhalten haben, zu erweitern, und je mehr und mehr in Ordnung zu bringen. Aufgeweckte Gemüther werden dieses auch ohne unserem Rathe thun, und die gegenwärtigen Vorlesungen eben so wol bey Seite legen, nachdem sie dieselben ein oder zweymal durchgegangen sind, als man aufhöret sich der mündlichen Anweisung zu bedienen, nachdem man durch dieselbe in den Stand gesetzet worden ist, sich selbst weiter fort zu helfen. Zumalen da, bey dem weitläuftigen und zusammenhängenden Vortrage, dessen man sich bedienet hat, die Sätze selbst zum öfteren unter dem übrigen gar sehr verstecket sind: welches dem Gedächtnisse eine schlechte Beihülfe giebet, und selbst das Nachschlagen etwas schwer machet. Denn man muß meistentheils mehr als einen Absatz lesen, ehe man einen Satz und dessen Beweiß recht deutlich einsiehet. Es ist aber selten möglich ein Ding zu unterschiedenem Gebrauche gleich bequem zu machen; und man muß von einem Buche keinen andern Nutzen verlangen, als denjenigen, zu welchem es eigentlich bestimmet ist.

Es ist kaum möglich bey einem so langweiligen Vortrage alle Fehler in den Schlüssen und in dem Gebrauche der Wörter gänzlich zu vermeiden, und gar nichts zu verschreiben. Man hat zwar auch in diesem Stücke allen Fleiß angewendet, welchen zu gebrauchen die Zeit erlauben wolte. Doch ist fast nicht zu hoffen, daß sich gar nichts einer Aufmerksamkeit entzogen haben solte, welche zum öftern und unter andern selbst durch die Gedanken unterbrochen worden ist, zu welchen das wiederhohlete Durchsehen natürlicher Weise Anlaß geben muste. Vielleicht sind auch bey dem fremden und etwas eilfertigen Drucke einige Fehler der Setzer stehen geblieben. Doch hoffe ich nicht, daß alle diese Versehen von der Art seyn, daß sie einen bedachtsamen Leser aufhalten könten. Hingegen können auch ein paar Fehler der kleinen lateinischen Elemente, insonderheit in der Abhandlung von den dreyseitigen Ecken, aus den gegenwärtigen Vorlesungen gebessert werden.

Uebrigens ist es hauptsächlich die Begierde, sich nach Vermögen nützlich zu machen, so die Gedult unterhalten können, welche bey der Ausarbeitung dieser Vorlesungen aus vielen Ursachen nöthig war. Dieses ist der einzige Ruhm, welchen man dabey suchet: und man wird es als eine Glückseligkeit ansehen, wenn dieser Zweck bey einem oder dem andern Leser erhalten wird. Geschrieben auf der Georg-Augustus Universität zu Göttingen, den 18 Merz, 1747.

Inhalt.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Einfache Rechnungsarten mit ganzen Zahlen und zehentheilichten Brüchen.

Zwey-

Zweyter Abschnitt.

Von der Berechnung der Brüche.

Dritter Abschnitt.

Von den Quadrat- und Cubiczahlen.

Vier-

Vierter Abschnitt.

Von geraden Linien und Winkeln.

Fünfter Abschnitt.

Von geraden Linien und Winkeln bey den Cirkelkreisen.

Sechster Abschnitt.

Von den Verhältnissen, und deren Gleichheit.

Siebender Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

Achter Abschnitt.

Von der Zusammensetzung der Verhältnisse.

Neunter Abschnitt.

Von der Gleichheit und Verhältniß der Figuren.

Zehender Abschnitt.

Von der Lage gerader Linien und Flächen, in Ansehung anderer Flächen.

Eilf-

Eilfter Abschnitt.
Von den Cörpern und deren Oberflächen.

Zwölfter Abschnitt.
Von den Kugelschnitten.

Dreyzehender Abschnitt.
Gründe der Berechnung ausgedehnter Grössen.

Aus-

Vierzehender Abschnitt.

Berechnung der Cirkel und Winkel.

):o:(



Erster Abschnitt.

Einfache Rechnungsarten mit ganzen Zahlen und zehentheilichten Brüchen.

Allgemeine Begriffe von den Zahlen.

§. 1.

Wenn etwas gezehlet, oder durch eine Zahl ausgedrückt werden sol, so muß dasselbe entweder schon in Theile getheilet seyn, oder in dergleichen Theile getheilet werden: und diese Theile müssen entweder gleich seyn, oder man muß sie doch als gleich ansehen: in allen andern Fällen ist das Zehlen ohnmöglich. Es liegen etliche Münzen vor mir, die ich zehlen sol; ich werde dieses leicht verrichten, wenn sie alle von einer Grösse, und zum Exempel Gulden sind. Sind sie aber von verschiedenem Werthe, so können sie nicht anders gezehlet werden, als wenn man auf ihren Werth gar nicht Acht hat, sondern sich dieselbe bloß unter dem allgemeinen Begrif der Münzen vorstellet; so bald man dieses annimt kan man zehlen, eine, zwo, drey Münzen, von was vor einem Werth sie auch seyn mögen, weil sie nehmlich darinne alle überein kommen, daß sie Münzen sind.

 §. 2. Diese

I. Abschnitt.

§. 2. Diese Theile mögen im übrigen so groß oder klein seyn als sie wollen. Es sind zuweilen die Dinge, welche gezehlet werden sollen, in solche Theile getheilet, welche ihrer Beschaffenheit nach nicht wohl kleiner können genommen werden, als wenn man eine Heerde Schaafe zehlet, welche man nicht wohl in kleinere Theile als in einzelne Schaafe abgetheilet, sich vorstellen kan: doch verhindert in diesem Fall nichts, daß man die Heerde nicht auch durch Paare oder Dutzende, durch Schocke oder etwas dergleichen, zehle. In den meisten Fällen aber können die Theile auch so klein genommen werden als man wil, und man kan zum Exempel eine jede Länge, durch die Zahl der Meilen, der Ruthen, der Schritte, der Ellen, der Schuhe, der Zolle, und so ferner, welche in derselben enthalten sind, ausdrücken.

§. 3. Ein dergleichen Theil, aus welchem dasjenige, so gezehlet werden sol, zusammen gesetzet wird, oder verschiedene solche Theile zusammen genommen und als ein Ganzes betrachtet, heisset eine **Einheit**, und es besteht also bloß in unserer Willkühr, wie groß wir die Einheiten annehmen wollen, welche zu zehlen wir uns vorgenommen haben.

§. 4. Wenn man sich aber ein Ding, es mag so groß oder so klein seyn als es wil, aus Einheiten zusammen gesetzt, vorstellet, so wird es zwar oft eben deswegen, weil man es sich so vorstellet, und so lange man es sich so vorstellet, eine Zahl genennet, es mag nun dasjenige Ding, welches man sich dergestalt vorstellet, würklich aus verschiedenen einzeln Dingen bestehen, wie eine Armee zum Exempel aus vielen Soldaten; oder es mögen die Einheiten, aus welchen man es zusammen gesetzet hat, in einem und dergestalt fortgehen, daß die zweite anfängt, wo die erste aufhöret, wie auf die Art ein Stück Weges aus den Schritten bestehet, welche es ausmachen, oder eine gewisse Zeit aus den Stunden oder Minuten, welche in derselben enthalten sind. Doch muß man gestehen, daß dieses die eigentliche Bedeutung nicht sey, welche wir mit dem Wort, **Zahl**, verknüpfen.

§. 5. Wenn wir genau reden, so verstehen wir unter diesem Worte **Zahl**, nicht so wohl die Dinge selbst, welche wir zehlen, als vielmehr einen Begrif von der Art und Weise, wie dieselbe aus ihrer Einheit entstehen. Ich zehle eins, zwey, drey Thaler. Nicht diese drey Thaler sind eigentlich die Zahl, sondern sie sind dasjenige, so gezehlet worden ist. Indem ich aber diese drey Thaler zehle, so stelle ich mir

mir vor, daß, um dieselbe aus einem einzeln Thaler zu machen, ich einen Thaler nehmen, zu demselben den zweyten, und denn noch einen hinzusetzen müsse, und eben dieser Begrif ist es, welchen ich mit dem Worte Drey verknüpfe, womit ich die gegenwärtige Zahl der Thaler ausdrücke. Aus der Ursache drücken wir drey Ducaten, drey Menschen, drey Schritte, durch eben das Zahl-Wort aus, weil nehmlich drey Ducaten aus einem Ducaten, drey Menschen aus einem Menschen, drey Schritte aus einem Schritt, eben so werden, wie drey Thaler aus einem Thaler entstehen.

§. 6. Da die Einheiten willkührlich sind, I, 3. fügt es sich zuweilen, daß dieselbe, wenn sie wiederhohlet werden, eben dasjenige Ding heraus bringen, so gezehlet werden sol, oder ein anderes so ihm gleich ist, wie dieses geschiehet, wenn man eine Heerde Schaafe nach einzeln Schaafen zehlet. In diesem Fall wird die Zahl, womit man dieses Ding ausdrücket, eine ganze Zahl, oder auch schlechthin eine Zahl genennet.

§. 7. Zuweilen aber bringet die wiederhohlte Einheit das Ding so gezehlet werden sol nicht heraus. Nicht eine jede Heerde Schaafe läst sich durch Dutzende zehlen; es kan eine Heerde aus sieben Dutzenden, und einigen einzeln Schaafen drüber, bestehen, oder eine kleine Heerde kan nicht einmal ein eintziges Dutzend ausmachen. Die Zahlen, welche mir einen Begrif von der Art und Weise machen, wie dergleichen Dinge aus ihrer Einheit entstehen, heissen gebrochene Zahlen oder Brüche. Es wird aber das Ding, welches durch eine gebrochene Zahl bedeutet wird, aus der Einheit, indem man die Einheit in verschiedene gleiche Theile theilet, und deren etliche annimt.

§. 8. Eine gebrochene Zahl ist entweder grösser oder kleiner als die Einheit. Ist die Einheit ein Dutzend, so ist eine Heerde, welche nicht aus lauter vollen Dutzenden besteht, entweder weniger als ein Dutzend, oder mehr. Ein Bruch von der ersten Art, welcher nehmlich kleiner ist als die Einheit, heisset ein ächter Bruch, der andere aber ein unächter, und kan allzeit in eine ganze Zahl und einen ächten Bruch verwandelt werden. Zuweilen stellet man sich auch eine ganze Zahl als einen Bruch vor, indem man nehmlich die ganze Einheit in etliche gleiche Theile theilet, und alle diese Theile zusammen zwey, drey, vier oder mehr mal nimmet. Indem dieses geschiehet, wird die ganze Einheit eben so oft genommen, und man bekomt also würklich eine ganze Zahl.

I. Abschnitt.

§. 9. Alles dieses noch deutlicher einzusehen, stelle man sich die gerade Linie AB vor, welche durch eine Zahl ausgedruckt werden sol.
F. 1. Man muß zu dem Ende eine andere gerade Linie nach Belieben als eine Einheit annehmen, wenn man sich nicht einer solchen bedienen wil, welche bereits im gemeinen Leben dazu angenommen worden ist, dergleichen die Schuhe, Zolle, oder etwas dergleichen sind. Gesetzt CD sey diese Einheit, und AB lasse sich in Theile theilen, welche der CD gleich sind, als AE, EF, FB, welche zusammen genommen die gerade Linie AB ausmachen: so kan AB durch eine Zahl ausgedruckt werden. Ich sehe daß man die Einheit AE, welche so groß ist als CD, setzen, und noch eine dergleichen Einheit EF hinzu thun, und so dann FB anfügen müsse, damit die AB aus der CD werde, das ist, daß man die Einheit CD dreymal nehmen müsse, um die AB zu erhalten. Die Zahl drey ist demnach diejenige, welche nunmehro die Grösse der Linie AB ausdrücket, und diese ist eine **ganze Zahl** I, 6.

F. 2. §. 10. Wenn aber die gerade Linie GH durch eine Zahl ausgedrücket werden solte, welche sich auf die Einheit IK beziehet, so kan dieses nicht anders geschehen, als wenn man die IK in verschiedene gleiche Theile theilet, und so dann aus solchen Theilen die GH zusammen setzet. Es kan dieses in der vorliegenden Figur geschehen, wenn man der IK drey Theile giebt, denn zwey solche Theile machen die Linie GH aus. So bald man dieses eingesehen, kan man GH durch eine Zahl ausdrücken, aber diese wird keine ganze, sondern eine **gebrochene Zahl** seyn I, 7. Man stellet sich diese Zahl eben damit vor, wenn man begreifet, daß man die Einheit IK in drey gleiche Theile theilen, und zwey dergleichen Theile nehmen müsse, die Linie GH zu erhalten; oder indem man saget, GH sey zwey Drittel der Einheit. Dieses ist ein **ächter Bruch** I, 8.

F. 3. §. 11. Ein Exempel eines **unächten Bruchs** aber hat man bey der Linie MN, welche durch eine Zahl ausgedrücket werden sol, deren Einheit OP ist. Diese OP ist in drey gleiche Theile getheilet worden, und fünf solcher Theile machen die MN aus. Es ist also diese MN grösser als die Einheit OP, entstehet aber doch, indem man einen gewissen Theil dieser Einheit, nehmlich ein Drittel derselben, wiederholet, und kan nicht durch die Wiederholung der OP selbst entstehen.

§. 12. Eine Zahl wird grösser, wenn die Einheiten vermehret werden, welche sie ausmachen, und kleiner, wenn ihrer weniger werden.

den. Und ausser dieser Vermehrung und Verminderung kan man mit den Zahlen keine andere Veränderung vornehmen. Eine Zahl bleibt unverändert, ob man zwar die Einheiten, aus welchen sie bestehet, in eine andere Ordnung setzet, oder an statt einiger Theile, welche man wegnimt, andere hinzusetzet, welche jenen gleich sind, oder doch als gleich angesehen werden. Denn man siehet bey dem Zehlen keineswegs auf die Ordnung der Einheiten, und wenn man die Einheiten selbst verändert, und an die Stelle eines jeden Groschen, welchen man vorhero gezehlet, einen Ducaten, oder an die Stelle eines jeden Punctes in der Zahl AB ein Sternchen, wie zwischen CD, setzet, so bleibt doch die Art und Weise, wie alle Sternchen zwischen CD aus einem Sternchen erwachsen, einerley mit der Art und Weise, wie alle Puncte zwischen AB aus einem solchen Puncte worden sind, und wird demnach I, 5. die Zahl durch eine dergleichen Verwechselung nicht geändert, sondern bloß die Einheiten.

I. Abschnitt.

F. 4.

§. 13. Einerley Ding kan bald durch eine grössere, bald durch eine kleinere Zahl ausgedrücket werden, nachdem man die Einheiten annimmet, aus welchen man es zusammen setzt. Und nahmentlich wird dasselbe Ding durch eine grosse Zahl ausgedrückt, wenn die Einheiten, aus welchen man es zusammen setzt, klein angenommen werden, und durch eine kleinere, wenn man die Einheiten grösser nimmet. Eine Armee kan aus sehr vielen einzeln Leuten bestehen; sie besteht aber nothwendig aus ungemein wenigern Regimentern.

§. 14. Und zwar wenn die Grösse eines Dings AB durch eine Zahl ausgedrücket worden, welche sich auf die Einheit CD beziehet, und man nimt an die Stelle dieser Einheit eine andere CE, welche nur halb so groß ist als die vorige CD, so wird die Zahl, welche AB ausdrücket, zweymal grösser als diejenige, welche sie vorher ausgedrücket. Dieses ist selbst aus der Figur sichtlich, und man begreiffet leicht, daß man weiter gehen, und sagen kan, daß wenn die Einheit, drey, vier, fünfmal kleiner gemacht wird, die Zahl, welche die Grösse der AB ausdrücket, drey, vier, fünfmal grösser werde, und so ferner. Wie auch, daß die Zahl, welche die Grösse eines Dinges ausdrücket, zwey, drey, viermal kleiner werden müsse, wenn die Einheit zwey, drey, viermal grösser genommen wird: und so in allen Fällen.

F. 5.

§. 15. Ist aber die Einheit bekant, nach welcher gezehlet worden, und die Zahl solcher Einheiten, welche die Grösse eines gewissen Dinges ausmachen; so ist uns die Grösse dieses Dinges selbst bekant.

 Und

Und darin besteht eben der Nutzen der Zahlen, daß man vermittelst derselben einem jeden so leicht einen Begrif von der Grösse dieses oder jenen Dings beybringen kan. Das Ding, welches durch eine Zahl ausgedrücket worden, ist desto grösser, je grösser die Einheit ist, nach welcher gezehlet worden, und je grösser die Zahl ist, welche das Ding ausdrücket, und desto kleiner, je kleiner die Einheiten sind, aus welchen es bestehet, und je geringer sich ihre Zahl befindet.

§. 16. Man muß sich demnach hüten, daß man nicht die Grösse der Dinge aus einem dieser Stücke, nehmlich der Grösse der Einheit und der Grösse der Zahl, welche es ausdrücket, allein ermesse, nachdem wir gesehen, daß einerley Grösse durch gar verschiedene Zahlen ausgedrückt werden könne, wenn man verschiedene Einheiten annimmet. Bey den Brüchen ist dieses insonderheit in Acht zu nehmen. **F. 6.** Die Theile aus welchen AB zusammen gesetzet wird, sind die Theile der Einheit CD, und diese Theile sind als die Einheiten anzusehen, nach welchen man die AB zehlet. Theilet man nun CD in vier gleiche Theile, so kommen drey solcher Theile auf AB, und AB besteht demnach aus drey Vierteln der Einheit CD. Theilet man aber CD in acht gleiche Theile, so kommen sechs solcher Theile auf AB, und AB wird nunmehro durch die Zahl sechs Achtel ausgedrücket: doch ist die Grösse dieser AB nicht verändert worden. Man kan CD noch auf tausend andere Arten theilen, und aus dergleichen Theilen die AB zusammen setzen, welche dadurch immer durch andere und andere Zahlen ausgedrücket wird, ob sie zwar beständig eben die AB bleibet.

Wie die Zahlen durch Worte ausgedrücket werden.

§. 17. Die Zahlen auszudrücken und andern anzuzeigen, werden gewisse Zeichen und Wörter erfordert. Bey beyden sind gewisse Gesetze zu bestimmen, damit man mit wenigen Wörtern und Zeichen auch grosse Zahlen ausdrücken könne, wenn man nicht aus der Menge derselben, die äusserste Verwirrung erwarten wil.

§. 18. Das geschickteste, ja das einzige so uns hier zu statten kommen kan, ist, daß man verschiedene Einheiten annimmet, deren einige grösser sind als die andern, doch so, daß allzeit die grössere eine gewisse Zahl der kleinern enthalten. Auf die Art werden die Zahlen allezeit klein, und man braucht wenige Wörter und Zeichen dieselben auszudrücken. So zehlen wir die Länge von Lissabon bis Petersburg durch

durch nicht eben sonderlich viele Meilen; welche durch eine gar grosse Zahl würde ausgedrückt werden, wenn man an statt der Meilen, Ruthen vor die Einheiten nehmen wolte, und durch eine noch viel grössere, wenn man sich des Zolles als einer Einheit bedienen wolte. Dasjenige aber so seiner Bequemlichkeit wegen heut zu Tage fast überall eingeführet ist, ist nachfolgendes.

§. 19. Nachdem man eine beliebige **Einheit** angenommen hat, setzet man eine andere aus zehen dergleichen Einheiten zusammen, welche man einen **Zehner** nennet, eben so wie die Landmesser ihre Ruthe aus zehen Schuhen machen. Andere Einheiten machet man aus zehen Zehnern, welche **Hunderte** heissen. Wieder andere aus zehen hunderten, die heissen **Tausende**; und so fort nach eben diesen Gesetzen, wie bald umständlicher sol erkläret werden.

§. 20. Um nun eine jede Zahl mit Worten auszudrücken, ist nichts nöthig als daß man anzeige, wie viel Tausende, wie viel Hunderte, wie viele Zehner und wie viele einzelne Einheiten in derselben enthalten sind, und weil jede Zehen einzelne Einheiten, eine Einheit der ersten **höhern Ordnung**, nehmlich einen Zehner, ausmachen, und jede zehen Zehner eine Einheit der **zweyten höhern Ordnung**, nehmlich hundert, und jede zehen Hunderte, eine Einheit der **dritten höhern Ordnung**, oder Tausende; so ist klar, daß zu gedachter Ausdrückung einer jeden Zahl, ausser den Erklärten, nicht mehr als neun Wörter erfordert werden, welche eine jede Zahl von eins bis auf zehne ausdrücken, die bekannt genug sind. Diesemnach drücken die wenigen Worte, fünf tausend, sieben hundert, dreyssig und viere, eine gar grosse Zahl aus, deren Verstand ist, daß die Zahl aus vier einzeln Einheiten, aus drey Zehnern oder Einheiten von der ersten höhern Ordnung, aus sieben Hunderten, oder sieben Einheiten von der zweyten höhern Ordnung, und endlich aus fünf Tausenden, oder Einheiten von der dritten höhern Ordnung, bestehe.

§. 21. Besteht die Zahl aus mehr als neun Tausenden, so werden die Tausende ferner eben so gezehlet, wie die einfache Einheiten gezehlet werden. Man spricht nehmlich, ein, zwey, drey tausend - - - zwanzig tausend, - - dreyssig und sieben tausend, hundert tausend - - zwey hundert siebenzig und drey tausend - - zwey hundert tausend - - - neun hundert und neunzig tausend, und so ferner, bis der Tausende wieder tausend werden, welche eine Einheit von der

I. Abschnitt.

sechsten höhern Ordnung geben, die eine Million genennet wird. Nehmlich ein Zehner der Tausende, oder einmal zehen tausend ist eine Einheit der vierten höhern Ordnung, ein hundert tausend eine Einheit der fünften, und also eine Million eine Einheit der sechsten höhern Ordnung.

§. 22. Zahlen, welche über Millionen gehen, werden ausgedrückt, wenn man die Millionen anzeiget, so in derselben enthalten sind, und so dann die Tausende, Hunderte, Zehner, und die einfache Einheiten, wie gelehret worden. Es werden aber die Millionen vollkommen so gezehlet, wie die einfache Einheiten, man rechnet nehmlich derselben eine, zwo, drey, zehne, zwanzig - - - vier und zwanzig - - - hunderte - - - vier hundert dreyssig und fünfe - - tausend - - hundert tausend - - - neun hundert neunzig und neun tausend, neun hundert neunzig und neune, bis endlich eine Million von Millionen erwachse, welche eine Billion heisset, und welche wieder als eine besondere Einheit von einer hohen Ordnung angesehen wird, welche die zwölfte ist.

§. 23. Nun ist hoffentlich nichts mehr zu sagen nöthig, wenn man ohne Ende weiter gehen sol, als bloß das einzige, daß eine Million von Billionen eine Trillion heisse, eine Million von Trillionen eine Quadrillion, und so ferner beständig fort. Und dieses setzt uns in den Stand, eine jede Zahl, sie mag so groß seyn als sie will, mit Worten geschickt auszudrücken, und wenn sie von andern ausgedrückt worden, deutlich zu übersehen.

Die Zahlen geschickt zu schreiben.

§. 24. Im schreiben der Zahlen kan man ausser der gezeigten noch eine andere Leichtigkeit haben, welche bloß deswegen nicht von allen nach Würden geschätzet zu werden scheinet, weil sie so sehr bekant ist. Jede Zahl wird durch Einheiten von verschiedenen Ordnungen ausgedrückt I, 20. Die Zahl keiner dieser Einheiten steiget über neune. Was ist weiter nöthig, als daß man sich neun Zeichen erwehle, mit welchen man die Zahlen der Einheiten bis auf neune bemerke, es mögen nun diese Einheiten einfach, oder von einer höhern Ordnung seyn; dabey aber auch etwas anders ausmache, wodurch man unterscheiden könne, ob die also angenommenen Zeichen einfache Einheiten bedeuten, oder ob sie Einheiten von der ersten, andern oder

dritten

dritten höhern Ordnung, und so ferner, ausdrücken. Die Zeichen der Zahl der Einheiten bis auf neune, sind bey uns diese bekannte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Die Ordnung aber der Einheiten, welche sie bedeuten, wird aus dem Ort ermessen, welchen jedes dieser Zeichen einnimt. Und dazu hat man nachfolgendes festgesetzt.

I. Abschnitt.

§. 25. Wenn eine Zahl bloß vor sich da stehet, so bedeutet sie allezeit einfache Einheiten; als 5, 7, 3. Stehen aber zwo Zahlen neben einander als 45, so bedeutet die, so gegen der rechten Hand stehet, wieder einfache Einheiten, die nächste zur linken aber Einheiten von der erstern höhern Ordnung, oder Zehner, und demnach 45, vier Zehner oder vierzig, und fünfe.

§. 26. Solten nun blosse vier Einheiten der ersten höhern Ordnung oder vierzig ausgedrücket werden, so muste zwar die 5 fehlen, aber damit so dann 4 noch vier Zehner bedeuten könte, derselben ein Zeichen beygefüget werden, so an sich nichts bedeutete, aber doch dienen konte, das Zeichen 4 am nächsten Ort von demjenigen in welchem die 5 stund, nach der linken zurück zu setzen, welches Zeichen 0 ist, so in allen ähnlichen Fällen auf die Art gebrauchet wird.

§. 27. Und auf eben die Art verfähret man auch bey den Einheiten von noch höhern Ordnungen. Gleichwie eine Zifer die zu nächst an der letzten stehet, Einheiten von der ersten höhern Ordnung, oder Zehner bedeutet, also bedeutet eine Ziffer, so zunächst auf diese folget, und folgends die dritte Stelle einnimt, Einheiten von der andern höhern Ordnung, oder Hunderte, die in der vierten Stelle, Tausende und so ferner, und überall werden die Stellen, in welchen keine Ziffer stehen, weil nemlich dergleichen Einheiten fehlen, als die Ziffer in derselben Stellen bedeuten würden, mit 00 vollgefüllet, weil man ohne denselben nicht wissen könte, den wie vielsten Ort die würklich vorhandene Ziffer einnehme. Wenn also dreytausende und vierzig und siebene bezeichnet werden sollen, da keine Einheiten von der andern höhern Ordnung, oder keine Hunderte vorkommen, werden die Ziffer also 3047 stehen müssen, 3007 aber wird dreytausend und sieben bedeuten, und so in allen übrigen Fällen.

§. 28. Wenn demnach Einheiten von der ersten höhern Ordnung alleine vorkommen, bekommen die Ziffern welche sie ausdrücken eine 0, also 30: Einheiten von der andern höhern Ordnung alleine bekommen zwo 00, also 700, die von der dritten Ordnung drey 000,

I. Abschnitt.

als 4000, und überall ist die Zahl der 0000, die zur Rechten angehänget werden, einerley mit der Zahl, welche die Ordnung der Einheiten angiebet, die durch die vorstehende Ziffer ausgedrücket werden. Wenn der Nullen zu viele wären, pflegt man die Zahl derselben zuweilen nur zu bemerken, und über die Ziffer eine andere zu setzen, welche diese Zahl anzeiget, also $5\overset{7}{3}$, welches so viel seyn soll 530000000, und in diesem Fall zeiget die übergeschriebene Ziffer, als hie 7, allezeit die Ordnung der Einheiten der darunterstehenden Ziffer 3 an, und folgends auch die Ordnung der Einheiten, welche die übrigen Ziffern, als hie 5, ausdrücken.

Die dergestalt geschriebene Zahlen zu lesen.

§. 29. Setzt man dieses alles mit dem, was von Aussprechung der Zahlen gesaget worden, zusammen, so wird es unschwer seyn, eine jede Zahl, welche mit nunmehro erklärten Ziffern geschrieben ist, auch mit Worten geschickt auszudrücken. Zur Erleichterung theile man die vorgegebene Zahl erstlich in Classen von sechs Ziffern, indem man von der ersten Ziffer zur Rechten anfängt, und nach der Linken zugehet, und schreibe über die erste Ziffer zur Rechten gar nichts oder 0, über die siebende oder die erste der folgenden Classe aber I, über die drey zehende, oder die erste der dritten Classe II, über die erste der vierten Classe III, und so fort.

§. 30. So dann theile man zweytens jede dieser Classen wieder in zwo von dreyen Ziffern, und bemerke die Abtheilung mit einem (·). Kan man nun drey Ziffern lesen, die so geschrieben stehen 472, oder 301, oder 035, oder 006, welches keine Schwierigkeit hat, da die erste zur Linken Hunderte, die zweyte Zehner und die dritte einfache Einheiten bedeutet, so kan man eine jede also getheilte Reihe ebenfals aussprechen. Man darf nur jede Classe von drey Ziffern eben so lesen wie die, deren wir eben erwehnet haben, so dann aber ein jedes (·) so die kleinen Classen unterscheidet, durch tausend, und die oben geschriebene Ziffern I, II, III &c. durch Million, Billion, Trillion &c. aussprechen, eben so als wenn an statt dieser Zeichen, die eben genannte Wörter geschrieben wären, vor (·) nemlich tausend, vor I, Million, vor II, Billion, vor III Trillion, und so fort. Und diesem zu folge wird nachstehende Zahl $73.52\overset{III}{4}\,287.50\overset{II}{3}\,724.31\overset{I}{5}\,030.51\overset{0}{5}$ ausgesprochen: 73 tausend und 524 Tril-

Trillionen, 287 Tausend und 503 Billionen, 724 Tausend und 315 Millionen, 30 Tausend und 515 Einheiten.

§. 31. Nemlich alle Ziffern die vor den bezeichneten 5, 5, 3, 4 stehen, bedeuten dergleichen Einheiten, als die über diesen stehende Zeichen o, I, II, III, andeuten, und demnach die in der ersten Classe zur Linken 73 tausend Trillionen, und noch über dieses 524 Trillionen, die in der nächsten 287 tausend Billionen, und noch über dieses 503 Billionen, und so fort.

Wie die Brüche überhaupt bezeichnet werden.

§. 32. Da eine gebrochene Zahl entstehet, indem man die Einheit in verschiedene gleiche Theile theilet, und einen oder etliche solche Theile annimt, welche den Bruch ausmachen I, 7, so sind einen Bruch zu bezeichnen zwo ganze Zahlen nöthig, deren erstere anzeiget, in wie viele gleiche Theile die Einheit getheilet werden müsse, die andern aber, wie viele dieser Theile zusammen genommen den Bruch ausmachen. Die erstere dieser Zahlen heisset der *Nenner*, weil sie die Grösse der Theile bestimmet, in welche man die Einheit getheilet hat, die andere aber der *Zehler*, weil sie die Zahl dieser Theile in dem Bruch angiebet. In dem Bruch, welcher das Stück GH aus der Einheit IK ausdrücket, ist der Nenner 3 und der Zehler 2, denn die Einheit IK ist in 3 Theile getheilet, deren zweye die GH ausmachen. Und dieses ist ein ächter Bruch. In dem Bruch aber welcher MN aus der Einheit OP auddrücket, und welcher unächt ist, ist der Nenner wieder 3, und der Zehler 5.

F. 2.

F. 3.

§. 33. Es ist durchgehends eingeführet, daß man den Zehler über eine Linie, und den Nenner darunter schreibt, folgender massen, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{11}$, und auf die Weise werden alle Brüche bezeichnet, sie mögen ächt oder unächt seyn.

§. 34. Man kan aber auch einen unächten Bruch anders schreiben, indem man nemlich die ganze Einheiten, welche in demselben enthalten sind, voraus setzet, und den Ueberschuß hinten anfüget, folgender gestalt: $1\frac{2}{3}$, $3\frac{7}{9}$, $153\frac{17}{32}$. Im Gegentheil kan man auch eine jede ganze Zahl in Form eines Bruchs schreiben, als $\frac{7}{1}$, bedeutet so viel als 7, und $\frac{18}{2}$ so viel als 9.

I. Abschnitt.

Zehentheilichte Brüche.

§. 35. Es giebt eine besondere Art von Brüchen, welche von sonderbarer Bequemlichkeit sind, nemlich die so genannten Zehentheilichte. Die Nenner derselben sind entweder 10, oder 100, oder 1000, und also allzeit eine Einheit von einer der höhern Ordnungen. Diese Brüche kan man ausser der eben gewiesenen noch auf eine andere Art bezeichnen, welche ganz und gar aus den Gesetzen fliesset, nach welchen die ganzen Zahlen bezeichnet werden, und sind dieselben nur zu dem Ende etwas weniges weiter auszudehnen.

§. 36. Ein Bruch dessen Nenner 10 ist, und der Zehler 1, oder $\frac{1}{10}$ ist der zehende Theil der Einheit. Ein Bruch dessen Nenner 100 ist, und der Zehler wieder 1, oder $\frac{1}{100}$ ist der zehende Theil des vorigen $\frac{1}{10}$, weil jedes Theil so in den vorigen gezehlet wird, oder jedes $\frac{1}{10}$ wieder in zehen Theile getheilet werden muß, damit ihrer 10 mal 10 oder hundert heraus kommen, und eben so ist $\frac{1}{1000}$ der zehende Theil von $\frac{1}{100}$, und so beständig fort. Schreibet man also $\frac{7}{10}$ und wiederum $\frac{1}{100}$, so sind die Einheiten, welche der Zehler des ersten Bruchs zehlet, zehen mal grösser, als die Einheiten, die der Zehler des andern Bruchs anzeiget, und wiederum sind die Einheiten des Zehlers in dem Bruch $\frac{1}{100}$ zehen mal grösser als die Einheiten des Zehlers in dem Bruch $\frac{9}{1000}$, und so fort. Denn es zehlet der Zehler eines jeden Bruchs nichts anders als die Theile, deren Grösse der Nenner dadurch ausdrücket, daß er anzeiget, wie viele derselben in der ganzen Einheit enthalten sind.

§. 37. Nach den Gesetzen von der Bezeichnung der Zahlen, welche I, 24. gelehret worden sind, enthält jede Einheit einer Ziffer die Einheiten derjenigen, welche nach der rechten Hand zu unmittelbar an derselben stehet, zehen mal, und die Einheiten welche in dieser gezehlet werden, sind zehen mal kleiner als die Einheiten, die jene zehlet. In der Reihe von Ziffern 5372 sind die Einheiten welche die Ziffer 5 bemerket, Tausende, und folgends zehen mal grösser als die Einheiten der Ziffer 3, welche Hunderte sind. Diese sind wieder zehen mal grösser als die Einheiten der Ziffer 7, da diese Zehner sind, und diese sind zehen mal grösser als die einfache Einheiten, welche von der nächst folgenden Ziffer 2 gezehlet werden. Und hieraus folget, daß wenn gesetzet wird, daß in eben der Reihe 5372 die letzte Ziffer 2, einfache Einheiten bedeute, und man setzet noch eine Ziffer zur Rechten darzu,

als,

als, 5372, 6; diese Ziffer 6 nichts anders als 6 Zehentheile der Einheit oder $\frac{6}{10}$ bedeuten könne, und wenn noch eine Ziffer daran gesetzt wird, als 5372, 64, diese $\frac{4}{100}$ bedeuten müsse, und so fort.

I. Abschnitt.

§. 38. Dieses sage ich, wird in unserm Exempel geschehen, wenn die Ziffer 2, beständig einzelne Einheiten bedeutet. Daß man aber dieser Ziffer 2, oder einer jeden andern diese Bedeutung gebe, könte nicht errathen werden, wenn man die Ziffer ohne Absatz in einer Reihe nach einander fort schreiben wolte, dergestalt 537264, da vielmehr jederman die letzte Ziffer 4, nach den gegebenen Gesetzen, vor die Zahl der einzelnen Einheiten halten würde. I, 25. Man hat ein Zeichen nöthig, wodurch die Ziffer bemerket wird, so die einzeln Einheiten zehlet, und dieses ist meistentheils, und bey uns allezeit, ein (,), so nach derselbigen Ziffer gesetzet wird, dergestalt 5372, 641. Andere haben andere Zeichen, welche, wenn sie vorkommen, leicht abzumerken sind.

§. 39. Es können nach dieser Anweisung auch diejenige zehentheilichte Brüche bezeichnet werden, bey welchen gar keine einzelne Eintheile anzutreffen sind, es muß aber auch hier der Ort dieser Einheiten bemerket werden, damit man wissen möge, welcherley Einheiten durch eine jede der in der Bezeichnung des Bruchs vorkommenden Ziffer bedeutet werden. Dieses geschiehet, indem man an die Stelle der einzeln Einheiten 0 setzet, mit darauf folgenden (,), wie dieses ordentlich gebraucht wird, diesen Ort zu bezeichnen. Demnach bedeutet 0, 6, sechs zehenthel, 0, 659, sechs zehenthel, 5 hunderthel und 9 tausendthel. Aber 0, 05 bloß fünf hunderthel, und 0, 009 neun tausendtheilchen.

§. 40. Nachdem der Ort der einfachen Einheiten auf die Art bezeichnet worden, kan man zu jeder Ziffer, oder zu jeder Reihe von Ziffern beederseits so viel Nullen hinzusetzen als man will, ohne die Zahl, welche durch dieselbe ausgedrückt wird, zu verändern. Es bedeutet 003, 7000 nichts anders als 3, 7 oder drey und 7 Zehentheilchen. Denn die Nullen können niemals etwas anders würken, als daß sie den Ort verändern, welchen eine jede Ziffer einnimmet: dieser aber ist unveränderlich, so bald durch die Bemerkung des Orts der einfachen Einheiten, oder durch das (,) der Ort einer jeden Ziffer fest gestellet wird, so daß man denselben zu erkennen auf die beygeschriebene Nullen ferner gar nicht zu sehen hat, welche demnach gänzlich unnütz sind, und keine Würkung haben können.

I. Abschnitt.

§. 41. Ob zwar im übrigen die zehentheilichte Brüche dem ersten Anblick nach ziemlich unnütze scheinen dürften, weil unter den unzehlichen Arten, nach welchen die Einheit kan getheilet werden, die zehenfältige Theilungen nur sehr selten vorkommen können: so wird man doch bey genauerer Betrachtung die Sache ganz anders finden. Es ist an dem, daß sich diese Theilung der Einheit nicht schicket, einen jeden Bruch genau auszudrücken. Als zum Exempel $\frac{2}{3}$ sind grösser als $\frac{6}{10}$ und kleiner als $\frac{7}{10}$ und können also durch zehenthel nicht ausgedruckt werden, es geht dieses auch nicht durch zehenthel, hunderthel und tausendthel an, ja man kan diesen Bruch $\frac{2}{3}$ gar nicht durch zehentheilche Brüche ausdrücken, wie aus dem folgenden erhellen wird. Aber es ist auch im Gegentheil richtig, daß je mehr der Theile sind, in welche die Einheit getheilet wird, je kleiner dieselben werden, und daß, so groß auch die Einheit seyn mag, man durch eine wiederholte Theilung der Theille endlich auf Kleinigkeiten hinaus komme, welche in Ansehung des Ganzen fast vor nichts zu achten sind, so daß wenig daran gelegen ist, ob man um ein oder anderes dergleichen Theilchen fehlet oder nicht. In Ansehung eines Thalers ist $\frac{1}{10}$ von einem Pfennig vor nichts zu halten, ja es ist diese Kleinigkeit auch vor sich allein so anzusehen, als ob sie von ganz und gar keinem Werthe wäre, weil in der That wenig nützliches damit kan geschaffet werden. Nun kommt man aber bey den zehentheilichten Brüchen, wenn man fortgehet, endlich allezeit auf dergleichen Kleinigkeiten, welche in der Anwendung vor nichts können gehalten werden, weil deren Abgang in keine Betrachtung kommet, und es kan demnach in einem solchen Fall der bequeme zehentheilchte Bruch mit eben solcher Richtigkeit gebraucht werden, als ob er alles genau ausdrückte. Zum Exempel, 0, 5732 wären Theilchen eines Thalers, so ist es mir in der Anwendung eines, ob ich 0, 5732 eines Thalers habe, oder ob mir die letzte 0, 0002 mangele, und in diesem Fall ist demnach 0, 5732, und 0, 573 vor einerley zu halten, weil 0, 0002 eines Thalers eine an sich ganz und gar unnütze Kleinigkeit sind, indem sie kaum den $\frac{1}{10}$ eines Pfennigs ausmachen. Demnach ist vielmehr der Bruch 0, 5732 genau genug, ob ich zwar versichert seyn kan, daß derselbe den Theil des Thalers, welchen er ausdrücken solte, nicht genau darstelle, sondern ihm eine oder andere Ziffer von hinten zu mangele. Und es folget demnach, daß wenn die zehentheilche Brüche nicht geschickt sind, einen jeden Theil der Einheit genau zu bezeichnen, sie doch dieses jederzeit mit so geringen Fehlern thun können, daß an diesen Fehlern gar nichts

nichts gelegen ist, und sie begehen und gar nicht fehlen, in der Anwendung auf eins hinaus kommt.

§. 42. Nimt man nun dasjenige, so von den zehentheilichten Brüchen gesagt worden, mit dem zusammen, so wir oben I, 20. von der Bezeichnung der ganzen Zahlen beygebracht, so siehet man, daß eine jede Zahl so groß oder so klein sie auch seyn mag, bequem auszudrücken, man sich ausser den angegebenen Einheiten der höhern Ordnung, andere Einheiten von niedrigern Ordnungen, als die einfachen Einheiten sind, vorstellen könne, von welchen die unmittelbar grössern allezeit die nächstfolgende kleinere zehenmal in sich fasset, und deren allergröste der zehente Theil der einfachen Einheiten ist. Diesem zu folge wird die Einheit der erstern niedrigern Ordnung ein Zehentheil des Ganzen, die Einheit der zweyten niedrigern Ordnung ein Zehentheil der Einheit der ersten niedrigern Ordnung, und ein Hundertheil des Ganzen, und so ferner.

Die Addition.

§. 43. Der Nutzen dieser Bezeichnung der Zahlen besteht nicht bloß darinne, daß wir dieselben bequem ausdrücken. Sie giebt uns auch die bequemsten und leichtesten Arten an, eine Zahl in eine andere zu verwandeln, und aus einigen Zahlen andere von verlangter Grösse, und welche sich auf jene auf eine vorgegebene Art beziehen, zu finden, welches eben der Hauptzweck der Rechenkunst ist.

§. 44. Es können diese Veränderungen der Zahlen, wie wir oben I, 12. gewiesen, nicht anders als durch die Vermehrung und Verminderung derselben, vorgenommen werden. Man vermehret eine Zahl, indem man andere beliebige Zahlen zu selbigen hinzusetzet: man vermindert sie, indem man eine oder andere Zahl von derselbigen hinweg nimt: Dieses sind die Grundveränderungen alle, aber man kan so wohl das eine als das andere auf verschiedene Art, und nach verschiedenen Gesetzen verrichten: wenn man nemlich die Zahlen so oder so annimt, welche zu einer vorgegebenen Zahl nach und nach hinzu gesetzt, oder von derselben hinweg genommen werden sollen.

§. 45. Dasjenige, so bey allen diesen Veränderungen der Zahlen, oder bey allen Rechnungsarten bey demjenigen zum Grund gesetzet werden muß, der sie ausüben soll, ist daß er ohne Anstoß bis zehne zehlen, und von einer jeden Zahl wieder um 9 Einheiten zurück

gehen

I. Abschnitt.

gehen könne. Weiß man diese Kleinigkeit, so ist es leicht zu sagen, wie viel heraus komme, wenn man jede Zahl, die nicht grösser ist als neune, um eine andere dergleichen Zahl vermehret oder vermindert. Und diese Wissenschaft ist demjenigen, welcher alles andere ausüben will, so von der Veränderung der Zahlen und deren Verwandelung in andere gesagt werden soll, zum ersten Anfang hinlänglich.

§. 46. Indem man eine Zahl vermehret durch Zusetzung anderer Zahlen, wird eine neue Zahl gefunden, welche alle Zahlen, die zusammen gesetzet worden sind, in sich begreift, und denselben zusammen gleich ist. Diese heisset die **Summe** aller der Zahlen, welche man zusammen gesetzet hat. Die Rechnung aber, durch welche die Summe verschiedener gegebenen Zahlen gefunden wird, heisset die **Addition**. Zum Exempel, die Zahlen 3 und 5 und 9 zusammen, bringen die Zahl 17, und 17 begreift alle die vorigen Zahlen in sich. Diese Zahl 17 ist also die Summe der Zahlen 3 und 5 und 9, und indem ich die erstern Zahlen nach und nach zusammen setze, und dadurch finde, daß sie die Zahl 17 bringen, und zusammen dieser gleich sind, so addire ich gedachte Zahlen.

§. 47. Wenn wir auch hier die Zahlen aus den Theilen zusammen gesetzt uns vorstellen, aus welchen wir sie bis anhero mit so vieler Bequemlichkeit zusammen gesetzet haben, nemlich aus ihren einfachen Einheiten, und den verschiedenen Einheiten der höhern und niedrigern Ordnungen, so ist jede Addition leicht zu verrichten. Gesetzt, es wären die nachstehenden Zahlen zusammen zu addiren:

5327	957, 32	58, 3279
235	50, 2	0, 0701
18	0, 7318	0, 008
7954	57,	132, 7

so setze man sie unter einander wie geschehen, so nemlich, daß jede Ziffer, welche Einheiten von einerley Ordnungen zehlen, gerade unter einander zu stehen kommen, und folgends die einfachen Einheiten unter einander, und die Zehner, die Hunderte, und so ferner, und wieder die Zehenthel, die Hunderthel, und was sonst vor zehentheilchte Brüche vorkommen, wieder unter einander. Dieses alles giebt sich von selbst, wenn man nur zuforderst die Ziffern, welche die einfache Einheiten bedeuten, gerade unter einander gesetzet hat, denn nach diesen richten sich so dann alle übrige.

§. 48.

§. 48. Nun fängt man am bequemsten von der rechten Hand an, oder von den Ziffern, welche die niedrigsten Einheiten zehlen, und rechnet dieselbe nach und nach zusammen: so doch, daß, so oft man auf zehen kommt, man diese zehen als eine Einheit der nächst folgenden Ordnung bey derselben bemerket. Die übrige Einheiten schreibet man unter die Säule von Ziffern, welche man dergestalt zusammen gerechnet, und gehet so dann zur nächsten nach der linken fort, da man aber die von der vorhergehenden übergetragene Einheiten zugleich mitnehmen muß. Ist man mit dieser Säule fertig, so verfähret man eben so mit der dritten und auf eben die Art mit den übrigen, bis an die äuserste zur linken.

§. 49. In dem ersten der gegebenen Exempel

$$\begin{array}{r} 5327 \\ 235 \\ 18 \\ 7954 \\ \hline 13534 \end{array}$$

ist 7 und 5 so viel als 12, ich bemerke die 10 als eine Einheit der nächsten Säule, und sage die übrigen 2 (denn 12 ist 10 und 2) und die nächste 8 machen wieder 10, welche eine neue Einheit in der nächsten Säule sind, und also stehet unter der letzten nur 4, als der Ueberschuß aller Einheiten dieser Säule über die darin enthaltene Zehner. Nun machen die zwey Zehner so herüber gegangen und die oberste Ziffer der zweyten Säule 2, so viel als 4, die nächste 3 darzu giebt 7, und die nächste 1 noch darzu 8, endlich die letzte 5 hinzugesetzt, 13, oder 10 und 3. Die 10 dieser Säule sind wieder Einheiten der folgenden, und müssen zu derselbigen gerechnet, und nur die übrigen 3 als Einheiten von der ersten höhern Ordnung, unter diese Säule gesetzet werden. Ferner giebt die Einheit, so von der zweyten Säule herüber gegangen mit 3, der obersten Ziffer der dritten, 4; die nächste 2 dazu macht 6, und diese mit der nächsten, 15, oder 10 und 5. Man bemerket demnach unter dieser Säule wieder die 5, und rechnet vor die 10 eine Einheit zur nächst folgenden Säule, deren Ziffer demnach mit dieser Einheit zusammen 13 ausmachen, welche neben der vorigen geschrieben werden.

§. 50. Es ist leicht einzusehen, daß man auch in Zusammenrechnung

I. Abschnitt.

nung der Ziffer in den Säulen beständig fortzehlen, und am Ende auf einmal die ganze Zahl der gefundenen Zehner zur nächsten Classe bringen könne. Als in unserm Exempel giebt die ganze erste Säule 24, da denn die 4 Einheiten geschrieben, die zwey Zehner aber zu den übrigen der nächsten Säule, in welcher eben dergleichen Zehner enthalten sind, gerechnet werden müssen, und dieses ist zum fertigen Rechnen bequemer. Die übrigen Exempel machen nicht die geringste Schwierigkeit, wenn man das erste eingesehen hat. Es wird alles eben so gemacht als in dem bereits erklärten, und in der Summe wird das (,) so den Ort der einfachen Einheiten bezeichnet, gerade unter die (,) in denen gegebenen Zahlen gesetzt. Denn es ist an sich deutlich, daß durch Zusammenrechnung einer jeden Säule keine andere Einheiten heraus kommen können, als solche, die in den Ziffern der Säule, welche zusammen gerechnet worden, selbst vorkommen, weil, wenn ja durch die Zusammensetzung derselben endlich zehne kommen, dieselbe allezeit zu den Einheiten der nächsten Säule, wohin sie gehören, gebracht werden.

§. 51. Weil bey den zehentheilchen Brüchen die Einheiten auf eben die Art wachsen als bey den ganzen Zahlen, und auch hier die Einheit so von einer jeden Ziffer gezehlet wird, zehenmal so groß ist, als die Einheit der Ziffer welche auf dieselbe zunächst nach der Rechten zu folget; so muß überhaupt alles was hier mit den ganzen Zahlen vorzunehmen gewiesen worden ist, sich auf diese Brüche ebenfals ziehen lassen. Demnach wird die Summa in den vorgesetzten Exempeln also stehen:

```
 957, 32          58, 3279
  50, 2            0, 0701
   0, 7318         0, 008
  57,            132, 7
----------       ---------
1065, 2518       191, 1060
```

§. 52. Daß auf diese Art die richtige Summe, oder eine Zahl welche allen vorgegebenen zusammen genommen gleich ist, gefunden werde, ist selbst aus dem gesagten deutlich. Man hat in die gefundene unter dem Querstrich stehende Zahl alle Theile aller vorgegebenen Zahlen gebracht. Alle Theile sind beständig das Ganze, und von diesem gar nicht unterschieden. Also hat man die ganze obern Zahlen alle in die Zahl unter den Strich gebracht. Diese enthält also jene

alle

alle zusammen, jene können als Theile dieser Zahl betrachtet werden; also muß diese unter den Strich geschriebene Zahl denen obern zusammen genommen gleich, und demnach die richtige Summe derselben seyn I, 46. Und dieses ist alles, so von der Addition zu sagen war.

I. Abschnitt.

Die Subtraction.

§. 53. Indem man eine Zahl um eine andere vermindert, 9 zum Exempel um 4, oder indem man die Zahl 9 um vier Einheiten kleiner machet als sie vorher war, bringet man eine neue Zahl 5 heraus, welche der Ueberschuß der grössern der gegebenen Zahlen, 9, über die kleinern 4 ist, und anzeiget was zu der kleinern hinzu gesetzet werden müsse, damit die grössere Zahl heraus komme. Dieser Ueberschuß, oder dieser erforderliche Zusatz zu der kleinern Zahl, heisset auch der Unterscheid der gegebenen zwo Zahlen. Denn bloß derselbe, indem er der kleinern mangelt, machet, daß sie von der grössern Zahl verschieden ist, I, 12. und die kleinere Zahl wird der grössern gleich, so bald als dieser Unterschied zu ihr hinzu gethan wird.

§. 54. Die Rechnungsart, durch welche man den Unterschied zweyer bekannten Zahlen findet, heisset die Subtraction, und wird demnach dieselbe verrichtet, indem man eine kleinere Zahl von einer grössern wegnimt, oder deutlicher, indem man von einer bekannten Zahl einen Theil wegnimt, welcher eine ebenfals bekannte Zahl gleich ist.

§. 55. Dasjenige was hier voraus gesetzet wird, ist bloß dasjenige dessen oben I, 45. erwehnet worden, daß man nehmlich von einer jeden Zahl bis neun Einheiten zurück zu zehlen wisse. Kan man dieses, so ist es leicht den Unterscheid einer Zahl, die nicht grösser ist als 9, von einer jeden andern Zahl zu finden. Wil ich wissen wie viel 5 läst wenn ich es von 12 abziehe, so zehle ich von 12 fünf Einheiten zurück. Es bleiben siebene, und dieses ist der gesuchte Unterschied.

§. 56. Bey Zahlen welche aus Einheiten von verschiedener Ordnung zusammen gesetzet sind, verfähret man nach folgender Anweisung. Nachdem man die zwo bekannte Zahlen, wie bey der Addition, unter einander geschrieben, so ziehet man nach und nach die Ziffer der kleinsten Zahl von den Ziffern der grössern, welche mit jenen einerley Einheiten bedeuten, ab, und bemerket den Ueberschuß der letztern

I. Abschnitt.

tern über die erstern, gerade unter denselben, wobey man einen Strich, wie bey der Addition, zur bequemen Absonderung der bekannten Zahlen von der gesuchten machet.

§. 57. Es ist oft nicht viel daran gelegen, wo man anfange, wenn nemlich die kleinere der bekannten Zahlen aus lauter solchen Ziffern bestehet, welche weniger oder doch nicht mehr bedeuten, als die Ziffer der grössern Zahl, deren Einheiten mit den Einheiten der erstern von einerley Ordnung sind, als in nachfolgenden Exempeln:

87325	742,18
13023	31,04
74302	711,14

da man leicht einsiehet, daß einerley heraus kommen müsse, man mag forne oder hinten, oder irgendswo in der mitte anfangen.

§. 58. Wenn es sich aber füget, daß ein oder andere Ziffer der kleinern Zahl mehr Einheiten in sich hält als diejenige Ziffer der grössern Zahl, welche Einheiten von eben der Ordnung bedeutet, und also gerade über oder unter derselben stehet, so könnte aus dieser Art abzuziehen Verwirrung entstehen, und man thut also am besten, man fängt die Subtraction allzeit von den Ziffern zur rechten Hand an, deren Einheiten die allerkleinsten sind.

§. 59. Denn in diesem Fall, da nemlich eine Ziffer der kleinern Zahl mehr Einheiten enthält, als die Ziffer der grössern, welche jener dergestalt zusaget, muß man erstlich von der nächsten Ziffer zur linken Hand in der grössern Zahl eine Einheit wegnehmen, oder, wie man es gemeiniglich nennet, borgen, welche zu der besagten Ziffer, welche zu klein war, hinzu gesetzet, dieselbe um 10 vermehren wird, und so dann die Subtraction verrichten, wie in den beygesetzten Exempeln,

95326	573,48
17408	94,25
77918	479,23

da die untern Zahlen die kleinern sind.

§. 60. In dem ersten dieser Exempel läst sich 8 von 6 nicht abziehen. Ich nehme derowegen von der, der 6 zunächst stehenden Ziffer, eines, und bringe diese 1 in den Ort der 6, welche daselbst 10 ist, und mit der 6 die Zahl 16 ausmachet. Nun nehme ich 8 von 16 hinweg,

so

so bleiben 8, welche ich unter dem Strich, und unter der Ziffer 8 bemerke. Allein die nächst an der 6 stehende Ziffer 2, von welcher eins bereits abgezogen oder geborget worden, gilt nunmehro eins weniger als vorher, und demnach nur eins, welches, damit man es nicht vergesse, ihr ein (·) beygesetzet worden ist, dessen man sich in allen dergleichen Fällen zu bedienen pfleget. Wenn man demnach in der Subtraction fortfahren wil, so hat man nunmehro zu sagen, 0 von 1 läst 1, und diese 1 an gehörigen Ort, unter die 0 oder 1 zu setzen. Die nächste 4 kan man von der 3, welche über ihr stehet, und eben die Einheiten enthält, nicht abziehen, und muß demnach von der 5 eine Einheit hierüber bringen, welche mit der 3 zusammen 13 Einheiten von der Ordnung, als in der 3, oder ihr zusagenden 4, gezehlet werden, geben. Nun läst 4 von 13 abgezogen 9 übrig, welche an gehörigen Ort bemerket wird. Die in der untern Zahl nächst folgende 7 kan von der obersten 4 wieder nicht abgezogen werden, und man muß wieder von der in der obern Zahl folgenden 9 eine Einheit zu diesen herüber bringen, mit welcher diese 4 die Zahl 14 ausmacht. Nun läst 7 von 14 abgezogen, andere 7 übrig, und die folgende 1 von 8 genommen läst auch 7.

§. 61. Es ist bey der Rechnung des zweyten Exempels nichts weiter zu beobachten, ob zwar in demselben zehentheilche Brüche enthalten sind. Eine Ueberrechnung desselben wird alles klar machen. Die Einheiten der Ziffer, welche übrig bleiben, sind allzeit einerley mit den Einheiten derjenigen Ziffer, deren Unterschied man gesucht. Die letzte 5 der untern Zahl läst von der letzten 8, der obern abgezogen 3. Diese 3 bedeutet 3 Einheiten der zweyten niedrigern Ordnung, weil 5 und 8 dergleichen Einheiten bedeuten, und so ist es mit den übrigen allen. Demnach kommt die Ziffer in dem gefundenen Unterschied, welche die Zahl der einfachen Einheiten anzeiget, gerade unter der Ziffer, welche in den vorgegebenen Zahlen einzelne Einheiten bedeuten, zu stehen, und demnach muß das Zeichen dieser Einheiten (,) auch gerade unter das Zeichen der einfachen Einheiten in den gegebenen Zahlen, gesetzet werden.

§. 62. Und nach eben den Regeln werden auch nachstehende Exempel gerechnet:

I. Abschnitt.

53,072	9,003	0,5734
8,32	5,8	0,25748
44,752	3,203	0,31592
3000	8,03	7,...
573	2,574	0,354
2427	5,456	6,646

Bey welchen keine Schwierigkeit seyn kan, wenn man nur nicht vergessen, was oben I, 40 gesagt worden ist, daß nemlich denen zehentheilchen Brüchen von hinten zu zur rechten so viele 000 beygesetzt werden können, als man ihnen zusetzen wil, ohne ihre Bedeutung im geringsten zu verändern, und daß demnach wo eine Reihe Ziffer, von den zweyen, welche gegeben sind, keine Einheiten von dieser oder jener Ordnung hat, man an den Ort derselben Einheiten allzeit eine 0 setzen, oder doch sich vorstellen könne.

§. 63. Ferner aber ist zu beobachten, daß von der 0 man zwar eigentlich nichts borgen, und an den nächsten Ort zur rechten überbringen könne, weil nichts an derselben Stelle befindlich ist: daß aber von der vor der 0 oder den 000 zur rechten stehenden Ziffern in der grössern Zahl, (es muß aber allzeit wenigstens 1 da stehen) erstlich eine Einheit in die Stelle der nächsten 0 könne übergebracht werden, welche daselbst 10 gilt, von welchen 10 wieder 1 in den nächsten Ort übergetragen, hier 9 läst, und in dem Ort, in welchen es übergetragen worden, wieder 10 bedeutet, und so fort. Diesem zufolge kan man zum Exempel die Zahl 3000 durch das Uebertragen der Einheiten so zergliedern 2000 und 900 und 90 und 10, und 3000 kan nichts anders bedeuten, als die eben angezeigte Zergliederung.

§. 64. Wenn demnach von der Zahl 3000 eine andere 573 sol abgezogen werden, so wird man, nachdem dieselbe wie zusehen ist, mit Puncten bezeichnet worden, sagen müssen, 3 von 10, 7 von 9, 5 von 19, nichts von 2. Oder man wird die nicht punctirte 0 ein 10 müssen bedeuten lassen, eine punctirte 0 aber 9, und die punctirte Zahl wie allezeit, eines weniger als sie ohne Punct bedeutet hätte, sie mag stehen wie sie wil.

3000
573
2427

§. 65. Wil man sich nach diesem allen so gesagt worden nochmals kurz überzeugen, daß auf die gewiesene Art die Subtraction richtig

tig verrichtet, und der Ueberschuß der einer der gegebenen Zahlen über die andere genau gefunden werde, so hat man nur darauf Acht zu haben, daß in allen gegebenen Reguln die grössere Zahl in die Theile, aus welchen sie bestehet, zu zertheilen gelehret worden, nemlich in ihre Einheiten von verschiedenen Ordnungen, und so ebenfals die kleinere, und daß so dann befohlen worden, die Theile der kleinern nach und nach von den Theilen der grössern abzuziehen, und den Ueberschuß eines jeden Theils der grössern Zahl über den Theil der kleinern, welcher von jenem abgezogen worden, unter der Querlinie anzumerken. Es ist klar, daß wenn man dieses alles beobachtet, endlich nothwendig unter diese Linie der Ueberschuß aller Theile der grössern Zahl über alle Theile der kleinern zu stehen kommen müsse. Der Ueberschuß aber der ganzen grössern Zahl über die ganze kleinere, ist dem Ueberschuß aller Theile der grössern Zahl über alle Theile der kleinern gleich. Denn alle Theile sind auch hier das Ganze. Demnach wird durch die angegebene Rechnungs-Art der Ueberschuß der grössern zwoer gegebenen Zahlen über die kleinern allzeit richtig gefunden.

Probe der Addition und Subtraction.

§. 66. Man siehet hieraus zugleich, daß wenn man sich versichern wil, man habe in der Anwendung der gegebenen Reguln nicht gefehlet, wie dieses aus Mangel der Achtsamkeit leicht geschehen kan, man nur den gefundenen Ueberschuß zu der kleinern der gegebenen Zahlen addiren dörfe. Ist richtig gerechnet und also der wahre Ueberschuß gefunden worden, so muß die Summe dieser Zahlen der grössern Zahl gleich seyn, nach dem ersten Begrif, welcher von dem Ueberschuß zu haben. I, 53 Man könnte eben diesem zufolge die Addition durch eine wiederholte Subtraction probiren. Denn wenn man von der Summe dreyer Zahlen die erste abziehet, und von dem Ueberschuß wider die zweyte, so muß endlich die dritte Zahl bleiben. Und so ist es auch wenn mehr als drey Zahlen zusammen gesetzt worden. Es bleibt allezeit die letzte übrig, wenn man alle andere ausser der letzten nach und nach von der Summe wegnimt. Erfolget dieses nicht, so hat man sich gewiß in Anwendung der Regeln verstossen. Allein diese wiederhohlte Subtraction ist schwerer als die Addition selbst, und man kan in dieser leichter als in jener fehlen. Da denn, wenn der letzte Ueberschuß nicht genau mit der letzten der zusammen addirten Zahlen überein komt, man nicht wissen kan, ob man in der Addition oder in der wie-

wiederhohlten Subtraction gefehlet. Man hat noch andere Arten der Proben von der Addition, welche aber alle diese Unbequemlichkeit haben, daß man sich bey denselben leichter verstossen kan, als bey der Addition selbst, und es ist also am besten, daß man die Addition nicht anders probire, als indem man eine jede Säule Ziffer, welche man zusammen gerechnet, deren Einheiten nemlich von einerley Ordnung sind, zweymal addire, und man kan, um desto gewisser zu seyn, einmal von den obersten anfangen und zu denselben nach und nach die untern zehlen, das zweyte mal aber von den untern Ziffern aufwärts steigen. Kommt einerley Summe, so ist es nicht wahrscheinlich daß man gefehlet habe: sind aber die Summen verschieden, so ist ein Fehler da, welchen man durch die zum dritten mal wiederhohlte Addition zu verbessern trachten muß.

Die Anwendung der Addition und Subtraction.

§. 67. Von der Anwendung dieser beyden Arten der Rechnung ist nur noch etwas weniges zu gedenken. Es ist an sich klar, daß keine andere Zahlen können addiret, oder daß der Unterschied keiner andern Zahlen könne gefunden werden, als solcher, deren einzelne Einheiten von einerley Grösse sind. Niemand kan sagen wie viel zwey Pferde zu vier Thalern hinzu gesetzt ausmachen, oder wie viel übrig bleibt wenn man 3 Meilen von 7 Centnern abziehet. Die Sache ist bereits oben I, 1. berühret worden, da wir von den ersten Grund-Eigenschaften der Zahlen gehandelt haben.

§. 68. Zahlen also welche addiret werden sollen, oder deren eine von der andern weg zu nehmen ist, müssen einerley Einheiten haben. Aber in welchen Fällen sind sie zu addiren, und in welchen Fällen oder bey was vor Aufgaben ist die kleinere von der grössern abzuziehen? Dieses einzusehen hat in allen besondern Fällen keine Schwierigkeit. Es nimt jemand im Januario 38 Rthl. ein, und im Februario 41, im Merz aber 52, und es wird gefragt wie viel er in diesen 3 Monaten zusammen eingenommen habe? so ist klar, daß man die vorgegebene 3 Zahlen zusammen setzen müsse, um die ganze Einnahme der 3 Monaten zu bekommen, welche 131 Thlr. beträgt. Gesetzt wieder, es hat jemand zu Anfang des Januarii 63 Rthlr. giebt aber diesen Monat durch aus 47, wie viel hat er nach Verfliessung des Monats? Hier ist wieder klar, daß man die kleinere Zahl von der grössern abziehen müsse

um

um die Zahl 16 zu finden, welche den Ueberschuß anzeiget. Wiederum gesetzt, es habe jemand zu Anfang des Februarii 16 Thlr. und verzehre diesen Monat durch 27 Rthlr., so wird er zu Ende desselben 11 Thlr. schuldig seyn, welches ebenfals durch die Subtraction gefunden wird. Alles dieses ist gar natürlich und ohne die geringste Schwierigkeit.

I. Abschnitt.

§. 69. Eben so ist es auch mit sehr vielen andern Dingen beschaffen. Gesetzt, es gehet jemand von dem Ort A aus nach B zu, und kommt bis in C, kehret aber in C um, und gehet bis in D zurück, so mindert dieser Rückweg den Weg, welchen er vorhero von A nach B zu gemacht hatte, um seine ganze Grösse, und die Entfernung von A nach B zu ist nunmehro nicht grösser als AD. Wäre aber jemand aus A auf der Linie AB gegangen, bis an C, und wäre an diesem Ort C umgekehret, und gerade zurück bis nach E gereiset, so wäre seine Entfernung von A nach der andern Seite AE. In beyden Fällen komt die Entfernung von dem Ort A, vorwärts oder rückwärts, wenn man die kleinere Entfernung von der grössern abziehet. Ist der Weg vorwärts AC grösser als der Weg rückwärts CD, so liegt die Entfernung AD vorwärts; ist aber der Weg vorwärts AC kleiner, als der Weg rückwärts CE, so ist die würkliche Entfernung von dem Ort A rückwärts, AE.

F. 7.

§. 70. Wenn wir aber auf diese Dinge etwas Acht haben, so finden wir, daß die Grössen von einerley Art, und die Zahlen welche diese Grössen ausdrücken, dergestalt beschaffen seyn können, daß sie, wenn sie zusammen kommen, einander vermehren, daß sie aber auch einander dergestalt zuwider seyn können, daß so bald sie zusammen gebracht werden, und mit einander eine Grösse oder eine Zahl, welche diese Grösse ausdrücket, ausmachen, die kleinern die grössern dergestalt vermindere, daß dieser Abgang der kleinern Zahl oder Grösse genau gleich wird. Ein Thaler ist allezeit ein Thaler, ich mag ihn ausgeben oder einnehmen. Allein in Ansehung auf mein Vermögen ist es nicht einerley, ob ich den Thaler einnehme oder ausgebe. Nehme ich ihn ein, so wird mein Vermögen, welches zum Exempel aus 13 Thlr. bestehen mag, vermehret, und ich habe nunmehro deren 14, gebe ich ihn aber aus, so wird es vermindert, und ich habe nur noch 12 Thlr. und also vermehret alle Einnahme mein Vermögen, und verschiedene Einnahmen vermehren einander. Die Ausgabe vermindert das Vermögen, und verschiedene Ausgaben vermehren einander. Eben so vermehren auch die Schulden einander, vermindern aber das Vermögen,

I. Abschnitt.

gen, und das Vermögen vermindert die Schulden, denn ich kan diese dadurch tilgen, so daß sie ganz und gar nicht mehr da sind. So vermehren alle die Wege, die ich vor mich nehme, ein ander, und die Wege die ich zurück nehme, vermehren einander wiederum, im Gegentheil vermindert der Weg, den ich vor mich genommen, den Rückweg, und der Rückweg den erstern, nachdem nemlich dieser oder jener kleiner ist, und so ist es in vielen andern dergleichen Fällen.

§. 71. In der Anwendung also, wenn man eine Zahl haben wil, welche aus verschiedenen andern erwächset, wird man allzeit diejenigen addiren müssen, welche Grössen bedeuten, die einander vermehren. Im Gegentheil muß man die Subtraction gebrauchen, wenn man die Zahl haben wil, welche durch die Zusammensetzung zweyer solchen Zahlen wird, die da Grössen bedeuten, deren eine die andere vermindert, und zwar muß man jederzeit die kleinere Zahl von der grössern wegnehmen. Der Ueberrest ist so dann von der Beschaffenheit der grössern.

Bezeichnung der Grössen, die einander vermehren oder vermindern.

§. 72. Damit man sich aber hier desto weniger verwirre, und etwa aus Uebereilung diejenige Grössen addire, welche einander vermindern, oder diejenige von einander subtrahire, welche einander vermehren, welches desto leichter geschehen kan, weil beyderley Grössen von einerley Art sind, und einerley Einheiten haben, und die Schulden zum Exempel eben so wohl als baares Geld nach Thalern; der Rückweg eben so wohl als der Weg vorwärts nach Meilen, gerechnet werden: so hat man zwey Zeichen beliebt, welche den Zahlen, oder überhaupt den Zeichen, womit man etwa die Grössen bezeichnen wil, vorgesetzet werden. Diese sind + und —, und werden nachfolgender massen gebraucht. Diejenige Zahlen vor welchen einerley Zeichen stehet, es mag nun dieses + oder — seyn, vermehren einander, wenn sie zusammen kommen. Im Gegentheil aber, wenn vor einer Zahl oder andern Zeichen + stehet, und vor einer andern —, so wird dadurch angezeiget, daß sie dergleichen Grössen bedeuten, welche einander vermindern. Es ist sonst nichts bey der Sache zu merken. Sind verschiedene Zahlen da, deren einige einander vermehren, andere aber vermindern, so kan ich der ersten vorsetzen was ich wil. Gemeiniglich schreibet man zu derselben +, oder läst vielmehr dieselbe ohne einiges

Zei-

Zeichen, indem man eine Zahl, vor welcher gar kein Zeichen stehet, allzeit so ansiehet, als ob sie mit + bezeichnet wäre. Vor die übrigen Zahlen setzet man + wenn sie die erste, welcher eben dieses Zeichen vorgeschrieben ist, vermehren, und — wenn sie dieselbe vermindern.

I. Abschnitt.

§. 73. Ein Exempel kan die Sache in ihr völliges Licht setzen, welche an sich selbst klar genug wäre, wenn sie nicht zuweilen verdunkelt würde. Es wird angegeben, es nehme jemand von seinen Gütern des Jahrs 395, gebe aber dargegen aus vor Wohnung 57, vor seinen Tisch 175, ferner nehme er von einer Besoldung jährlich 342 und gebe vor Kleider aus 45. An Nebendingen habe er einzunehmen 97, und gebe dargegen noch aus 185, und man fragt, wie viel er übrig behalte, oder wie viel er mehr ausgebe als er einnimt; denn eins oder das andere wird hier gefunden; so sehe ich, daß das gesuchte sey $395 - 57 - 175 + 342 - 45 + 97 - 185$. Die Zahlen nun vor welchen + stehet, vermehren hier das Vermögen, die andern vermindern es. Die erstern zusammen geben $+ 834$, die andern $- 462$, und dieses letztere von dem erstern abgezogen, läst $+ 372$, um welche Summe nach Ablauf des Jahrs das Vermögen vermehret wird. Eben dieses wäre gefunden worden, wenn man gesetzt hätte $- 395 - 97 - 342 + 57 + 175 + 45 + 185$, da die Zahlen von der erstern Art, die das Vermögen vermehren, mit —, die andern aber, welche es vermindern, mit + bezeichnet sind.

§. 74. Man würde diese Zeichen nicht nöthig haben, wenn man die Einnahme auf eine Seite, und die Ausgabe auf die andere setzen,

	57
395	175
97	45
342	185
834	462

beydes zusammen zehlen, und hernach das kleinere von dem grössern abziehen wolte. Der Ueberschuß ist Gewinst oder Verlust, nachdem nemlich die Einnahme oder die Ausgabe grösser ist. Allein es ist nicht allezeit bequem, diese Weitläufigkeit zu machen. In diesem Fall unterscheiden die Zeichen + und — dergleichen Zahlen eben so wohl, als wenn man sie in zwey verschiedene Reyhen gebracht hätte.

§. 75. Man hat sich mit Fleiß enthalten die Namen dieser Zei-

I. Abschnitt.

chen +, — anzugeben. Sie können falsche Begriffe beybringen, wenn man auf ihre eigentliche Bedeutung Acht hat. Man nennet das erste *plus* und das andere *minus*. Diese Worte können so verstanden werden, als ob die Grössen, so mit dem ersten + bezeichnet sind, allzeit vermehrten, und die andern mit — verminderten. Und doch vermindern die mit + gezeichnete eben so wohl als die, welche — vor sich haben, und verschiedene, die mit — bezeichnet sind, vermehren einander, wie auch alle diejenige thun, so + vor sich haben. Das Beste ist also, daß man diese Wörter als Thone annehme, die zu nichts, als bloß die Zeichen + — anzudeuten, bestimmet sind, ohne sich um ihre anderweitige Bedeutung im geringsten zu bekümmern.

Die Addition und Subtraction gewisser Brüche.

§. 76. Hat man verschiedene Brüche von einerley Benennung, die sich auf einerley Einheiten beziehen, zu einander zu addiren, oder den kleinern von dem grössern abzuziehen, so läst man die Nenner stehen, und verrichtet die aufgegebene Rechnungsart bloß mit den Zehlern. Denn die Nenner zeigen bloß an, was das vor Theile sind, welche die Zehler zehlen, als in den beyden Brüchen $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{9}$ die neunten Theile der Einheit: die Zehler bestimmen die eigene Zahl dieser Theile. I, 32. Die Grösse der Theile, welche gezehlet werden, ist in den gegebenen und ähnlichen Fällen einerley, denn man setzt bey den zwey Brüchen einerley ganze Einheiten zum voraus, und die neunten Theile von einerley ganzen Dingen, und überhaupt die Theile welche kommen, indem einerley Ganzes zwey oder mehr mal in gleich viele gleiche Theile getheilet wird, können nicht verschieden seyn: Demnach zehlen die Zehler der Brüche einerley Theile, und wenn man also die Zahlen aller der Theile, die in beyden Brüchen vorkommen, und folgends die beyden Brüche selbst, zusammen rechnen wil, so hat man nichts als die Zehler zusammen zu rechnen, und die Nenner zu lassen wie sie sind. Denn in der Summe kommen allezeit solche Einheiten heraus, als in den Zahlen angedeutet worden, welche zusammen gesetzt werden, und folgends in unserm Exempel Neunthel. Und demnach ist $\frac{5}{9} + \frac{2}{9}$ so viel als $\frac{7}{9}$. Und auf eben die Art erhellet, daß $\frac{5}{9} - \frac{2}{9}$ nichts anders als $\frac{3}{9}$ seyn könne. Man kan nach dieser Anweisung so viel Brüche von einerley Benennung mit einander vereinigen als man wil: $\frac{5}{17} - \frac{3}{17} - \frac{8}{17} + \frac{9}{17} + \frac{2}{17}$, ist so viel $\frac{16}{17} - \frac{11}{17}$ das ist $\frac{5}{17}$, und $\frac{3}{18} - \frac{7}{18} + \frac{2}{18}$ ist so viel als $-\frac{2}{18}$.

§. 77. Da

§. 77. Damit wir inskünftige dergleichen Sätze bequemer ausdrücken können, als in dem nächsten Absatze vorkommen, werden wir uns des gewöhnlichen Zeichens = bedienen, welches bedeutet, daß die Zahlen oder andere beliebige Zeichen der Grössen, welche vor diesen Zeichen stehen, denjenigen gleich sind, welche nach denselben gesetzt sind, oder daß die erstern so viel ausmachen, als die letztern: welchem zufolge die eben erwehnte Sätze dergestalt auszudrücken sind, $\frac{5}{17}-\frac{3}{17}-\frac{8}{17}+\frac{9}{17}+\frac{2}{17}=\frac{16}{17}-\frac{11}{17}=\frac{5}{17}$, und $\frac{3}{18}-\frac{7}{18}+\frac{2}{18}=-\frac{2}{18}$.

§. 78. Man siehet übrigens, daß wenn verschiedene Zahlen zu vereinigen sind, als die eben bemerkte Brüche, und wenn eine einzige Zahl zu finden ist, welche so viel beträgt als sie alle, es gar nicht darauf ankomme, in was Ordnung man sie vereinige. In dem Exempel, dessen oben erwehnet worden, giebt der erste Bruch $\frac{5}{17}$ mit dem andern $-\frac{3}{17}$ den Bruch $\frac{2}{17}$, dieser mit dem dritten $-\frac{8}{17}$ giebt $-\frac{6}{17}$, wenn man zu diesem den vierten $\frac{9}{17}$ setzet, hat man $\frac{3}{17}$, und noch der fünfte $\frac{2}{17}$ darzu, bringt $\frac{5}{17}$, eben wie vorher. Und eben dieses komt, wenn man die Brüche in einer andern Ordnung setzt, und so dann vereiniget. Denn man setzet doch allemal die mit + bezeichnete alle zusammen, und ziehet von denselben alle die ab, die das andere Zeichen − haben.

Begriffe von der Multiplication.

§. 79. **Multipliciren**, eine neue Rechnungsart, heisset eine Zahl aus einer bekannten dergestalt machen, wie eine andere ebenfals bekannte Zahl aus der Einheit entstehet. Sol ich 7 durch 3 multipliciren; so habe ich mir vor allen Dingen die Art und Weise vorzustellen, wie die letztere dieser Zahlen 3, durch welche ich die erstere 7 multipliciren sol, aus der Einheit entstehet. Dieses einzusehen ist etwas leichtes. Die Zahl 3 wird aus der Einheit, wenn man die Einheit dreymal nimmet, oder wenn man dieselbe dreymal setzet, und diese Einheiten addiret: Eben so sol ich nun auch aus der Zahl 7 eine neue Zahl machen. Ich sol diese Zahl 7 dreymal setzen, und so dann addiren, die Summe, die dergestalt gefunden wird 21, ist diejenige Zahl, welche durch die Multiplication solte gefunden werden.

§. 80. Es kommen demnach bey der Multiplication drey Zahlen vor, deren zwo bekannt oder gegeben sind, und die dritte aus den zwo ersten durch die Multiplication gefunden wird. Die erste ist diejenige, welche zu **multipliciren** ist, das ist, aus welcher eine neue

I. Abschnitt.

Zahl soll gemacht werden, dergleichen in unserm Exempel die Zahl 7 war. Die zweyte diejenige, nach deren Vorschrift aus jener eine neue Zahl zu machen ist, indem man nemlich darauf siehet, wie dieselbe aus ihrer Einheit entstehet. Diese heisset die multiplicirende Zahl, und war in dem vorstehenden Exempel 3, und endlich wird die dritte Zahl, welche durch die Multiplication solte gefunden werden, als hier 21, das Product genennet.

§. 81. Dieser allgemeine Begriff der Multiplication begreift zwey Fälle in sich, welche insonderheit wohl von einander zu unterscheiden sind. Die multiplicirende Zahl ist nemlich entweder eine ganze Zahl, oder ein Bruch. Es kan zwar auch die Zahl, welche durch jene zu multipliciren ist, entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn, allein man hat nicht nöthig darauf zu sehen, weil die Multiplication fast nach eben den Reguln, wenigstens nach eben den Grundsätzen verrichtet wird, es mag diese Zahl ganz oder gebrochen seyn.

§. 82. Daß aber eine Multiplication durch eine ganze Zahl ganz was anders sey, als eine Multiplication durch einen Bruch, siehet man daraus, weil eine ganze Zahl ganz anders aus der Einheit entstehet als ein Bruch. Eine ganze Zahl zu erhalten, wird die Einheit vervielfältiget, und die Zahl wird dadurch grösser als die Einheit. Ein Bruch aber entstehet, indem man ein oder etliche dergleichen Theile, in welche man die Einheit zerfället hat, annimt, und der Bruch ist kleiner als die Einheit, wenn er ein ächter Bruch ist. I, 10. Soll demnach aus einer Zahl eine andere eben so gemacht werden, wie ein Bruch aus einer Einheit wird, das ist, soll eine ganze Zahl durch einen Bruch multipliciret werden, so muß man die ganze Zahl in so viele gleiche Theile theilen, als viele der Theile sind, in welche man die Einheit getheilet hat, den Bruch herauszubringen, und dieser Theile muß man so viele annehmen, als viele Einheiten in dem Zehler des Bruchs enthalten sind. Dieses ist viel schwerer als das erste, und gründet sich auf dasselbe. Wir werden demnach uns vor allen Dingen die Multiplication durch ganze Zahlen bekannt machen müssen. Worzu doch auch die Multiplication durch zehentheilichte Brüche kan gebracht werden, weil diese aus eben den Grundsätzen hergeleitet werden kan, der wir uns bedienen werden, die Multiplication durch ganze Zahlen begreiflich zu machen.

Grundsätze zur Multiplication.

§. 83. Damit man sich aber diese Grundsätze recht deutlich vor-

stellen möge, so nehme man eine beliebige Zahl von Einheiten, von was Art sie auch seyn mögen, dergleichen in der Zahl zwischen AB durch die ** angedeutet werden, unter welchen man sich vorstellen kan was man will, auch so gar beliebige Theile der Einheiten, als siebenthel, zwölfthel oder etwas dergleichen. Diese Zahl AB ist die, welche zu multipliciren ist. Die andere Zahl sey diejenige, welche zwischen CD stehet, deren Einheiten durch *** ausgedrückt worden sind, um sie mit den vorigen nicht zu verwirren. Wir stellen uns vor, daß diese CD eine ganze Zahl sey, und es bedeuten demnach die ** ganze Einheiten und keine Theile derselben. Diese Zahl CD ist diejenige, durch welche die vorige AB multipliciret werden soll. Man setze nunmehro vor eine jede Einheit, welche in der Zahl CD angetroffen wird, die Zahl AB ganz, und bringe auf diese Art die in Form eines Vierecks zwischen ABEF geschriebene Zahl heraus. Diese wird das Product seyn, und aus der Betrachtung dieser Zahl wird man verschiedene Eigenschaften der Producte einsehen können, welche auf eine andere Art etwas schwerer heraus zu bringen wären.

I. Abschnitt. Fig. 8.

§. 84. Daß die Zahl zwischen ABEF das würkliche Product sey, welches durch die Multiplication der Zahl AB durch die Zahl CD entstehet, ist klar genug. Denn man siehet vollkommen deutlich, daß diese Zahl ABEF aus der Zahl AB eben so entstehe, wie die CD aus der Einheit entstehet, weil man vor jede Einheit, welche in der CD anzutreffen war, die Zahl AB selbst in die Zahl ABEF gebracht hat. Man siehet aber auch, daß die Multiplication der Zahl AB durch die ganze Zahl CD, nichts anders als eine wiederholte Addition der zu multiplicirenden Zahl AB erfordere, und daß folgends die Einheiten des Products ABEF von den Einheiten der Zahl AB, welche zu multipliciren war, nicht verschieden seyn können. Denn die Einheiten der Summe sind von den Einheiten der Zahlen, welche man zusammen gesetzt hat, niemals verschieden.

§. 85. Die Einheiten der multiplicirenden Zahl CD aber haben in das Product ABEF ganz und gar keinen Einfluß. Es wird eben die Zahl ABEF heraus gebracht, was man sich auch vor Dinge unter den *** vorstellen mag. Es dienet die Zahl CD bloß dazu, daß sie anzeige, wie das Product ABEF aus der zu multiplicirenden Zahl AB zu machen ist, und dieses zeiget sie durch die Art und Weise an, wie CD selbst aus ihrer Einheit entstehet. Es entstehen aber vier Pferde aus einem Pferd nicht anders, als vier Thaler aus einem

Tha-

I. Abschnitt.

Thaler, oder vier Ellen aus einer Elle. Deswegen hat man auf die Grösse oder Art der Einheiten der multiplicirenden Zahl gar nicht zu sehen, und deswegen pflegt man auch nicht zu sagen, man soll zum Exempel 5 Ellen durch 3 Thaler multipliciren, ob zwar dieses eine gar richtige Bedeutung hätte und anzeigete, man soll aus 5 Ellen eine andere Zahl der Ellen eben so machen, wie man 3 Thaler durch die wiederhohlte Zusammensetzung eines einzelen Thalers heraus bringen kan. Es kommt uns diese Redensart 5 Ellen durch 3 Thaler zu multipliciren, und andere dergleichen, wunderlich vor, und dieses aus keiner andern Ursache, als weil die Benennung der Einheiten in der multiplicirenden Zahl überflüssig ist, und man bloß hätte sagen sollen, man soll 5 Ellen durch die Zahl 3 multipliciren, oder dreymal nehmen, ohne anzuzeigen, was in dieser Zahl drey vor Einheiten enthalten sind.

§. 86. Wenn demnach ein Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren ist, $\frac{5}{7}$ zum Exempel durch 4, so hat man bloß den Zehler des Bruchs durch die Zahl 4 zu multipliciren, durch welche der Bruch multipliciret werden soll, und das Product 20 an die Stelle des Zehlers in einen Bruch zu setzen, dessen Nenner der vorige 7 ist. Dieser Bruch $\frac{20}{7}$ ist das Product aus dem Bruch $\frac{5}{7}$ durch 4 multipliciret. Man siehet dieses aus der Figur ein, wenn man setzet, daß die Einheiten der Zahl AB siebenthel sind, und folgends die Zahl AB $\frac{5}{7}$ betrage. In dem Product ABEF sind 20 Einheiten, von der Grösse derjenigen, welche in AB enthalten sind, und folgends ebenfals siebenthel, und es ist demnach allerdings das Product $\frac{20}{7}$. Oder man stelle sich vor, daß wenn der Bruch $\frac{5}{7}$ durch 4 zu multipliciren ist, man denselben viermal setzen, und so dann addiren müsse. Es ist demnach das Product welches kommt $\frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}$. Will man die Addition würklich verrichten, so werden nur die Zehler addiret, der Nenner bleibt unverändert; I, 76. Es ist aber diese Addition der Zehler $5+5+5+5$ nichts anders, als eine Multiplication des Zehlers 5 durch die Zahl 4, durch welche der Bruch solte multipliciret werden. Es ist nichts leichter als diese Betrachtungen auf alle ähnliche Fälle anzuwenden.

Fig. 8. & 9.

§. 87. Multipliciret man die Zahl CD, welche vorher die multiplicirende Zahl war, durch AB, welche vorher multipliciret wurde, (wobey man sich aber vorstellen muß, daß AB aus ganzen Einheiten bestehe, um nicht ausser die Gränzen unserer gegenwärtigen Betrach-

tung

tung zu kommen,) so wird das Product dasjenige werden, welches sich in der 9ten Figur CDEF darstellet. Die Einheiten dieses Products können von den Einheiten des vorigen ABEF in der 8ten Figur verschieden seyn, denn sie sind von der Art der Einheiten in der Zahl CD, da die vorige von der Art der Einheiten in AB waren. Doch ist die Zahl der Einheiten in dem Product CDEF einerley mit der Zahl der Einheiten in dem Producte ABEF, wie man sehen kan, wenn man auf die Art, wie diese beyde Producte enstanden sind, etwas Acht haben will. Es können nemlich die Zahlen der Einheiten, dieser in Form der Vierecke geschriebenen Producte, deswegen unmöglich verschieden seyn, weil in beyden so wohl nach ihren Längen gleich viele Einheiten stehen, als auch nach ihren Breiten. Wenn man demnach bloß auf die Zahl siehet, und sich darum nicht bekümmert, von was Grösse die Einheiten sind, welche gezehlet werden, wie dieses bey den ganzen Zahlen gemeiniglich zu geschehen pfleget, so muß man überhaupt sagen, daß jede zwo ganze Zahlen, wenn man eine durch die andere multipliciret, einerley Product bringen, man mag die erste durch die andere, oder die andere durch die erste multipliciren. Also ist 2 mal 3 so viel als 3 mal 2, nemlich 6, und so in allen übrigen Fällen.

Bey der Multiplication gebräuchliche Zeichen und Wörter.

§. 88. Derowegen unterscheidet man auch die zwo gegebene Zahlen, deren eine durch die andere zu multipliciren ist, in den meisten Fällen nicht einmal durch die Benennung, und giebt der einen so wohl als der andern den Namen eines *Factors* des herauszubringenden Products, welches man auch ein *Factum* nennet. Man pflegt wohl zuweilen die eine den ersten, und die andere den zweyten Factor zu nennen; allein es ist willkührlich, welche man zum ersten und welche man zum zweyten nehmen will, und werden sie also auch durch diese Benennung nicht von einander unterschieden. So sind 2 und 3 die zwey Factoren des Products 6, und zwar 2 der erste, 3 der zweyte, oder 3 der erste und 2 der zweyte, nachdem man sie nemlich in dieser oder jener Ordnung geschrieben. Wir werden hernach sehen, daß dieser Satz auch von den Brüchen richtig ist, und man kan also diese Benennung auch bey dieser Art Zahlen gebrauchen. Doch bis dieses wird können erwiesen werden, wollen wir, was hier gesagt worden, bloß von ganzen Zahlen verstanden haben.

I. Abschnitt.

§. 89. Aus dieser Ursache pflegt man ein Factum dessen zwey Factore die Zahlen 3 und 4 sind, ohne Unterschied dergestalt zu bezeichnen 3×4 oder 4×3, und das geschriebene Creutz ist allezeit ein Zeichen der Multiplication, und des dadurch entstehenden Products. Man bedienet sich auch zuweilen eines blossen Puncts, und bezeichnet das Product der Factore 4 und 3 dergestalt $4 \cdot 3$ oder $3 \cdot 4$. Sind verschiedene Zahlen in einander zu multipliciren 3, 4, 5, 6, zum Exempel, dergestalt, daß man die erste derselben 3 durch die zweyte 4, und das hieraus entstehende Product 12 durch die dritte Zahl 5 multipliciren, und endlich das Product 60 welches nunmehro erhalten worden durch die vierte Zahl 6, wodurch 366 kommt; so zeichnet man dieses Product dergestalt: $3 \times 4 \times 5 \times 6$, und so in allen übrigen Fällen, es mögen so viele Factore seyn als man sich nur vorstellen will.

§. 90. Wir werden zuweilen die Producte aus verschiedenen Zahlen auch dergestalt schreiben $5 \times \overline{3 \times 2} \times 4$, in welchem Fall allezeit die zwey Ziffern, über welche der Strich gezogen worden, eine einzige Zahl, nemlich das Product, so aus denselben entstehet, hier 6, bedeuten sollen, und also obiges so viel seyn wird, als wenn wir geschrieben hätten $5 \times 6 \times 4$. Nemlich da $5 \times 3 \times 2 \times 4$ andeutet, man müsse 5 durch 3, was heraus kommt durch 2, und das Product so hieraus entstehet durch 4 multipliciren, und auf die Art ein Product aus allen Factoren 5, 3, 2, 4 schaffen, so bedeutet $5 \times \overline{3 \times 2} \times 4$, man soll ein Product aus den dreyen Factoren 5, 3×2 oder 6, und 4 machen, deren mittlerer 6 wieder ein Product aus den zwo Zahlen 3 und 2 ist.

Verfolg der Gründe der Multiplication.

Fig. 10.

§. 91. Wenn man den Factor AB, welchen wir als die zu multiplicirende Zahl ansehen, theilet wie man will in C und D, und multipliciret denselben so dann nach der jetzt beschriebenen Art, so bekommt das Product AE eben so viele Theile AF, CG, DE, als man der zu multiplicirenden Zahl AB gegeben, und diese Theile des Products sind Producte, welche aus den Theilen der Zahl AB entstanden sind, indem diese Theile durch eben die Zahl multipliciret worden, durch welche man die ganze AB multipliciret hat. AF nemlich ist das Product aus AC dem ersten Theil des Factors AB, und aus der multiplicirenden Zahl; CG ist das Product aus CD, dem zweyten Theil des Factors AB und der multiplicirenden Zahl, und DE das Product aus dem dritten Theil eben dieses Factors DB, und der mul-

multiplicirenden Zahl, und die Summe dieser drey kleineren Producte AF + CG + DE ist dem ganzen Producte AE gleich. In der Figur deren wir uns hier bedienen, ist AB = 10, getheilet in die Theile 3, 5, 2, und es bestehet das Product aus 10 und der multiplicirenden Zahl 4, welches 40 ist, aus den Producten 4 mal 3 oder 12, 4 mal 5 oder 20, 4 mal 2 oder 8, und 40 ist der Summe dieser Zahlen 12 + 20 + 8 gleich.

I. Abschnitt.

§. 92. Man kan demnach ein jedes Product einer jeden Zahl, so durch eine andere Zahl multipliciret werden soll bekommen, wenn man jene in Theile zerfället, durch deren Addition sie heraus kommt, hernach jedes dieser Theile durch die multiplicirende Zahl würklich multipliciret, und die also heraus gebrachten Producte zusammen setzet, oder addiret. Zum Exempel, ich soll sagen, wie viel kommt, wenn man 598 durch 7 multipliciret, so zerfälle ich die erste Zahl 598 in Theile wie ich will, am bequemsten in diese 500, 90, 8. Nun ist 7 mal 500 = 3500, 7 mal 90 = 630, und 7 mal 8 = 56, und demnach ist 7 mal 598 = 3500 + 630 + 56 oder 4186.

§. 93. Wenn man die Theile der zu multiplicirenden Zahl AB gleich annimt, wie in der 11ten Figur geschehen ist, da die Theile der zu multiplicirenden Zahl AB sind AC, CD, DB, so werden auch die kleinern Producte AF, CG, DE, aus welchen das grössere AE bestehet, alle gleich, und dieses AE kommt demnach, wenn man eins der kleinern Producte AF so oft nimt, als viele der Theile des getheilten Factors AB sind. Es ist nemlich AB in dieser Figur = 6, und diese Zahl ist in 3 gleiche Theile getheilet, deren jedes 2 Einheiten hat. Es kommt das Product aus 6 und 4, das ist 24, wenn man 2 durch 4, und das Product dieser Zahlen durch 3 multipliciret.

Fig. II.

§. 94. Wenn man also die Helfte einer Zahl, was sie vor eine seyn mag, durch eine andere Zahl multipliciret, kommt halb so viel heraus, als wenn man jene Zahl ganz genommen durch diese multipliciret hätte; multipliciret man den dritten Theil einer Zahl durch eine andere, so kommt der dritte Theil desjenigen, so durch die Multiplication der ganzen Zahl entstanden wäre, und so immer fort. Im Gegentheil wenn man eine Zahl verdoppelt oder zweymal nimt, und multipliciret so dann die also verdoppelte Zahl durch eine andere, so kommt zweymal so viel, als wenn man nur die einfache Zahl multipliciret hätte, nimt man sie dreyfach, so kommt auch dreymal so viel

 und

I. Abschnitt.

und so ferner. Zum Exempel, die Helfte von 8 ist 4, 8 mit 5 multipliciret bringt 40, und 4 mit 5 multipliciret giebt 20, welches die Helfte ist von 40. Der dritte Theil von 12 ist wieder 4, 12 aber mit 10 multipliciret giebt 120, und 4 auch mit 10 multipliciret, giebt nur 40, welches ebenfals der dritte Theil von 120 ist.

§. 95. Ferner ist auch aus der Betrachtung eben der Figur klar, daß wenn man die Zahl AH durch eine andere AC multipliciret, und das dadurch entstehende Product wieder durch eine andere, als hier durch drey, eben die Zahl AE kommen müsse, welche gekommen wäre, wenn man die Zahl AH so gleich durch das Product aus AC und 3, das ist durch AB, multipliciret hätte. Oder deutlicher: wenn man eine Zahl durch eine andere, und das hieraus entstehende Product durch eine dritte multipliciret, so kommt eben das Product, welches man erhält, wenn man die erste Zahl durch das Product der zweyten und der dritten Zahl multipliciret. Die Zahl 2 durch 4 multipliciret giebt 8, und dieses Product durch 3, bringt 24, aber eben die 24 entstehen, wenn man 2 durch 3 mal 4, das ist durch 12 multipliciret; das ist, es ist nach den I, 89. erklärten Zeichen allezeit

$$\overline{2 \times 4} \times 3 = 2 \times \overline{4 \times 3}.$$

Die Ordnung der Factoren lässet sich verändern.

§. 96. Und hieraus ist weiter zu schliessen, daß wenn man verschiedene Zahlen 2, 3, 4, 5 in einander zu multipliciren, und deren Product $2 \times 3 \times 4 \times 5$ machen soll, man sich an die Ordnung dieser Ziffer gar nicht zu kehren habe, und daß eben diese Ziffer in einer jeden andern Ordnung, als $5 \times 4 \times 3 \times 2$, oder $4 \times 2 \times 3 \times 5$ in einander multipliciret, einerley Product bringen müssen. Das Exempel zeiget die Richtigkeit des Satzes bey den vorliegenden Ziffern. Daß er aber seine allgemeine Richtigkeit habe, kan aus folgenden Betrachtungen erhellen.

§. 97. Wenn man die Zahlen $2 \times 3 \times 4 \times 5$, in der Ordnung, in welcher sie stehen, multipliciret, so fängt man an, die erste 2 durch die zweyte 3 zu multipliciren; Es ist aber I, 87. erwiesen, daß drey mal zwey so viel sey, als zwey mal drey, und man bringt also gleich Anfangs einerley Product heraus, wenn man die erste zwo Zahlen ersetzet, und dieselbe in verkehrter Ordnung schreibt 3×2. Es ist nemlich

$2 \times 3 \times 4 \times 5 = \overline{2 \times 3} \times 4 \times 5 = \overline{3 \times 2} \times 4 \times 5 = 3 \times 2 \times 4 \times 5$, und bloß diese

Aus-

Ausdrücke können, was wir sagen wollen, deutlich machen, wenn man auf dieselbe einige Achtsamkeit wenden will.

I. Abschnitt.

§. 98. Wiederum und wenn man nachmals die Zahlen $2 \times 3 \times 4 \times 5$ in der Ordnung, in welcher sie stehen, multipliciren soll, so ist es einerley, ob man die erste Zahl 2 durch die zweyte 3, und was heraus kommt durch die dritte 4 multipliciret, oder ob man an statt dessen die erste Zahl 2 durch das Product der dritten und vierten multipliciren will. I, 95. Das ist, es ist $2 \times 3 \times 4 = 2 \times \overline{3 \times 4} = 2 \times \overline{4 \times 3}$, weil nemlich auch hier die Producte 3×4 und 4×3 gleich sind. An die Stelle aber, daß man durch das letztere Product 4×3 multipliciret, kan man auch durch die Factoren 4, 3 einen nach dem andern multipliciren, I, 95. und es ist $2 \times \overline{4 \times 3} = 2 \times 4 \times 3$, und demnach auch $2 \times 3 \times 4 = 2 \times 4 \times 3$. Fähret man nachhero im Multipliciren fort, so wird $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 4 \times 3 \times 5$. Es kommen also auch einerley Producte aus den Zahlen 2, 3, 4, 5 wenn man die zweyte 3 mit der dritten 4 verwechselt, und hernach in dieser neuen Ordnung multipliciret.

§. 99. Eben so wird auch erwiesen, daß man die dritte Zahl mit der vierten verwechseln könne, ohne das Product zu ändern. Denn wenn man nach Anweisung der Ordnung $2 \times 3 \times 4 \times 5$ die erste Zahl 2 durch die zweyte 3 multipliciret hat, so ist es hernach einerley, ob man das Product 2×3 durch 4, und was hier kommt durch 5 multipliciret, oder ob man das erstere Product $\overline{2 \times 3}$ durch das Product aus den beyden letztern Zahlen $\overline{4 \times 5}$, oder $\overline{5 \times 4}$ multipliciret, und es ist demnach $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 3 \times \overline{4 \times 5} = 2 \times 3 \times \overline{5 \times 4}$. Nun kan man an statt desjenigen, so $2 \times 3 \times \overline{5 \times 4}$ ausdrücket, wieder das Product 2×3 durch 5, und das hieraus entstehende neue Product durch 4 multipliciren, und es ist demnach $2 \times 3 \times \overline{5 \times 4} = 2 \times 3 \times 5 \times 4$, und also auch $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 3 \times 5 \times 4$. Man siehet leicht, daß man in diesem Beweiß fortfahren könne, wie viel auch der Zahlen seyn mögen, durch deren Multiplication ein Product heraus zu bringen ist, und daß man jederzeit jede zwey dieser Zahlen versetzen, und nach dieser neuen Ordnung multipliciren könne, ohne in dem Product etwas zu ändern.

§. 100. Lassen sich aber jede zwey Zahlen verwechseln, ohne daß dadurch in dem Product etwas geändert werde, so kan man sie auch

alle versetzen wie man will, und es kommt einerley heraus, in was Ordnung man die Zahlen, aus welchen ein gewisses Product hervor zu bringen ist, multiplicire. Denn durch die Versetzung zweyer Zahlen, wenn man dieselbe wiederholt, kommt endlich jede Ordnung heraus, welche man nur haben will. Es ist nemlich $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 3 \times 5 \times 4 = 2 \times 5 \times 3 \times 4 = 5 \times 2 \times 3 \times 4 = 5 \times 2 \times 4 \times 3 = 5 \times 4 \times 2 \times 3 = 5 \times 4 \times 3 \times 2$, und man hat die letzte Ordnung der Factoren bloß dadurch heraus gebracht, daß man immer zwey Ziffern in derjenigen, welche unmittelbar vorher gegangen, verwechselt hat.

Fig. 12. §. 101. Es ist noch eine einzige Betrachtung zu machen übrig, ehe wir zur würklichen Ausübung der Multiplication übergehen, welche diese ist. AB und CD sind zwo Zahlen, welche man nehmen kan wie man will, nur müssen ihre Einheiten von einerley Grösse seyn. Man hat sie beyde durch einerley Zahl AE multipliciret, und dadurch sind die in Form der Vierecke, zwischen ABFE und CDGH geschriebene Producte gekommen. Wenn man diese betrachtet, so findet man, daß das Product ABFE aus dem Product CDGH eben so entstehen könne, wie die Zahl AB aus der Zahl CD entstehet. Jedes dieser Producte ABFE, CDGH bestehet aus verschiedenen Zahlen, deren Einheiten in Form der Säulen über einander stehen, dergleichen sind AE, BF, CH, DG. Diese Zahlen sind einander alle gleich. Und es sind derselben in dem Producte ABFE so viele als viele Einheiten in der multiplicirten Zahl AB sind, und in dem Product CDGH sind eben dieser Zahlen als CH, DG so viele, als viele Einheiten die Zahl CD enthält. Und hieraus ist was gesagt worden von den Zahlen, welche die Figur darstellet, gar leicht einzusehen. Denn gleichwie die Zahl AB aus der Zahl CD werden kan, wenn man diese CD in ihre zwo einzelne Einheiten theilet, und dieser Einheiten fünf annimt, eben so wird die Zahl ABFE aus der Zahl CDGH, wenn man diese letztern in zwey Theile von der Grösse der multiplicirenden Zahl CH theilet, und dieser Theile fünfe zusammen setzet.

§. 102. Oder man stelle sich eine Säule als AE, CH als eine Einheit vor, so siehet man, daß gleichwie AB aus fünf Einheiten bestehet, deren zwo die Zahl CD ausmachen, eben so bestehe auch das Product ABFE aus fünf Einheiten von der Grösse AE, deren zwo das Product CDGH ausmachen. Es zweifelt aber niemand, daß fünf Einheiten aus zwo Einheiten immer auf einerley Art entstehen können, von was Grösse auch diese Einheiten seyn mögen. Der

Satz

Satz ist allgemein, und auch in dem Fall richtig, wenn die *** in AB Theile der Einheiten sind, und folgends AB eine gebrochene Zahl bedeutet.

I. Abschnitt.

Nähere Gründe zur Ausübung der Multiplication.

§. 103. Die Ausübung der Multiplication durch ganze Zahlen, erfordert zwar, dem zu folge so wir I, 84. gesehen haben, nichts anders als eine wiederhohlte Addition. Man siehet aber auch leicht ein, daß diese viel zu weitläuffig werden müsse, wenn die multiplicirende Zahl etwas groß ist, und man die Addition so schlechterdings, wie gewiesen worden, anwenden wolte. Doch kan man vermittelst eines leichten Vortheils diese Addition gar sehr in die Enge ziehen, welchen wir zuforderst weisen wollen, weil er sehr geschickt ist, die Gründe der Ausübung dieser Rechnungsart, wie sie gemeiniglich bey etwas grossen Zahlen verrichtet wird, recht deutlich zu zeigen.

§. 104. Es gründet sich diese Sache auf nachfolgenden. Eine Zahl wird zehen mal grösser als sie war, oder sie wird durch Zehne multipliciret, wenn man ihr am Ende ein 0 beyfüget. Denn dadurch werden aus den Einheiten Zehner, aus den Zehnern Hunderte, aus den Hunderten Tausende, und mit einem Wort alle Einheiten aller Ordnungen zehen mal grösser als sie vorher waren: oder alle Theile der Zahl, (denn die Einheiten von verschiedenen Ordnungen sind ihre Theile) werden zehen mal grösser, und also auch die ganze Zahl. Man siehet leicht, daß man aus eben dem Grunde sagen kan, eine Zahl werde hundert mal grösser als sie war, wenn man ihr am Ende zwey 00 beyfüget, tausend mal, wenn man drey 000 ans Ende derselben setzet, und so fort. Also ist 2360 zehen mal so groß als 236, und 23600 ist hundert mal, 236000 aber tausend mal so viel als die Zahl 236.

§. 105. Man kan eben dieses auch anders ausdrücken. Wenn man eine Zahl nimt, in welcher der Ort der einzeln Einheiten, wie gewöhnlich, mit einem (,) bezeichnet ist, und welche hinter diesem Zeichen noch einige andere Ziffern, oder 00 hat, dergleichen die nachstehenden sind:

3573, 29514 ; 2753, 00000

und man setzet das (,) um eine Ziffer weiter nach der rechten zu, dergestalt,

35732, 9514 ; 27530, 0000

so

I. Abschnitt.

so wird die Zahl zehen mal grösser, oder sie wird durch zehen multipliciret, I, 38: setzet man in eben der Zahl das Zeichen (,) noch um eine Ziffer weiter, und also um zwey Ziffern nach der rechten, so wird die Zahl hundert mal grösser und so fort, wie beygeschriebene Zahlen weisen:

a	3573, 29514	;	2753, 00000
b	35732, 9514	;	27530, 0000
c	357329, 514	;	275300, 000
d	3573295, 14	;	2753000, 00
e	35732951, 4	;	27530000, 0

deren erstern bey a, man als einfach ansiehet, die zweyten bey b sind zehen mal, die dritten bey c hundert mal, die vierten bey d tausend mal, endlich die fünften bey e zehen tausend mal so groß als jene.

§. 106. Kehret man aber dieses um, so siehet man, daß eine Zahl zehen mal kleiner zu machen, man nichts nöthig habe, als das Zeichen der einzeln Einheiten um eine Stelle weiter nach der linken Hand zu rücken, und daß, wenn man eine hundert mal kleinere Zahl haben will, man dieses Zeichen noch um eine Stelle, und also in allen um zwo Stellen weiter nach der linken Hand rücken müsse, und so weiter. Die Zahlen welche eben hingesetzt worden, zeigen dieses deutlich. Denn, ist eine jede derselben, zum Exempel, die bey d, welche unmittelbar unter der bey c stehet zehen mal grösser als diese Zahl: so muß nothwendig die obere bey c in welcher das Zeichen der einzeln Einheiten (,) um eine Ziffer weiter nach der linken zu stehet, zehen mal kleiner seyn, als die nachfolgende bey d.

§. 107. Ist nunmehro die Zahl, 2753, 00000, welche eigentlich keine Brüche bey sich hat, sondern eine ganze Zahl ist, durch diese ganze Zahl 4235 zu multipliciren, so setze man vor die 5 Einheiten, die in der multiplicirenden Zahl anzutreffen sind, die zu multiplicirende Zahl einfach fünf mal hin; vor die 3 Zehner, welche in der multiplicirenden Zahl enthalten, setze man die zu multiplicirende Zahl, nachdem man sie zehen mal grösser gemacht, drey mal; vor die zwey hunderte schreibe man sie hundert mal vergrössert, zwey mal, und vor die vier tausende der multiplicirenden Zahl setze man sie endlich tausend mal vergrössert, vier mal, und eben so verfahre man auch mit der Zahl 3573, 29514 welche durch eben die Zahl 4235 zu multipliciren

plicirent ist, und addire sodann die dergestalt untereinander geschriebene Zahlen, folgender gestalt:

F.			
2753,	A	3573,29514	A
2753,	A	3573,29514	A
2753,	A	3573,29514	A
2753,	A	3573,29514	A
2753,	A	3573,29514	A
27530,	B	35732,9514.	B
27530,	B	35732,9514.	B
27530,	B	35732,9514.	B
275300,	C	357329,514..	C
275300,	C	357329,514..	C
2753000,	D	3573295,14...	D
2753000,	D	3573295,14...	D
2753000,	D	3573295,14...	D
2753000,	D	3573295,14...	D
11658955		15132904,91790	

Die Summen werden die Producte seyn, welche man suchte. Denn die Zahlen bey A sind die gegebene zu multiplicirende Zahlen F 5 mal. Alle Zahlen B enthalten eben die Zahlen F. zehen mal genommen, drey mal oder überhaupt dreyssig mal, I, 95. und die Zahlen bey C enthalten eben diese Zahlen F hundert mal genommen, zwey mal, das ist zwey hundert mal, und endlich enthalten die Zahlen bey D eben diese Zahlen F tausend mal genommen, fünf mal, oder fünf tausend mal. Daß also, wenn man alle die Zahlen bey A, B, C, D zusammen setzet, man in der That in die Summe die zu multiplicirende Zahl F 5 mal und 30 mal und 200 mal, und noch 4000 mal bringet, so oft nemlich als in der Zahl 5 + 30 + 200 + 4000 oder 4235 die Einheit enthalten ist: und demnach wird nach der gegebenen Anweisung allerdings die vorliegende Zahl 2753, oder 3573, 29514 durch 4235 multipliciret.

§. 108. Eben diese Rechnungsart hat auch statt, wenn die multiplicirende Zahl zehentheilche Brüche bey sich hat, oder aus blossen zehentheilichen Brüchen bestehet. Es seyen die Zahlen 2753 und 325, 94 zu multipliciren durch 43, 523, so setze ich vor die 3 welche in der multiplicirenden Zahl am Ende stehet und welche ein Tausendtheil bedeu-

 tet,

I. Abschnitt

tet, die zu multiplicirende Zahlen, tausendmal verkleinert, 3 mal; vor die nächst daran stehende 2, setze ich die zu multiplicirende Zahl hundertmal verkleinert 2 mal; vor die darauf folgende 5 schreibe ich sie zehenmal verkleinert, 5 mal, und so fort nach Anweisung des vorigen, wie im nächst stehenden geschehen:

Multiplicirende Zahl . . . . . 43,523 = M

zu multiplicirende Zahlen

2753 = F		. . . . . 325,94 = F	
2,753	A	0,32594	A
2,753		0,32594	
2,753		0,32594	
27,53 .	B	3,2594 .	B
27,53 .		3,2594 .	
275,3 . .	C	32,594 . .	C
275,3 . .		32,594 . .	
275,3 . .		32,594 . .	
275,3 . .		32,594 . .	
275,3 . .		32,594 . .	
2753, . . .	D	325,94 . . .	D
2753, . . .		325,94 . . .	
2753, . . .		325,94 . . .	
2753	E	3259,4	E
2753		3259,4	
2753		3259,4	
2753		3259,4	
119818,819		14185,88662	

Und mache wieder die Summen dieser Zahlen, so sind diese Summen die gesuchten Producte, wie aus eben dergleichen Betrachtungen erhellet, als diejenigen sind, deren wir uns eben bedienet.

§. 109. Nemlich, gleichwie die multiplicirende Zahl 43,523 = M aus der Einheit gemacht wird, wenn man erstlich die Einheit in tausend gleiche Theile theilet, oder tausend mal verkleinert, und solcher Theile 3 annimt, so dann die Einheit hundert mal verkleinert und 2 solcher Theile zu den vorigen setzet, ferner aber eben die Einheit zehen mal verkleinert, und 5 solcher Theile noch zu den vorigen füget, endlich noch 3 ganze Einheiten, und die Einheit zehen mal vergrössert, vier

vier mal hinzu thut: eben so hat man die zu multiplicirende Zahlen F bey A tausend mal verkleinert 3 mal, und bey B hundert mal verkleinert 2 mal, und bey C zehen mal verkleinert 5 mal, und bey D die Zahlen F selbst 3 mal, und endlich eben die F, bey E zehen mal vergrössert, 4 mal gesetzet, I, 104; und indem diese Theile alle zusammen gesetzt worden sind, hat man die Summen heraus gebracht, welche demnach allerdings aus den Zahlen F eben so entstanden sind, wie die multiplicirende Zahl M aus der Einheit entstanden, und also die richtige Producte sind, welche man suchte. I, 80.

I. Abschnitt.

§. 110. Aus diesen erhellet nun, daß die Multiplication auf einerley Art verrichtet werde, von was Ordnung auch die Einheiten seyn mögen, welche in den Zahlen vorkommen, die einander multipliciren. Man siehet leicht, daß das Zeichen der einzeln Einheiten in die Arbeit selbst nicht den geringsten Einfluß hat, man mag es zwischen diese oder jene Ziffer der einander multiplicirenden Zahlen setzen. Die Ziffern des Products werden dadurch nicht geändert, nur komt dieses Zeichen in dem Product an andere und andere Stellen, nachdem es in den Zahlen, deren eine die andere multipliciret, da oder dort stehet.

Die Ordnungen der Einheiten in dem Product zu bestimmen.

§. 111. Diesen Ort aber der einzeln Einheiten und ihres Zeichens in dem Product zu bestimmen, ist gar nicht schwerer, und man kan bloß aus dem letzten Exempel einsehen, wie mit der Sache zu verfahren sey. Die zu multiplicirende Zahl desselben war 325,94, und diejenige durch welche sie solte multipliciret werden, 43,523. Man muste, die Multiplication gehörig zu verrichten, von der erstern, gleich anfangs den tausenden Theil schaffen; dieses geschahe, indem man das Zeichen der einzeln Einheiten um drey Stellen weiter nach der linken zurück brachte, dergestalt 0,32594, wodurch nunmehro hinter das Zeichen der einzeln Einheiten so viele Ziffern mehr kommen, als vorher daselbst gestanden, als viele Ziffern in der multiplicirenden Zahl hinter der Stelle der einzeln Einheiten stehen. Nemlich in der zu multiplicirenden Zahl stunden vorher zwo Ziffern hinter dieser Stelle, und in der multiplicirenden Zahl waren ihrer drey daselbst anzutreffen. In der Zahl aber welche dergestalt heraus gebracht worden ist, sind fünf Ziffern hinter dem Ort der einfachen Einheiten befindlich. Man sieht nach einer kleinen Ueberlegung, daß es immer so gehen müsse, und daß allezeit, indem

 man

I. Abschnitt.

man anfängt, nach gegenwärtiger Anweisung zu multiplicieren, in der ersten Ziffer hinter dem Ort der einzeln Einheiten so viele Ziffern zu stehen kommen werden, als in den beyden Factoren zusammen dergleichen Ziffer anzutreffen sind. So viele Ziffern aber in dieser ersten Zahl hinter dem Zeichen der einzeln Einheiten (,) stehen, so viele stehen auch in dem Product hinter diesen Zeichen, wie bloß aus Betrachtung des Exempels, und aus dem, so von der Addition I, 50. gesagt worden, zu ersehen ist. Und demnach stehen allezeit in dem Product so viele Ziffern hinter dem Ort der einzelnen Einheiten, als viele Ziffern in den beyden Factoren zusammen daselbst anzutreffen sind. Man kan also, so bald die Zahlen, deren eine die andere multiplicieren sol, gegeben sind, wissen, wie viel Ziffern in dem Product hinter das (,) Zeichen der einzelnen Einheiten zu stehen kommen werden, oder, wie hoch oder niedrig die Ordnung der Einheiten seyn werde, die von der letzten Ziffer des Products bedeutet wird.

§. 112. Es ist nemlich die Zahl, welche diese Ordnung angiebet, und anzeiget, ob sie die dritte, vierte, fünfte oder eine noch niedrigere Ordnung sey, die Summe der Zahlen, welche die Ordnungen der Einheiten anzeigen, welche von den letzten Ziffern der Factoren bedeutet werden. Nachstehende kleine Exempel können die Sache noch deutlicher machen, wenn man bey denselben etwas stille stehen und sie überdenken wil. Es sind in denselben die Zahlen 352; 35,2; 3,52; 0,352 erstlich durch 32, so dann durch 3,2, und ferner durch 0,32 multiplicieret worden.

352	35,2	3,52	0,352
352	35,2	3,52	0,352
352	352	35,2	3,52
352	352	35,2	3,52
352	352	35,2	3,52
11264	1126,4	112,64	11,264

35,2	3,52	0,352	0,0352
35,2	3,52	0,352	0,0352
352,	35,2	3,52	0,352
352,	35,2	3,52	0,352
352,	35,2	3,52	0,352
1126,4	112,64	11,264	1,1264

3,52

3,52	0,352	0,0352	0,00352
3,52	0,352	0,0352	0,00352
35,2	3,52	0,352	0,0352
35,2	3,52	0,352	0,0352
35,2	3,52	0,352	0,0352
112,64	11,264	1,1264	0,11264

§. 113. Dieses ist schon eine Erleichterung der Arbeit bey solchen Multiplicationen, bey welchen zehentheilchte Brüche vorkommen. Es ersparet uns das Nachdenken, wie das Zeichen der einzelnen Einheiten (,) zu setzen sey, und man kan, nachdem man dieses weiß, bey allen Multiplicationen, eben so wie bey der Multiplication ganzer Zahlen durch ganze Zahlen, verfahren, ohne sich ehe um den Ort dieses Zeichens zu bekümmern, als bis man das Product fertig hat, da es denn leicht gehörig zu setzen, und dadurch die Ordnung der Einheit, welche von jeder Ziffer des Products bedeutet wird, zu bestimmen ist. Die übrige Erleichterung fliesset aus nachfolgenden.

Die Multiplication am bequemsten zu verrichten.

§. 114. Wenn man eins von den vorigen Exempeln, oder auch das nachstehende vor sich leget, in welchem 357 2 multipliciret ist durch 432

```
   357 2 }
   357 2 }  A  =     7144
                     ....
  3572 .   }         ....
  3572 .   }  B  =  10716.
  3572 .   }        .......
                    ......
 3572 . .  }        ......
 3572 . .  }        .......
 3572 . .  }  C  = 14288..
 3572 . .  }
 1543 104     =    1543104
```

so siehet man leicht, daß man die Addition, welche bey der gegenwärtigen Art zu multipliciren, erfordert wird, auch also verrichten könne, daß man erstlich die Zahlen bey A zusammen setze, hernach die bey B, ferner die bey C, und nachdem man dergestalt die Summen A, B, C

I. Abschnitt.

gefunden, dieselbe in eine einzige Summe zusammen ziehe, welche das gesuchte Product seyn wird. Diese Addition der Zahlen bey A, B und C ist leichte: denn die Ziffern, welche zusammen zu setzen sind, sind von einerley Grösse. Aber man kan sie noch mehr erleichtern, wenn man sich bekannt machet, was die einzeln Zahlen bis auf 9, wenn sie zwey, drey, vier bis neun mal zusammen gesetzet, oder welches auf eben das hinaus komt, wenn sie durch 2, 3, 4 bis 9 multipliciret werden, vor Summen oder Producte geben. Denn man siehet, daß die erste Summe der Zahlen bey A heraus gebracht werde, wenn man jede Ziffer, der bey A vorkommenden Zahlen, zwey mal nimt, oder sie durch die letzte Ziffer der multiplicirenden Zahl multipliciret. Eben so komt jede Ziffer der Summe bey B, wenn man jede Ziffer der Zahlen bey B dreymal nimt, oder wenn man sie durch die zweyte Ziffer von der letzten in der multiplicirenden Zahl, multipliciret; und jede Ziffer der Summe bey C, wenn man jede Ziffer der Zahlen bey eben dem C durch viere multipliciret, welches die dritte Ziffer von der letzten, in der multiplicirenden Zahl ist. Es sind aber, wie vielleicht überflüssig ist zu erinnern, die Ziffern bey A, B, C allzeit einerley, und bloß darin verschieden, daß sie Einheiten von verschiedenen Ordnungen bedeuten. Sie sind eben die Ziffern, welche die zu multiplicirende Zahl ausmachen.

§. 115. Demnach kan man nunmehro, ohne der Weitläuftigkeit der Addition, mit der Multiplication folgender gestalt verfahren: Man schreibet die zu multiplicirende Zahl, und die multiplicirende dergestalt darunter, daß die letzten Ziffern derselben gerade untereinander stehen, ohne sich um die Ordnung der Einheiten, die in diesen Ziffern gezehlet werden, zu bekümmern, ob sie, nemlich einerley oder verschieden sey; nachhero multipliciret man alle Ziffern der obern Zahl durch alle Ziffern der untern, und schreibt die Producte welche heraus gebracht werden dergestalt, daß man jedes Product unter derjenigen Ziffer der multiplicirenden Zahl zu schreiben anfängt, durch welche man die zu multiplicirende Zahl würklich multipliciret hat, um dieses Product heraus zu bringen. Hat man mit allen Ziffern der multiplicirenden Zahl dergestalt verfahren, so addire man alle diese Producte zusammen, die Summe ist das gesuchte Product. Man fängt auch hier von den Ziffern an, welche die kleinsten Einheiten bedeuten, und die Ursache davon ist theils bey der Addition gegeben, theils eine blosse Gewohnheit, welche eine Uebereinstimmung im Rechnen zum Grunde hat.

§. 116. Es sey zum Exempel eben die Zahl 3572 welche wir letztens durch 432 multiplicirt haben, durch eben die Zahl nach diesem kürzern Weg zu multipliciren, so stehet die Rechnung folgender gestalt: I. Abschnitt.

```
      3572
       432
   -------
A.    7144
B.  107160
C. 1428800
   -------
   1543104
```

Man halte diese Rechnungsart mit der letzten zusammen, oder verrichte sie lieber selbst beyde zugleich mit einerley Exempel, so wird man gar leicht einsehen, daß sie im Grund einerley sind, und man wird also an der Richtigkeit desjenigen, so wir eben gewiesen, nicht zweifeln können, nachdem man die Richtigkeit von jenem eingesehen. Man wird aber auch finden, daß einerley Product heraus gebracht worden wäre, wenn man mit der ersten Ziffer der multiplicirenden Zahl 4 den Anfang gemacht, und also die Zahl bey C zuerst gesetzt hätte, so dann aber zu der zweyten Ziffer 3 der multiplicirenden Zahl, und folgends zur dritten 2 übergangen wäre. B hätte in diesem Fall die zweyte, und A die dritte Stelle unter den Zahlen welche zu addiren sind, bekommen, und das wäre die ganze Veränderung, welche, wie man leicht sieht, in die Summe nicht den geringsten Einfluß haben kan. Daß man diese Ordnung gemeiniglich nicht beobachtet, ist dasjenige, so wir der Gewohnheit zugeschrieben. Man kan demnach, so oft diese letztere oder eine andere Ordnung im Multipliciren erwehlen, als man Bequemlichkeit davon hat. Nur muß man sich in Acht nehmen, daß die kleinern Producte, dergleichen die bey A, B und C sind, gehörig unter einander geschrieben, und die Ordnungen der Einheiten nicht verwirret werden.

Die Producte der Zahlen, welche nur mit einer Ziffer geschrieben werden, zu finden.

§. 117. Die Producte nun welche kommen, wenn eine jede der Zahlen von 1 bis 9 durch eine andere Zahl, welche ebenfals die 9 nicht übersteiget, multipliciret wird, und welche bey der Multiplication bekannt seyn müssen, wenn diese leicht verrichtet werden sol, findet man nachfolgender massen. Man schreibe diese Zahlen vor sich, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Wir

I. Abschnitt.

Wil man wissen wie viel jede derselben zwey mal genommen ausmachet, so addire man sie zu sich selbst, und mache auf die Art eine neue Reihe, welche diese Producte enthalten wird,

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Und da jede Ziffer in dieser Reihe diejenige, welche in der ersten Reihe gerade über derselben stehet, zwey mal in sich hält, so folget, daß wenn man diese über einander stehende Ziffer dieser zwo Reihen wieder zusammen setzet, neun Zahlen kommen müssen, welche die erstern drey mal genommen enthalten. Diese sind

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Wenn man zu diesen Zahlen wieder die Zahlen der ersten Reihe setzet, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, bekomt man die Producte derselben Zahlen durch viere, welche sind,

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36.

Und eben so machet man alle übrige Producte, welche man in eine Tafel verfassen, und diese so lang vor sich legen kan, bis man sie in dem Gedächtniß eingepräget. Diese Tafel hat folgende Gestalt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

§. 118. Der Gebrauch dieser Tafel erhellet aus dem gesagten gar deutlich. Ich wil, zum Beyspiel wissen wie viel 6 mal 7 beträgt. Weil in der sechsten Reihe von welcher die erste Zahl 6 ist, die Producte jeder Zahl der ersten Reihe durch 6 multipliciret, enthalten sind, so sehe ich, daß das gesuchte Product in dieser Reihe stehen müsse. Es ist aber auch gerade unter der 7 der obersten Reihe, denn man hat alle Producte dieser Ziffer 7 gerade unter dieselbe gesetzt. Und demnach kan das gesuchte Product nirgends anders als in der sechsten Reihe, gera-

gerade unter der 7 stehen, und ist demnach 42. Man hätte auch 6 in der obersten Reihe annehmen, und gerade bis an die siebende Reihe herunter fahren können, um eben dieses Product 42 zu finden. Und so hat man überhaupt den einen Factor in der obersten Reihe anzunehmen, und von demselben so lang gerade unter sich zu gehen, bis man an diejenige Reihe der Zahlen kommt, zu deren Anfang der andere Factor stehet, so ist man an den gesuchten Product. Wie viel ist 8×6? Ich nehme 8 oben und gehe herunter bis an die sechste Reihe, deren erstes Ziffer 6 ist, so finde ich das gesuchte Product 48. Oder ich nehme 6 oben und gehe gerade herunter, bis an die Reihe, bey deren Anfang 8 stehet, so finde ich eben das Product.

I. Abschnitt.

Bestimmung der Ordnung der Einheiten des Products.

§. 119. Ob zwar diese Tafel dem Ansehen nach bloß auf die einfachen Einheiten gerichtet ist, so kan man doch aus derselben auch die Producte nehmen, welche heraus kommen, wenn man eine jede Zahl der Einheiten, von welcher der höhern Ordnungen sie auch seyn mögen, welche nicht über neune ist, durch eine andere dergleichen Zahl einheiten von eben der oder einer jeden andern Ordnung, multipliciret. Die Sache ist leicht, und fliesset aus dem vorhergehenden, I, 104. doch kan es nicht schaden, wenn wir sie auch von einer andern Seite vorstellen. 2 mal 3 ist 6, und demnach ist 2 mal 30 nothwendig 60, denn der eine Factor ist zehen mal grösser als vorher, und also auch das Product. Eben so gibt 2 mal 300 das Product 600, und $2 \times 3000 = 6000$. Setzet man die Factore 2 und 30 noch mal, von welchen das Product 60 war, und nimt denn an statt des ersten 20, so wird das Product 600, denn der eine Factor ist wieder zehen mal grösser geworden, als er vorher war, und aus eben dem Grund ist klar, daß 200 durch 30 multipliciret 6000 geben müsse, und daß überhaupt vor eine jede 0 welche zu einer einzeln Ziffer des einen oder des andern Factors hinzugesetzt wird, in das Product ebenfals eine 0 komme. Daß demnach die 00 in einem dergleichen Product an der Zahl so viele sind, als viele deren in beyden Factoren zusammen angetroffen werden, und man bey der Multiplication aller solcher Zahlen als 6000×300 nichts nöthig hat, als erstlich die Ziffern zu multipliciren $6 \times 3 = 18$ und diesem Product so dann so viele 000 zu zusetzen, als deren in beyden Factoren vorkommen: welchemnach das Pro-

 duct

I. Abschnitt.

duct aus 6000 × 300 seyn wird 1800000. Und also entsteht die Zahl, welche anzeigt, von welcher der höhern Ordnungen die Einheiten des Products sind, jederzeit, indem man die Zahlen, welche die Ordnung der Einheiten derer Factoren anzeigen, zusammen addiret. Denn die Zahl, welche die Ordnung angiebt, ist allzeit der Zahl der 00 gleich, welche hinten angehängt werden müssen, damit die vorstehende Ziffern Einheiten von dieser Ordnung ausdrücken I, 28. Die Zahl aber der 00 in dem Product ist wiederum so groß als die Zahl aller 00 in beyden Factoren. Als in unserm Exempel, da die Einheiten der 6 in der Zahl 6000 von der dritten Ordnung sind, und die Einheiten der 3 in 300 von der zweyten, so sind die Einheiten von 18 in dem Product 1800000 von der fünften höhern Ordnung.

§. 120. Wir haben oben I, 112. ausführlich gezeiget, daß eben dieses auch zutreffe, wenn in einer oder beyden der einander multiplicirenden Zahlen Einheiten von einer der niedrigern Ordnungen gezehlet werden, und ist also dasjenige, so von der Ordnung der Einheiten in den Producten gesagt worden ist, allgemein. Hieraus schliesset man in der Anwendung leicht, von was Ordnung die Einheiten des Products seyn werden, wenn in einem der Factoren dieselben von einer der höhern, in dem andern aber von einer der niedrigern Ordnung sind. Denn gesetzt, es sey 3000 zu multipliciren durch 0, 2 so ist das Product, wie bereits gesehen 600,0 = 600, und wenn 3000 durch 0, 02 multipliciret wird, so ist das Product 60, 00 = 60, und wenn man eben die 3000 durch 0, 002 multipliciret, so bekomt man 6,000 = 6. In diesen Fällen war die Ordnung der höhern Einheiten in dem Factor 3000, die dritte, und in dem andern Factor war die Ordnung der niedrigern Einheiten, die erste in 0, 2, die zweyte in 0, 02, die dritte in 0, 003, und in den Producten kamen allezeit Einheiten von einer der höhern Ordnung, welche durch die Zahl angezeiget wird, die übrig bleibet, wenn man die Zahl, welche die Ordnung der niedrigern Einheiten des einen Factors angiebt, von der Zahl abziehet, durch welche die Ordnung der höhern Einheiten des andern Factors ausgedruckt wird. Und also bekommt man jederzeit die Ordnung der Einheiten des Products, wenn die Zahl, welche die Einheiten der höhern Ordnung anzeigt, die in einem der Factoren vorkommen, grösser oder doch nicht kleiner ist, als die Zahl, welche die niedrigern Ordnung der Einheiten des andern Factors angiebt.

§. 121. Be-

§. 121. Behält man aber noch den Factor 3000 und fähret fort die Ordnung der Einheiten des andern Factors zu vermindern, und setzet erstlich, derselbe sey 0,0002, so wird das Product, wie bekannt ist 0, 6000 = 0, 6, und wenn man ferner vor dem zweyten Factor 0,00002 annimt, so wird das Product 0, 06000 = 0, 06, und das Product welches entstehet, wenn der zweyte Factor 0,000002 ist, wird 0,006000 = 0, 006. Denn man muß wie I, 111. gewiesen worden, jedes mal die Zahl 3000 durch 2 multipliciren, und von dem Product so viele Ziffern vermittelst des (,) Zeichens der einfachen Einheiten abschneiden, als viele deren in den beyden Factoren zusammen hinter diesen Zeichen stehen. Hieraus aber folget diese Regel, daß wenn die Zahl, welche die Ordnung der niedrigen Einheiten des einen Factors anzeiget, grösser ist, als die Zahl, welche die Ordnung der höhern Einheiten in dem andern Factor anzeiget, in dem Product Einheiten von derjenigen niedrigern Ordnung kommen werden, welche durch die Zahl ausgedrücket wird, die übrig bleibt, wenn man die Zahl, welche die Ordnung der höhern Einheiten des einen Factors anzeiget, von der Zahl abziehet, welche die Ordnung der niedrigern Einheiten in dem andern Factor angiebt. Es ist gut wenn man diese Regeln weiß, doch ist es nicht schlechterdings nothwendig.

Fernere Erläuterung der Ausübung der Multiplication.

§. 122. Bey derjenigen Einsicht, welche wir bis anhero beyzubringen bemühet gewesen sind, kan nun wohl kein Exempel der Multiplication mit ganzen Zahlen oder zehentheilchen Brüchen vorkommen, welches man nicht mit gewissem Grund berechnen könnte. Es sey 4387 durch 6 zu multipliciren, so wird die Rechnung folgender gestalt zu verrichten seyn:

$$\begin{array}{r} 4387 \\ 6 \\ \hline 26322 \end{array}$$

Das Product ist 26322, und man kan dieses nicht allein einsehen, wenn man die Multiplication als eine wiederhohlte Addition der Zahl 4387 betrachtet, sondern auch wenn man erweget, daß man alle Theile der Zahl 4387 nemlich 4000 + 300 + 80 + 7 durch 6 multipliciret, und auf diese Art das Product heraus gebracht habe, und sich erinnert, daß die Multiplication aller Theile einer Zahl, und die

I. Abschnitt.

Multiplication der ganzen Zahlen einerley sey. I, 91. Demnach wird man auch diese Exempel ohne Schwierigkeit übersehen:

438700	438700	43,87	4387
6	60	6	0,6
2632200	26322000	263,22	2632,2

43,87	0,4387	438700	438700
0,6	0,6	0,06	0,006
26,322	0,26322	26322,00	2632,200

und sich dadurch je mehr und mehr überzeugen, daß man überall erstlich bloß die Zahlen zu multipliciren habe, welche durch die Ziffern ausgedrücket werden, die in den Factoren vorkommen, und so dann in dem Product die Ordnung der Einheiten, welche durch dessen Ziffer bedeutet worden, nach den gegebenen Reguln leicht bestimmen könne.

§. 123. Eben so ist es auch, wenn die Zahl 48723 durch 647 multipliciret werden soll. Die Rechnung stehet also:

	48723
	647
A	341061
B	194892·
C	292338··
E	31523781

Die Zahl bey A ist das Product aus der zu multiplicirenden Zahl 48723, und der 7, oder es ist $A = 48723 \times 7$. Die Zahl bey B, welche dergestalt geschrieben ist, daß ihre letzte Ziffer Zehne bedeutet, ist das Product aus 48723 und 40, oder $B = 48723 \times 40$, und die bey C endlich, deren letzte Ziffer Hunderte bedeutet, ist das Product aus 48723 durch 600, oder $C = 48723 \times 600$, welches alles man einsiehet, wenn man darauf Acht hat, wie diese Zahlen A, B, C heraus gebracht worden, I, 122. und demnach ist die Summe aller dieser Zahlen $A + B + C$, das ist, die Zahl $E = 48723 \times 7 + 48723 \times 40 + 48723 \times 600$. Setzet man die Zahlen $7 + 40 + 600$ zusammen, und multipliciret die Summe derselben 647 durch die Zahl 48723 durch welche diese Zahlen einzeln multipliciret worden sind, so bekommt man eben das Product, I, 91; also ist auch $E = 48723 \times 647$, welches eben das Product ist, welches zu machen war.

§. 124. Und nunmehro wird man auch bey nachstehenden Exempeln keine Schwierigkeit finden:

I. Abschnitt.

```
 4872300        48,723
    6470          6,47
 341061         341061
194892 ·       194892
292338 · ·    292338
3152378 1000  315,23781

     48723000
         6,47
      341061
     194892
    292338
   315237810,00
```

und leicht einsehen, daß alles vollkommen nach einerley Gesetzen gemacht werde.

Begriffe zur Division.

§. 125. Die nächste Rechnungsart ist die Division, welche eine besondere Verwandschaft mit der Multiplication hat, und ihre Grundsätze von jener borget. Denn gleichwie man bey der Multiplication das Product aus der zu multiplicirenden Zahl dergestalt machet, wie die multiplicirende Zahl aus der Einheit entstehet; also heisst dividiren im allgemeinen Verstand, aus einer vorgegebenen Zahl eine andere dergestalt machen, wie aus einer andern ebenfals gegebenen Zahl die Einheit entstehet. Zum Exempel, aus der 3 wird die Einheit, wenn man sie in drey gleiche Theile theilet. Theile ich demnach auch 12 in drey gleiche Theile, deren eins 4 ist, so ist 4 aus den 12 eben so entstanden, als wie aus der 3 die Einheit werden kan, und demnach ist 12 durch 3 dividiret.

§. 126. Dieses ist eine wahrhafte und eigentliche Theilung: und eine dergleichen Theilung geschiehet allezeit, wenn die Zahl, durch welche eine andere dividiret werden soll, als hier die 3, eine ganze Zahl ist. Aus einer ganzen Zahl kan die Einheit nicht anders werden, als indem man die Zahl theilet, weil jede ganze Zahl grösser ist

I. Abschnitt.

als die Einheit. Wenn man demnach aus einer Zahl, was sie vor eine seyn mag, 12 oder $\frac{1}{2}$ eine neue eben so machen will, wie aus einer andern ganzen Zahl, als 3, die Einheit entspringet, so muß man diese Zahl 12 oder $\frac{1}{2}$ nothwendig theilen.

§. 127. Setzet man aber, daß die Zahl 12 durch $\frac{1}{2}$ dividiret werden soll, so soll nach dem gegebenen Begrif aus der 12 eine neue Zahl eben so gemacht werden, wie aus $\frac{1}{2}$ die 1 wird. Nun ist 1 mehr als $\frac{1}{2}$, und die Einheit entstehet, indem man zwey Helften oder $\frac{1}{2}$ gedoppelt nimt, also wird auch die gesuchte Zahl gedoppelt so viel werden müssen, als 12 ist, und demnach heraus kommen, wenn man 12 durch 2 multipliciret, und 24 seyn. Also ist dasjenige, so eine Division genennet wird, eigentlich eine Vervielfältigung, wenn die Zahl, durch welche eine andere dividiret werden soll, ein ächter Bruch, und dessen Zehler 1 ist. Denn da ein dergleichen Bruch kleiner ist als die Einheit, und die Einheit aus demselben nicht anders entstehen kan, als indem man ihn etliche mal nimt, so wird auch die Zahl, welche man durch die Division suchet, aus der Zahl welche man dividiren soll, hier nicht anders werden können, als indem man jene etliche mal zu sich selbst setzet. Ist der Zehler eines ächten Bruchs, durch welchen man dividiren soll nicht 1, so wird zwar auch die Zahl, welche durch die Division heraus kommt, grösser als diejenige, welman dividiret hat: es ist aber die Division in diesem Fall keine eigentliche Vervielfältigung.

§. 128. Es ist also die Division etwas gar sehr verschiedenes, nachdem man entweder mit einer ganzen oder mit einer gebrochenen Zahl dividiret, eben wie die Multiplication durch eine ganze Zahl ganz was anders ist, als die Multiplication mit einem Bruch. I, 82. Doch wird überhaupt die Zahl, welche dividiret werden soll, die zu dividirende Zahl, diejenige durch welche man dividiren soll, der Theiler, und die Zahl, welche durch die Division kommt, der Quotiente genennet, ob sich zwar diese Wörter nicht allezeit so genau schicken.

§. 129. Wir haben wieder zuerst diejenige Division zu betrachten, bey welcher der Theiler eine ganze Zahl ist. Es mag nun die zu dividirende Zahl ganz oder gebrochen seyn, denn dieses macht in der Division keine hauptsächliche Verschiedenheit. Wir könten, wie bereits erwehnet worden, die Gründe hievon aus demjenigen herleiten, so bey der Multiplication gesagt worden ist: Doch wollen wir grösserer

Deut-

Deutlichkeit halben von forne anfangen, und uns des gesagten nicht weiter bedienen, als es unumgänglich nothwendig seyn wird.

I. Abschnitt.

Gründe der Division.

§. 130. Es sey die Zahl AB durch den Theiler CD zu dividiren, die Einheiten der erstern dieser Zahlen können nach Belieben genommen werden, und sie können auch Theilchen einer ganzen Einheit seyn. Die Einheiten der Zahl CD aber stellen wir uns hier als ganze Einheiten vor. Man setze zwischen EF so viele Einheiten der Zahl AB, als viele Einheiten in CD enthalten sind, und wiederhohle dieses so oft, bis die ganze Zahl AB in Form des Vierecks EFGH geschrieben worden, wenn anders dieses geschehen kan, wie es denn würklich bey der angenommenen Zahl AB geschiehet; so ist der Quotiente die Zahl der Reihen von der Grösse EF, welche in EFGH anzutreffen sind, oder die Zahl der Einheiten, welche die Säule EH ausmachen. Der Augenschein giebt es, daß aus der zu dividirenden Zahl AB, das ist aus der in Form eines Vierecks geschriebenen Zahl EFGH der angegebene Quotiente EH auf eben die Art entstehe, wie aus dem Theiler CD, welcher darüber stehet, die Einheit entstehet. I. 125

F. 5.

§. 131. Es erhellet aber auch aus eben der Vorstellung, daß die Einheiten der zu dividirenden Zahl AB und des Quotienten EH von einerley Art seyn, die Einheiten aber des Theilers CD von jenen verschieden seyn mögen, wie sie wollen: daß einerley Quotiente durch die Division eben der Zahl heraus komme, man mag die Einheiten des Theilers verändern wie man will: und daß demnach gar nicht nöthig sey darauf Acht zu haben, aus was vor Einheiten der Theiler bestehe. Wie man denn auch nicht zu sagen pflegt, man soll 12 Pferde, zum Exempel, durch 4 Ellen dividiren, sondern nur angiebt 12 Pferde durch 4 zu dividiren, ob zwar der Begrif der Division es allerdings leidet, daß man sage, man dividire 12 Pferde durch 4 Ellen, oder etwas dergleichen. Denn dieses will nichts anders sagen, als man bringe aus 12 Pferden eine andere Zahl von Pferden auf eben die Art heraus, nach welcher aus 4 Ellen 1 Elle wird.

§. 132. Ist aber dem also, daß die Einheiten des Quotienten mit den Einheiten der zu dividirenden Zahl immer einerley seyn, und es sind die Einheiten der zu dividirenden Zahl gewisse Theile des Ganzen, so werden in dem Quotienten eben dergleichen Theile der ganzen Einheit gezehlet, und wenn demnach in dem gegebenen Exempel jedes (*)

ein

I. Abschnitt.

ein dreyßigstes Theil des Ganzen, und folgends die zu dividirende Zahl $\frac{12}{30}$ zu seyn gesetzet wird, so ist der Quotiente $\frac{3}{30}$, und wird gefunden, wenn man nur den Zehler des Bruchs durch den gegebenen Theiler 4 dividiret, den Nenner 30 aber stehen läst.

§. 133. Solte aber, indem man nach der angewiesenen Art dividiren will, die zu dividirende Zahl das Viereck, dergleichen EFGH in der 13 Figur ist, nicht vollmachen, wie zum öftern geschiehet, so wird man folgendergestalt verfahren müssen. Es sey die Zahl AB = 14 durch CD = 4 zu dividiren, so setze man EFIK wieder wie vorher; weil aber auf die Art zwo Einheiten ** übrig bleiben, welche keine volle Reihe ausmachen können, so theile man eine jede dieser Einheiten in so viele gleiche Theile, als viele Einheiten in dem Theiler CD sind, und nehme folgends hier $\frac{1}{4}$, welches wir in der Figur durch das Zeichen (,) andeuten, so wird man noch andere zwo Reihen aussetzen können. Denn weil eine jede Einheit der zu dividirenden Zahl vier Viertheil giebt, so wird vor jede der übergebliebenen Einheiten eben eine ganze Reihe von Viertheilen kommen, und demnach ein Viereck EFGH wie vorhin können vollgemacht werden. Der Quotiente ist hier wieder eine Säule von über einander gesetzten Einheiten EK und Theilen derselben KH. Denn auch hier entstehet die ganze ins Viereck geschriebene Zahl EFGH, das ist, die zu dividirende Zahl AB, aus einer solchen Säule EH eben so, wie der darüber geschriebene Theiler CD aus seiner Einheit entstehet, I, 125. und ist demnach der Quotiente in dem vorliegenden Exempel $3\frac{2}{4}$.

F. 14.

§. 134. Und hieraus erhellet, daß bey dergleichen Zahlen der Quotiente aus einer ganzen und aus einer gebrochenen Zahl bestehe; daß die ganze Zahl (3) diejenige sey, welche durch die Theiler (4) multipliciret ein Product 12 giebt, so unmittelbar kleiner ist als die Zahl, welche man dividiret hat, (14,) oder, welches Product von der gedachten Zahl (14) abgezogen, einen Unterschied giebt, welcher kleiner ist als der Theiler; der Bruch aber formiret werde, wenn man den Theiler 4 zum Nenner setzet, und zum Zehler den Ueberschuß der Zahl, welche dividiret worden, 14 über das gedachte Factum 12, welcher Ueberschuß hier 2 ist. Und auch dieses ist richtig, man mag die Einheiten der zu dividirenden Zahl nehmen wie man will.

§. 135. Nach eben diesen Begriffen muß auch dividiret werden, wenn die zu dividirende Zahl kleiner ist, als der Theiler. Es sey AB = 3 zu dividiren durch den Theiler CD = 5, so theile man jede

F. 15.

Ein-

Einheit der Zahl AB in 5 gleiche Theile, nemlich wieder in so viele, als viele Einheiten der Theiler CD enthält. Ein solcher Theil sey (,), so dann setze man auch hier diese Theile wie oben in Form eines Vierecks EFGH. Alle 3 Einheiten der zu dividirenden Zahl enthalten derselben Theile zusammen 3 mal fünfe, und demnach werden alle Reihen gewiß voll, wie in der Figur zwischen EFGH zu sehen ist. Demnach ist auch hier der Quotiente eine Säule der über einander gesetzten Theile, (,) als EH = $\frac{3}{5}$, das ist, der Quotiente ist ein Bruch, dessen Zehler ist die zu dividirende Zahl 3, und der Nenner, der Theiler 5. Denn so viele Einheiten in dem Zehler 3 sind, so viele sind der Reihen in EFGH, und so viele (,) stehen in einer Säule EH über einander.

I. Abschnitt.

§. 136. Man siehet leicht, daß was eben gesagt worden ist, nicht auf die Zahlen, welche kleiner sind als ihre Theiler, allein zu ziehen sey. Man kan diese Art der Division, wenn man will, auch mit Zahlen vornehmen, welche nach der erstern Art, I, 130. 133, können dividiret werden, und deren Quotienten entweder ganze oder doch zum Theil ganze Zahlen sind. Es sey AB = 4 durch CD = 3 zu dividiren. Man theile jede der Einheiten der Zahl AB in drey gleiche Theile, und mache also aus denselben Drittel, so kan man diese Zahl in Form eines Vierecks bringen EFGH, wie oben, und der Quotient ist hier EH = $\frac{4}{3}$, und entstehet also, indem man die zu dividirende Zahl 4 zum Zehler, und den Theiler 3 zum Nenner des Bruchs stellet. Es wird aber hier der Bruch unächt.

F. 16

§. 137. Man siehet aus diesen allen, was auch aus den gemeinsten Begriffen bekannt genug ist, daß eine vorgegebene Zahl durch Zwey dividiren nichts anders heisse, als ihre Helfte machen, daß sie durch 3 dividiren so viel sey, als ihren dritten Theil darstellen, und so ferner, und daß, wenn man den durch die Division heraus gebrachten Quotienten EH durch die Zahl CD multipliciret, durch welche man dividiret hatte, hinwiederum die Zahl EFGH oder AB kommen müsse, welche man dividiret hatte. Die Figuren zeigen dieses ohne vieles Nachsinnen, es ist aber auch vor sich klar, daß wenn man die Helfte eines Dinges gedoppelt, oder den dritten Theil desselben dreymal nimt, dieses Ding wieder heraus kommen müsse.

§. 138. Da nun also der Quotiente, wenn man ihn durch den Theiler multipliciret, die dividirte Zahl wieder heraus bringt, so kan

I. Abschnitt.

man die zu dividirende Zahl sich als ein Product vorstellen, welches durch die Multiplication des Quotienten durch den Theiler entstanden: und nach diesem Begrif ist die Division eine Rechnungsart, vermittelst welcher man aus einem Product, bey welchem der eine Factor gegeben ist, den andern Factor findet.

§. 139. Wenn man einerley Zahl durch einerley Theiler dividiret, so können die Quotienten nicht verschieden seyn, denn eine Zahl kan nicht verschiedene Helften, Drittel, Vierthel, und so weiter haben, deren eines nemlich grösser wäre als das andere. Und wenn man demnach eine Zahl 7 durch 3, nach den zwey verschiedenen Wegen I, 133. 135, dividiret, und dadurch die Quotienten $2\frac{1}{3}$, und $\frac{7}{3}$ heraus bringt, oder wenn man sich auch noch anderer, aus beyden vorigen zusammen gesetzter, Arten zu dividiren bedienet, so müssen diese und dergleichen Quotienten einerley bedeuten.

§. 140. Und hieraus folgt, daß man einen unächten Bruch $\frac{12}{4}$ entweder ganz oder zum Theil durch eine ganze Zahl ausdrücken könne, wenn man den Zehler durch den Nenner dividiret. Denn ein solcher Bruch kan als der Quotiente einer Division angesehen werden, in welcher der Zehler durch den Nenner dividiret worden ist. Findet man nun diesen Quotienten auch durch eine andere Division, welche ganze Zahlen bringt, so muß derselbe nothwendig mit dem gegebenen Bruch gleiches Werths seyn. Also ist $\frac{12}{4}$ so viel als 3, und aus eben dem Grund ist $\frac{14}{3}$ so viel als $4\frac{2}{3}$, und so in allen übrigen Fällen.

§. 141. Was nun insbesondere die gebrochene Zahlen anlangt, welche durch ganze Zahlen getheilet werden sollen, so kan man sich bey denselben derjenigen Anweisung bedienen, welche oben gegeben worden ist, und den Zehler des zu dividirenden Bruchs, 12 zum Exempel, in den Bruch $\frac{12}{17}$, durch die dividirende Zahl 3 dividiren, so oft dieses ohne Brüche geschehen kan. Der Quotiente ist, wie I, 132. gewiesen worden $\frac{4}{17}$. Und da jede gebrochene Zahl als der Quotiente anzusehen ist, welcher kommt, wenn man den Zehler desselben durch den Nenner dividiret, und jeder Quotiente durch einen solchen Bruch ausgedrückt werden kan, I, 136. so folget hieraus, daß wenn man die Zahl, welche dividiret werden soll, zwey, drey, zehen, hundert oder mehr mal grösser oder kleiner macht, den Theiler aber läst wie er ist, auch der Quotiente, welcher aus der Division, der also vermehrten oder verminderten Zahl, durch den unveränderten Theiler, kommt,

eben

eben so vermehret oder vermindert werde, wie die zu dividirende Zahl vermehret oder vermindert worden, und ebenfals zwey, drey, zehen hundert oder mehr mal grösser oder kleiner werde, als derjenige Quotient war, welcher aus der Division der einfachen Zahl durch eben den Theiler entsprungen ist.

I. Abschnitt.

§. 142. Solte aber durch die Division des Zehlers durch den Theiler, welchen wir nunmehro 5 zu seyn setzen, wieder ein Bruch $2\frac{2}{3}$ kommen, und folgends der Quotiente werden $\frac{2\frac{2}{3}}{17}$; so thut man besser, daß man sich der andern Art zu dividiren I, 135, bedienet, und eine jede Einheit des Nenners, das ist, ein jedes der Theilchen, die den Bruch ausmachen, wieder in so viele gleiche Theile theilet, als viele Einheiten in dem Theiler sind, und im übrigen so verfähret, wie wir gewiesen haben. Denn dergleichen Brüche, als $\frac{2\frac{2}{3}}{17}$, deren Zehler ebenfals Brüche sind, lassen sich etwas schwerer übersehen als andere. Der gegenwärtige will, man soll das Ganze in 17 gleiche Theile theilen, und solcher Theile 2 und noch $\frac{2}{3}$ eines Theils annehmen, um den Werth des Bruchs zu erhalten. Eine dergestalt wiederhohlte Theilung der Theile kan man sich nicht ohne einige Mühe vorstellen, welcher man überhoben bleibt, wenn das Ganze ein vor allemal getheilet wird.

§. 143. Stellet man sich nun vor, daß jede Einheit der Zahl AB, welche durch CD zu dividiren ist, einen Theil der ganzen Einheit IK bedeute, welche vermittelst L, M, N, O in fünf gleiche Theile getheilet ist, und daß folgends AB $\frac{4}{5}$ der ganzen IK, und folgends das Stück IO, ausdrücke, so wird nach der gegebenen Anweisung, jede Einheit der Zahl AB, das ist, jeder Theil IL, LM und so weiter, wieder in so viele Theile zu zertheilen seyn, als viele Einheiten der Theiler CD in sich hält, und folgends in gegenwärtigem Exempel in dreye, und der Quotient EH wird vier dergleichen Theile betragen, nemlich so viele, als viele Einheiten in der Zahl der Theile AB enthalten sind. Indem jedes der Theilchen IL in drey getheilet wird, werden derselben in der ganzen IK drey mal mehr. Und es erfordert also die Division eines Bruchs $\frac{4}{5}$ durch die ganze Zahl 3 nichts anders, als daß man den Nenner desselben 5 durch diejenige Zahl multiplicire, durch welche der Bruch dividiret werden soll, und den Zehler lasse wie er ist. Der Quotiente ist der Bruch, welcher aus

F. 17

 dem

I. Abschnitt. dem vorigen Zehler, und den dergestalt herausgebrachten neuen Nenner gemacht wird, und folgends in unserm Fall $\frac{4}{15}$.

§. 144. Die Sache ist auch vor sich klar. Wenn man in dem Bruch IO = $\frac{4}{5}$ die Zahl der Theile, in welche das ganze IK getheilet ist, drey mal grösser machet; und an statt $\frac{4}{5}$ schreibet $\frac{4}{15}$, so wird jedes Theilchen des ganzen IK drey mal kleiner. Denn es kan die Zahl der gleichen Theile in IK nicht dreymal grösser werden, wenn man nicht jedes Theil derselben IL, LM, MN und so weiter, wieder in drey gleiche Theile theilet, deren jedes folgends nicht mehr als ein Drittel des vorigen IL oder LM betragen wird. Nun ist es an sich klar, daß wenn man eine gewisse Zahl 4, solcher Dinge als IL, LM sind, annimmet, und auf der andern Seite eben die Zahl 4 drey mal kleinerer Dinge, man in dem letzten Fall nur den dritten Theil dessen habe, so man in dem ersten gehabt, gleichwie derjenige, welcher drey 8 gute Groschen Stücke hat, nur den dritten Theil des Vermögens desjenigen besitzet, welcher 3 Thaler hat. Und demnach ist richtig, daß $\frac{4}{15}$ der dritte Theil von $\frac{4}{5}$ sey, oder daß $\frac{4}{15}$ komme, wenn man $\frac{4}{5}$ durch 3 dividiret, und daß überhaupt einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, man nur den Nenner des Bruchs durch diese ganze Zahl multiplicieren, und den Zehler stehen lasse könne.

§. 145. Wenn wir uns nun wiederum einen Bruch als $\frac{17}{5}$ als den Quotienten vorstellen, welcher aus der Division des Zehlers durch den Nenner entstanden ist, so folget hieraus, daß, wenn man die zu dividirende Zahl 17 läst wie sie ist, verdoppelt aber den Theiler 5, der Quotiente ebenfals zwey mal kleiner werden werde. Und wenn man also 17 durch 5 wie man will dividiret, und einen Quotienten, welcher dem $\frac{17}{5}$ gleich ist, heraus gebracht hat, so kan man den Quotienten, welcher kommen muß, wenn man eben die Zahl 17 durch 2 mal 5 oder 10 dividiret, erhalten, wenn man den vorigen $\frac{17}{5}$ zwey mal kleiner machet. Aus eben dem Grund wird der Quotiente drey mal kleiner, wenn der Theiler drey mal grösser genommen wird, und zehen, hundert, tausend mal kleiner, wenn man den Theiler zehen, hundert, tausend mal grösser nimt.

§. 146. Man siehet leicht, daß hieraus ferner folge, daß, wenn man den Theiler zur Helfte vermindert, die zu theilende Zahl aber läst, wie sie vorher war, der Quotiente nunmehro zwey mal grösser werden müsse. Also giebt 12 wenn sie durch 3 getheilet wird, 4, und wenn man sie durch 2 mal 3 oder 6 dividiret nur 2, welches die Helfte

ist

ist von dem vorigen. Machet man demnach einen Theiler zehen, hundert mal kleiner als er vorher war, und dividiret seinerley Zahl durch die dergestalt verminderte Theiler, so wird der Quotiente, drey, zehen, hundert mal, grösser, als derjenige ist, welcher kommt wenn man eben die Zahl durch den ganzen Theiler dividiret.

§. 147. Wenn man einen Bruch, von was Art er auch seyn mag, durch seinen Nenner multipliciret, so ist das Product allezeit der Zehler. Denn ein jeder Bruch $\frac{17}{5}$ ist der Quotient, welcher kommt, wenn man den Zehler durch den Nenner dividiret. Multipliciret man also den Bruch durch den Nenner 5, so multipliciret man den Quotienten durch den Theiler, und dadurch kan nichts anders als diejenige Zahl kommen, welche dividiret worden, das ist der Zehler, wie wir oben I, 137. gesehen.

§. 148. Dieses sind die Gründe, welche wir voraus setzen musten, ehe wir uns zur Division einer Zahl, welche verschiedene Einheiten von höhern oder niedrigern Ordnungen, oder von beyden zugleich, enthält, durch eine eben dergleichen Zahl, wenden konten, welche nunmehro verständlich kan gezeiget werden. Es sey erstlich 97583 zu dividiren durch 287, das ist, es sey eine Zahl zu finden, welche durch die letztern der vorgegebenen zwo Zahlen multipliciret, die erstere herausbringet. Denn diesen Begrif haben wir oben von der Division I, 138. beygebracht, dessen wir uns hier wegen seiner Bequemlichkeit vor andern bedienen.

Vorbereitung zur Ausübung der Division.

§. 149. Ich schreibe den Theiler 287 vor die Zahl welche zu dividiren ist 97583 in einer Zeile, und sondere jene von dieser nur durch ein beliebiges Zeichen ab,

287)	97583	300 A
B.	86100	40 D
C.	11483	$\frac{3}{287}$ G
E.	11480	
F.	3	340 $\frac{3}{287}$ Q

und nach der zu dividirenden Zahl setze ich wieder eine Linie, an welche zur Rechten der Quotiente kommen sol, um diesen von der zu dividirenden Zahl abzusondern. So dann nehme ich eine Zahl, welche, wenn

I. Abschnitt.

wenn man bequem rechnen wil, nur aus einer einzigen Ziffer bestehen muß, und von welcher ich zum voraus sehe, daß, wenn man sie durch den Theiler multipliciret, ein Product heraus kommen werde, so nicht grösser ist als die Zahl, welche zu dividiren ist. Diese ist hier die Zahl 300, bey welcher A stehet. Ich multiplicire diese Zahl bey A durch den Theiler, und setze das Product bey B unter die Zahl welche zu dividiren ist, dergestalt, daß die Einheiten von einerley Ordnungen richtig unter einander zu stehen kommen. So dann ziehe ich diese Zahl B von der zu dividirenden Zahl ab, und setze den Ueberschuß darunter bey C. Nun nehme ich wieder eine Zahl, welche durch den Theiler multiplicirt, ein Product giebet, so kleiner ist als der gefundene Ueberschuß bey C; diese Zahl stehet bey D, und das Product derselben durch den Theiler bey E. Dieses Product bey E wird wieder von der über ihr bey C stehenden Zahl weggenommen, und der Ueberschuß bey F angemerket. Ist dieser, wie hier, kleiner als der Theiler, so ist die Arbeit am Ende, und man hat nichts weiter zu thun als vor den Quotienten die Summa der Zahlen bey A und D zu nehmen, und diesen einen Bruch G beyzusetzen, dessen Zehler der letzte Ueberschuß ist, welchen wir mit F bezeichnet, und der Nenner der Theiler, daß demnach in unserm Exempel der Quotiente seyn wird 340 $\frac{3}{287}$, welche Zahl wir mit Q bezeichnet haben.

§. 150. Daß dem also sey, und daß nach der angewiesenen Art der Quotient richtig heraus gebracht werde, ist nachfolgender massen zu erweisen. Es ist von der zu dividirenden Zahl erstlich die Zahl B weggenommen worden, und der Ueberschuß ist C, demnach ist B + C der zu dividirenden Zahl gleich. Ferner ist von C die Zahl bey E abgezogen worden, und F übrig geblieben, und es ist also wieder E + F der Zahl bey C gleich, und man kan vor C die Summe der Zahlen E + F setzen, ohne daß in der Grösse etwas verändert werde. Setzet man aber in der Summe B + C vor die C diese letztere Summe E + F, so kommt B + E + F, welches also der zu dividirenden Zahl gleich ist.

§. 151. Man kan dieses auch kürzer also fassen. Von der zu dividirenden Zahl ist B weggenommen und C übrig geblieben, von diesem C ist ferner E weggenommen und F übrig geblieben. Alles was weggenommen worden ist, zusamt demjenigen so übrig geblieben, ist gewiß allezeit so viel als dasjenige, so im Anfang da gewesen; derowegen ist B + E + F so viel als die Zahl, welche man dividiren solte.

§. 152. Ferner ist B das Product aus 300 × 287; E ist das Product

I. Abschnitt.

duct aus 40×287, und F ist das Product aus dem Bruch $\frac{3}{287}$, welcher einen Theil des Quotienten ausmacht, durch eben die 287, I, 147. oder $F = \frac{3}{287} \times 287$, diese drey Producte aber zusammen gesetzt, sind einem einzigen Product gleich, welches durch die Multiplication der Summe von $300 + 40 + \frac{3}{287}$, oder $340\frac{3}{287}$ durch die Zahl 287 heraus gebracht wird I, 91: und es ist demnach $B + E + F$ diesem Producte $340\frac{3}{287} \times 287$, oder Q 287, das ist, dem Producte aus der Zahl Q und dem Theiler, gleich. Und da wir gesehen, daß die zu dividirende Zahl der Summe der Zahlen $B + E + F$ gleich sey, I, 150. so muß dieselbe auch dem Producte aus der Zahl Q und dem Theiler gleich seyn. Giebt aber die gefundene Zahl Q, wenn man sie durch den Theiler multipliciret, ein Product welches der zu dividirenden Zahl gleich ist, so ist diese Zahl nothwendig der richtige Quotient, welchen man suchte. I, 138.

§. 153. Damit wir Gelegenheit haben noch ein und das andere bey dieser Sache zu erläutern, wollen wir noch ein Exempel auf die Art berechnen, und den Beweiß kurz verfassen. Die zu dividirende Zahl sey 97357, und der Theiler 274, welche Zahlen gesetzt worden sind, wie vorhin gesaget worden:

274)	97357	200	A
B	54800	100	D
C	42557	50	G
E	27400	4	K
F	15157	1	N
H	13700	$\frac{87}{274}$	R
I	1457		
L	1096	$355\frac{87}{274}$	Q
M	361		
O	274		
P	87		

Es ist alles gerechnet wie vorhin, und

$B = 274 \times 200$

$E = 274 \times 100$

$H = 274 \times 50$

$L = 274 \times 4$

$O = 274 \times 1$

$P = 274 \times \frac{87}{274}$

Dem-

I. Abschnitt.

Demnach ist B+E+H+L+O+P, oder die Summe aller dieser Producte, gleich dem Producte $274 \times 355\frac{87}{274}$ oder B+E+H+L+O+P = 274 × Q I, 91. Aus der Arbeit bey der Rechnung ist klar, daß die Producte B+E+H+L+O+P der zu dividirenden Zahl gleich seyn. Derowegen ist auch, wenn man an die Stelle derselben B+E+H+L+O+P das ihnen gleiche Product 274 × Q setzet, die zu dividirende Zahl = 274 × Q, und also Q der richtige Quotiente.

§. 154. Man siehet aber auch hieraus, daß nicht viel daran gelegen sey, wenn man einen oder den andern Theil des Quotienten als A und K kleiner annimt, als man ihn hätte annehmen können. Es wird die Rechnung dadurch weitläuftiger aber nicht fehlerhaft. Man hätte gleich vor den ersten Theil des Quotienten 300 nehmen können, so wäre man auf einmal mit dieser Ordnung von Einheiten fertig worden. Man pflegt dieses allezeit so zu beobachten, und nimt eine jede der Ziffern der Factoren A, D, G, K, N so groß, als man nur kan. Wie groß man sie aber nehmen könne, findet man gemeiniglich durch das Probiren, welches Probiren man bey der Art zu rechnen, die wir gegenwärtig gebraucht, so sehr nicht nöthig hat. Nachstehende Berechnung eben dieses Exempels, wenn man sie mit der eben gegebenen vergleichen wil, wird deutlich zeigen, wie dieses zusammen hänge:

```
274) 97357 | 300
     82200 |  50
     ----- |   5
     15157 | -----
     13700 | 355 87/274
     -----
      1457
      1370
      ----
        87
```

§. 155. Das einzige Probiren, womit man, wie gesagt, die grösten Theile des Quotienten, welche man nur haben kan, findet, machet hierbey einige Schwierigkeit. Damit man dasselbe erleichtere und etwas habe, woran man sich halten kan, indem man probiret, wie groß die Ziffern derer besondern Theile des Quotienten als hier 3, 5, 5 in 300, 50, 5 zu nehmen seyn: vergleichet man den Theiler mit den ersten Ziffern der zu dividirenden Zahl, deren man so viele nimt, als viele der Theiler hat, wenn diese Zahl der erstern Ziffern nicht weniger bedeuten als der Theiler, sonst muß man um eine Ziffer der zu dividiren-

direnden Zahl weiter fortrücken. Als hier vergleichet man den Theiler 274 erstlich mit den drey ersten Ziffern der zu dividirenden Zahl 973, weil diese mehr als jene bedeuten, sonst, wenn der Theiler grösser gewesen wäre als diese Ziffern der zu dividirenden Zahl, hätte man ihn mit den vier erstern Ziffern 9735 vergleichen müssen. Eben dieses beobachtet man hernach beständig. Ferner setzet man, daß der Theiler so oft in diesen Ziffern der zu dividirenden Zahl enthalten sey, als oft die erste Ziffer desselben in der ersten Ziffer von diesem, (2 in 9) enthalten ist, welches zwar nicht allezeit eintrift, aber nicht eben sonderlich fehlet, und wenn es fehlet, allezeit zu vieles giebt: als wie eben hier 2 in 9 vier mal enthalten ist, da doch 274 in 973 nicht vier mal enthalten. Die Ursach ist, weil, wenn man 274 durch 4 multipliciret, verschiedene Einheiten in das Product 2 × 4 herüber gehen, welche dieses vergrössern, wie man leicht sehen wird, wenn man 274 würklich durch 4 multipliciret. Allein die auf die Art gemachte Fehler verbessern sich leicht. Denn indem man hernach die Producte machet, siehet man leicht, ob man den Factor, welcher einen Theil des Quotienten ausmachen soll, zu groß angenommen habe, oder nicht.

h Abschnitt.

§. 156. Indessen ist nicht zu leugnen, daß dieses Probiren bey dem allen die Division sehr verdrießlich mache, und überhaupt wil es sich nicht recht schicken, daß bey einer Anweisung zu dieser oder jener Ausübung man etwas dem Probiren überlasse, und dieses machet die Anweisung allzeit unvollkommen. Man kan aber das Probiren bey der Division auf zweyerley Art gänzlich vermeiden, und die Division in eine blosse Subtraction verwandeln. Die erstere ist leichter, aber weitläuftiger, die zweyte kürzer, aber sie erfordert etwas mehr Arbeit, und diese Arbeit ist zuweilen, wenigstens zum Theil, überflüssig.

§. 157. Die erstere dieser Arten zu dividiren gründet sich auf dasjenige, so von der Multiplication gewiesen worden, wie nemlich diese durch eine blosse, aber doch nicht allzuweitläuftige Addition zu verrichten sey. Es ist auf die Art §. 114, die Zahl 3572 durch 432 multipliciret, und das Product 1543104 heraus gebracht worden. Gesetzt, es sey dieses Product hinwiederum durch 3572 zu dividiren, so ist zum voraus bekant, daß 432 der Quotient werden müsse I, 138. Es wird aber dieser Quotient durch eine blosse wiederhohlte Subtraction also gefunden;

I. Abschnitt.

```
1543104 . . A
 357200 . . B
-------
1185904
 357200
-------
 828704
 357200
-------
 471504
 357200
-------
 114304 . . C
  35720 . . D
-------
  78584
  35720
-------
  42864
  35720
-------
   7144 . . E
   3572 . . F
-------
   3572
   3572
-------
     00
```

Nachdem nemlich die zu dividirende Zahl bey A geschrieben worden, hat man dem Theiler 3572 so viele 00 zugesetzt, als nur geschehen können, ohne daß er grösser würde, als die Zahl bey A. Der also vermehrte Theiler stehet bey B, denn man konte ihm in dem gegenwärtigen Fall nicht mehr als zwo 00 beysetzen. Er wäre grösser worden als A, wenn man ihm derer dreye angefüget hätte. Die Zahl B wird von der A abgezogen, und der Ueberschuß unter derselben bemerket. Von diesem Ueberschuß wird wieder eben die B abgezogen, und dieses wird so oft wiederhohlet bis endlich bey C ein Ueberschuß bleibet, so kleiner ist, als die Zahl B. Nachdem man dieses erhalten, ist von der B eine 0 am Ende weggethan, und dadurch die Zahl D heraus gebracht worden, diese hat man wieder von der C so oft abgezogen, als geschehen können, das ist, bis eine Zahl übrig geblieben ist, die kleiner ist als D, welche bey E stehet. Nunmehro hat man von der D wieder ein 0 am Ende weggethan, und dadurch die Zahl bey F heraus

aus gebracht, welche eben diejenige ist, mit welcher solte dividiret werden. Diese ist von der Zahl bey E zwey mal abgezogen worden: und nachdem dieses geschehen, ist am Ende 0 übrig geblieben. So bald dieses geschehen, ist der Quotiente leicht zu haben, wenn man ihn nicht schon wärender Arbeit angemerket hat.

I. Abschnitt.

§. 158. So oft nemlich der mit 00 vermehrte Theiler B von der Zahl A ist abgezogen worden, so viele Hunderte sind in dem Quotienten enthalten, und also in dem gegenwärtigen Falle, 4. So oft der mit einem 0 vermehrte Theiler D abgezogen werden können, so viele Zehner enthält der Quotiente, und also bey unserer gegenwärtigen Rechnung 3; endlich, so oft der Theiler selbst abgezogen werden können, so viele einfache Einheiten sind in dem Quotienten. Daß also in dem Falle, welchen wir vor uns haben, der Quotiente ist 432. Eben diese Bewandniß hat es auch mit den Einheiten der noch höhern Ordnungen, wenn deren welche in dem Quotienten vorkommen.

§. 159. Der Grund alles dieses lieget, wie gesaget ist, in demjenigen, so bey der Multiplication gezeiget worden ist, und man darf nur die gegenwärtige Rechnung mit der Rechnung des II, 4. Absatzes zusammen halten, wenn man alles deutlich einsehen will. Wenn man nemlich die Zahl B I, 157. vier mal, und die Zahl D drey mal, F aber zwey mal setzet, und alles addiret, so erhält man ohne Zweifel das Product aus der Zahl F 3572 durch welche dividiret worden ist, und 432. Es kan aber durch diese Addition nichts anders als die Zahl A heraus kommen. Es ist also A dieses Product, und folgends 432 der Quotiente, welcher kommet, wenn man A durch 3572 theilet. Wenn bey dieser Art zu dividiren nach allen Subtractionen noch etwas übrig bleibet, so verfähret man damit wie gewöhnlich.

§. 160. Die zweyte Art das Probieren zu vermeiden, und die Division in eine blosse Subtraction zu verwandeln, bestehet darinne, daß man gleich Anfangs den Theiler durch alle einfache Zahlen multipliciret, das ist, durch alle von 1 bis auf 9, und alle diese Producte unter demselben bemerket. Ist dieses geschehen, so siehet man leicht, welches das gröste dieser Producte werde, so man noch von der zu dividirenden Zahl abziehen kan, wenn man demselben eine oder etliche 000 zusetzet, und die Theile des Quotienten fallen so gleich in die Augen. Ein Exempel kan die Sache klar machen.

I. Abschnitt.

	A	B	C
1)	532	45417904	
2)	1064	42560000	80000
3)	1596	2857904	
4)	2128	2660000	5000
5)	2660		
6)	3192	197904	
7)	3724	159600	300
8)	4256	38304	
9)	4788	37240	70
		1064	
		1064	2
		0	85372

§. 161. Es ist die Zahl 45417904 durch 532 zu dividiren. Man hat gleich Anfangs diese Zahl 532 durch 1, 2, 3 und so fort, bis 9 multipliciret, und diese Producte in der ersten Säule unter A geschrieben, auch die einfache Ziffer, durch welche jedes dieser Producte heraus gebracht worden, darneben verzeichnet. Unter B stehet die Zahl, welche dividiret werden soll. Man siehet leicht, daß wenn man dem Producte unter A, vor welchem 8 stehet, vier 0000 anfüget, die Zahl, welche dadurch heraus gebracht wird 42560000 noch von der zu dividirenden Zahl abgezogen werden könne, und daß dieses keinesweges angehen würde, wenn man dem Product unter A, vor welchem 9 stehet, eben so viele 00 beysetzen wolte. Man setzet derowegen das erstere dieser Producte am gehörigen Orte unter die zu dividirende Zahl, und ziehet sie gehörig ab. Dadurch erhält man den ersten Theil des Quotienten 80000. Nunmehro ist das Product unter A, vor welchem 5 stehet, das gröste unter denjenigen, welche mit dem Zusatz dreyer 000 noch von dem Ueberbleibsel von der vorigen Subtraction können abgezogen werden. Man setzet es derowegen an den gehörigen Ort, und bemerket den zweyten Theil des Quotienten 5000. Man verrichtet die Subtraction, und gehet auf eben die Art weiter, so erlanget man endlich den ganzen Quotienten 85372. Die Sache hat keine Schwierigkeit, wenn man sich nur die Mühe geben will, die Rechnung selbst zu verrichten. Man hat würklich einen grossen Vortheil bey dieser Art zu dividiren, wenn der Quotiente aus vielen Ziffern bestehet: denn ausser dem geschiehet es öfters, daß die meisten der

der Producte unter A nicht gebrauchet werden. Sonst aber ist der Grund derselben aus dem wenigen, so bisher gesaget worden, gar leicht einzusehen.

I. Abschnitt.

Die kürzeste Art des Dividirens.

§. 162. Wenn man nun immer die grösten Zahlen zu den Theilen des Quotienten annimt, welche man haben kan; so kan man die Division mit einiger Ersparung des Abschreibens der Ziffer und Setzung der 00 machen. Wir wollen das letzte Exempel nach der Art rechnen, in Hofnung, daß selbst die Zusammenhaltung dieser beyden Rechnungsarten das übrige alles deutlich machen werde:

```
532) 45417904 | 85372
     4256:::: |
     ---------
      2857:::
      2660 ::
      -------
       1979 ..
       1596 ::
       -------
        3830:
        3724
        -----
         1064
         1064
         ----
            0
```

Wenn man nemlich allezeit die grösten Ziffern vor die Theile des Quotienten annimt, die man nehmen kan, so ist klar, daß unmöglich mehr als eine Ziffer vor jede Ordnung der Einheiten kommen könne. Als hier können ausser den 8 Zehentausenden nicht mehr Zehentausende in den Quotienten kommen, weil man gleich Anfangs die gröste Zahl der Zehentausende genommen hat, die man nur nehmen können. Eben so können nicht mehr als 5 Tausende, nicht mehr als 3 Hunderte kommen, und so weiter. Und demnach bekommen die Ziffern in dem Quotienten ihre richtige Bedeutung von selbst, wenn man sie nur in der Ordnung hinter einander setzet, in welcher sie heraus gebracht werden.

§. 163. Nur muß man hiebey Acht haben, daß man die 00 nicht vergesse, welche kommen, wenn diejenige Zahl, welche man dividiren soll, kleiner ist als der Theiler, und man folgends weiter

I. Abschnitt. fortzurücken genöthiget wird, wie in dem nächst folgenden Exempel.

```
29) 89384 | 3082 6/29
    87:::
    ----
     23::
     00:.
    ----
     238:
     232.
    ----
       64
       58
      ---
        6
```

§. 164. Vielleicht wird alles dieses deutlicher, wenn es noch auf einer andern Seite angesehen wird. Ich soll eine gegebene Zahl, als 39573 durch 12 dividiren, das ist, ich soll den zwölften Theil von dieser Zahl schaffen. Indem ich rechne wie eben gelehret worden,

```
12)   39573 | 3297 9/12
   A  36::: |
      ----
       35::
   B   24::
      ----
       117.
   C   108:
      ----
         93
   D     84
      ----
        E 9
```

so theile ich die vorgegebene Zahl durch die beständige Subtraction in 36 Einheiten von der dritten Ordnung oder Tausende, in 24 Einheiten von der zweyten Ordnung oder Hunderte, in 108 Einheiten der ersten Ordnung oder Zehner, und in 84, und noch über das in 9 einfache Einheiten. Dieses sind die Zahlen, welchen die Buchstaben A, B, C, D, E beygeschrieben worden sind, welche, weil die erstern viere derselben, nachdem man sie nach und nach von der zu dividirenden Zahl weggenommen, endlich die Zahl bey E übrig gelassen, zusammen genommen allerdings der zu dividirenden Zahl gleich seyn müssen, und derowegen als ihre Theile anzusehen sind. Nun ist der erste Theil des Quotienten, nemlich die erste 3 so Tausende bedeutet, der zwölfte Theil

Theil der 36 Tausenden, so in der zu dividirenden Zahl enthalten sind, weil 3 mal 12 die Zahl 36 ausbringet, wie dieses gleich Anfangs durch die Multiplication gefunden, und eben deswegen 3 zur ersten Ziffer des Quotienten angenommen worden, und eben so ist die nächste 2 in dem Quotienten so Hunderte bedeutet, der zwölfte Theil der 24 Hunderte der zu dividirenden Zahl; der dritte Theil 9 welches Zehner sind, ist der zwölfte Theil der 108 Zehner; der vierte Theil, nemlich die letzten 7 Einheiten des Quotienten sind der zwölfte Theil der 84 Einheiten, und endlich ist der Bruch $\frac{9}{12}$ der zwölfte Theil der noch übrigen 9 Einheiten: es enthält also der Quotiente die zwölften Theile aller Theile der zu dividirenden Zahl. Da nun alle Theile hier wie allezeit das Ganze ausmachen, so ist klar, daß eben dieser Quotiente auch der zwölfte Theil der ganzen Zahl welche man dividiren solte, sey, und daß also die Division durch 12 richtig verrichtet worden, weil eine Zahl durch 12 dividiren nichts anders heisset, als derselben Zahl zwölften Theil finden. I, 137.

I. Abschnitt.

§. 165. Es ist nach diesen allen bey der Division selbst nichts mehr zu erinnern, als dieses einzige, daß wenn der Theiler nur aus einer Ziffer bestehe, man so viele Weitläuftigkeiten, als bis anhero gebraucht worden, da derselbe jederzeit mehr als eine Ziffer hatte, nicht nöthig habe. Man kan die Producte aus den Theilen des Quotienten im Gedächtniß behalten, und so abziehen; das überbleibende aber so gleich über oder unter die Ziffer der zu dividirenden Zahl anmerken, ohne die Ziffer der zu dividirenden Zahl herunter zu ziehen, und von neuen zu schreiben. Ein Exempel

6) 395728 | 65954 $\frac{4}{6}$.
35324

Ich sage 6 in 39 ist 6 mal enthalten, aber 6 × 6 ist nur 36, und dieses Product von 39 weggenommen, läst 3, welche ich unter die 9 schreibe, und zur nächsten 5 bringe, mit welcher sie 35 ausmachet. Nun ist 6 in 35 enthalten 5 mal, aber 5 × 6 ist nur 30, und diese von den 35 abgezogen, lassen 5 übrig, welche wieder unten angemerket, und zu der nächst folgenden 7 gebracht werden müssen, mit welcher sie 57 machen, mit diesen verfähret man eben so, und auf die Art ferner bis man ans Ende kommt, da dann die letzt übergelassene 4 mit dem Theiler den Bruch $\frac{4}{6}$ giebt.

Die

I. Abschnitt.

Die Ordnung der Einheiten der Ziffer des Quotienten zu bestimmen.

§. 166. Auf diese Art nun werden jederzeit die Ziffern des Quotienten heraus gebracht, und man siehet gar leicht, daß im Fall die letzten Ziffern so wohl des Theilers als der zu dividirenden Zahl ganze und einfache Einheiten bedeuten, auch in dem Quotienten die letzte Ziffer dergleichen Einheiten bedeuten werden, wodurch zugleich die Ordnung der Einheiten aller übrigen Ziffern bestimmet wird. Als in dem Exempel I, 154. da wir die Zahl 97357 durch 274 dividiret, und den Quotienten 355 $\frac{87}{274}$ heraus gebracht haben, bedeutet die letzte Ziffer 5 einfache und ganze Einheiten, die vorhergehende Zehner, und so weiter; der Bruch aber bezieht sich ebenfals auf einfache Einheiten, deren eine man in 274 Theile zertheilen, und 87 dergleichen Theile nehmen muß, um den Werth des Bruchs heraus zu bringen.

§. 167. Ist aber 973, 57 durch die Zahl 274, oder 97357 durch 2, 74, oder 973, 57 durch 27, 4 zu theilen, so findet man zwar die Ziffer des Quotienten vollkommen wie vorher 355 $\frac{87}{274}$, allein die letzte 5 bedeutet nicht nothwendig ganze und einfache Einheiten, sondern sie kan auch Zehenthel oder Hunderthel, oder Zehner, oder Hunderte, mit einem Wort, eine Einheit von einer jeden der höhern oder niedrigern Ordnungen bedeuten, und bekommt diese Bedeutung, nach dem das Zeichen der einfachen Einheiten, in den Zahlen, deren eine durch die andere dividiret werden soll, so oder anders stehet. Es ist übrig, daß wir betrachten nach was vor Gesetzen dieses geschehe.

§. 168. Gesetzt, man soll an statt der Zahl 97357 die Zahl 9735, 7 durch 274 dividiren. Da die letztere der beyden zu dividirenden Zahlen zehen mal kleiner ist, als die erstere, so kan der Quotiente nun nicht mehr 355 $\frac{87}{274}$ seyn, sondern muß zehen mal kleiner gemacht werden, demjenigen zu folge, so wir oben I, 141. gesehen haben. Diese Verkleinerung geschiehet, wenn man das Zeichen der einzeln Einheiten um eine Ziffer weiter nach der linken setzet, und an statt 355 $\frac{87}{274}$ schreibet 35, 5 $\frac{87}{274}$, I, 106. und dieses ist also nunmehro der richtige Quotient, und der Bruch desselben beziehet sich auf zehenthel der einfachen Einheiten, oder auf eine Einheit der ersten niedrigern Ordnung, welche man in 274 Theile theilen, und dieser Theile 87 nehmen muß, um den Werth des Bruchs zu erhalten. Man siehet auf eben die Art, daß, wenn man 973, 57 noch durch eben den Theiler

ler 274 dividiret, der Quotient 3, 55 $\frac{87}{274}$ seyn, und der Bruch sich auf eine Einheit der zweyten niedrigern Ordnung beziehen werde. Denn weil die zu dividirende Zahl wieder zehen mal kleiner genommen worden ist als vorher, so muß auch der Quotient zehen mal kleiner werden, und aus eben dem Grund folget, daß durch die Division der Zahl 97, 357 mit dem Theiler 274 der Quotient 0, 355 $\frac{87}{274}$ kommen werde, und daß überhaupt vor jede Ziffer der zu dividirenden Zahl, um welche das Zeichen der einfachen Einheiten zurück nach der linken gesetzt worden, dieses Zeichen der einfachen Einheiten auch in dem Quotienten um eine Ziffer nach der linken zu müsse gerücket werden. Daß demnach, wenn die letzte Ziffer des Theilers einfache Einheiten bedeutet, jederzeit in dem Quotienten so viele Ziffern hinter dem (,) Zeichen der einfachen Einheiten stehen müssen, als viele derer in der zu theilenden Zahl daselbst stehen.

I. Abschnitt.

§. 169. Bleibt aber die zu dividirende Zahl einerley, und der Theiler wird zehen mal kleiner gemacht, das ist, dividiret man eben die Zahl 97357 durch 27, 4 an statt 274, so muß der Quotient zehen mal grösser werden als er vorher war, I, 146. und demnach seyn 355 Zehner, und noch über dieses $\frac{87}{274}$ eines Zehners, oder 3550 + $\frac{870}{274}$; und wird der Theiler noch zehen mal kleiner genommen, und folgends 2, 74, so wird der Quotiente wieder zehen mal grösser, und bedeutet demnach die letzte Ziffer 5 des vorigen Quotienten 355 $\frac{87}{274}$ Hunderte, oder Einheiten von der zweyten höhern Ordnung, und der angehängte Bruch beziehet sich ebenfals auf solche Einheiten, deren eine man demnach in 274 Theile zu zertheilen und deren 87 anzunehmen hat, um seinen Werth zu bestimmen.

§. 170. Eben so ist es auch, wenn man die Zahl 9735, 7 welche wir vorher durch 274 dividiret, nunmehro durch 27, 4 dividiret; der Theiler ist zehen mal kleiner worden. Da nun der vorige Quotient war 35, 5 $\frac{87}{274}$, so muß derjenige welcher nunmehro kommt, zehen mal grösser seyn, und folgends ist er dieser 355 $\frac{87}{274}$. I, 105. Dividiret man 973, 57 durch 27, 4 so wird der Quotient 35, 5 $\frac{87}{274}$, und es wird überhaupt das Zeichen der einfachen Einheiten (,) vor jede Ziffer, um welche es in dem Theiler nach der linken zurück gesetzt wird, in dem Quotienten um eine Ziffer nach der rechten vorwärts gebracht. Nachstehende Zahlen können dieses in einem Blick zeigen. Da man beständig die zu dividirende Zahl oben, den Theiler darun-

I. Abschnitt.

ter, und den Quotienten unter diesen unter eine Linie gesetzt. Man hat aber dabey die Brüche weggelassen:

97357	9735,7	973,57	97,357
274	274	274	274
355	35,5	3,55	0,355
97357	9735,7	973,57	97,357
27,4	27,4	27,4	27,4
3550	355	35,5	3,55
97357	9735,7	973,57	97,357
2,74	2,74	2,74	2,74
35500	3550	355	35,5
97357	9735,7	973,57	97,357
0,274	0,274	0,274	0,274
355000	35500	3550	355

§. 171. Und aus diesen allen erhellet, daß in dem Quotienten das Zeichen der einfachen Einheiten (,) jederzeit so weit von der letzten Ziffer des Quotienten abstehen müsse, als viele Ziffern in einer der zwo gegebenen Zahlen, deren erstere durch die zweyte zu theilen war, mehr als in der andern hinter diesem Zeichen (,) stehen. Und daß wenn in der zu dividirenden Zahl mehr Ziffern hinter dem Ort der einfachen Einheiten stehen, als in dem Theiler, das Zeichen der einfachen Einheiten vor die letzte Ziffer des Quotienten, nach der linken zu müsse gesetzt, und um so viele Ziffern von demselben entfernet werden, als viele Einheiten der Ueberschuß der Zahl der Ziffern, in der zu dividirenden Zahl, welche hinter diesen Zeichen stehen, über die Zahl der Ziffer hinter eben dem Zeichen in dem Theiler, enthält: daß aber, wenn der Theiler mehr solche Ziffern enthält, als die Zahl welche zu theilen ist, dieses Zeichen (,) so weit vor die letzte Ziffer nach der rechten zu müsse gesetzt werden, daß zwischen denselben und der letzten Ziffer des Quotienten so viele 00 zu stehen kommen, als viele Einheiten der Ueberschuß der Zahl der Ziffern hinter dem Ort der einfachen Einheiten in dem Theiler, über die Zahl eben dergleichen Ziffern in der zu dividirenden Zahl, enthält.

Den

Den Quotienten in zehentheilichen Brüchen darzustellen.

I. Abschnitt.

§. 172. Die Brüche, dergleichen in unserm Exempel $\frac{87}{271}$ war, werden meistentheils weggelassen, wenn in dem Quotienten Einheiten von einer der niedrigen Ordnungen vorkommen, und dieses deswegen, weil diese Brüche entweder an sich Kleinigkeiten bedeuten, auf welche man in der Anwendung nicht Acht haben kan, oder doch auf solche Kleinigkeiten können gebracht werden. Der zehentausendste Theil einer Meile ist an sich gar merklich, er beträgt 2 Schuh, und wenn ein Ort von einen andern um 7 $\frac{2}{10000}$ Meilen entfernet ist, so fehlet man in der That, wenn man diese Entfernung gerade von 7 Meilen zu seyn setzet, um vier Schuhe. Aber wem ist an diesem Fehler etwas gelegen, und was ändert derselbe in der Anwendung? Ja, würde man nicht vielmehr denjenigen wenigstens vor eigensinnig halten, welcher niemals um solche Kleinigkeiten fehlen, und wenn er um die Entfernung eines Orts von einem andern gefraget wird, dieselbe bis auf ein Haar breit bestimmen wolte; gesetzt nemlich, daß dieses in seiner Gewalt wäre? Man kommt allezeit durch die wiederhohlte Theilung auf dergleichen Kleinigkeiten, und vermittelst der zehentheilichten Brüche kan man allezeit den Quotienten dergestalt heraus bringen, daß, ob zwar derselbe nicht eigentlich der wahre ist, er dennoch nicht mehr als um etliche Einheiten von derjenigen niedrigen Ordnung, welche man nur annehmen will, von dem wahren abgehet. Das ist, man kan vermittelst der Division, und indem man den Quotienten bloß in zehentheilchen Brüchen darstellet, machen, daß derselbe von dem wahren nicht mehr als um einige zehentausendtheilchen, oder wenn man will, um einige hundert oder tausend mal tausendste, oder noch kleinere Theilchen, abgehe. Demnach kan man, wenn man bloß um den Nutzen bey der Anwendung bekümmert ist, die Brüche, welche ausser den zehentheilchen noch in den Quotienten kommen, allezeit weglassen. I, 41.

§. 173. Um aber den Quotienten in zehentheilchen Brüchen so genau als man nur will heraus zu bringen, verfähret man folgender gestalt. Man hängt an die Zahl, welche man dividiren soll, so viele 00 an, als man nöthig findet, nachdem man vorher den Ort der einfachen Einheiten, falls es nicht bereits geschehen ist, bezeichnet. Nach der Zahl dieser 00 richtet sich die Ordnung der Einheiten der letzten Ziffer des Quotienten, und man kan also ermessen, wie viel man derselben

I. Abschnitt.

ben anzuhängen habe, damit diejenigen Fehler vermieden werden, welche nach Beschaffenheit der Sache zu vermeiden nöthig sind. Doch ein Exempel kan diese Sache deutlicher machen als viele Worte. Es sey die Zahl 3 durch 7 zu theilen, und der Quotient in zehentheilschen Brüchen so genau zu schaffen, daß man um kein hundert tausendstes Theilchen fehle, so hänge ich an die zu dividirende Zahl fünf 00, bezeichne den Ort der einfachen Einheiten, und dividire so dann die Zahl 3,00000, welche nichts mehr als 3 bedeutet durch 7.

7) 3,00000 | 0,42857
2645 |

Der Quotient 0,42875 ist der gesuchte, und eben so verfähret man auch, wenn in der einen oder den beyden zur Division gegebenen Zahlen zehentheilche Brüche vorkommen. Aus dem vorigen I, 171. ist nicht sonderlich schwer einzusehen, wie viel 00 man am Ende anhängen müsse, damit man in dem Quotienten Einheiten von einer beliebigen Ordnung erlange: doch kan man auch dieses Nachdenken ersparen, wenn man folgender gestalt verfähret.

§. 174. Wenn in der Zahl, welche zu dividiren ist, eben so viele oder mehrere Ziffern hinter dem Ort der einfachen Einheiten stehen, als in dem Theiler, so hat man nicht nöthig gleich Anfangs 00 an dieselbe zu setzen. Man dividire ordentlich bis man ans Ende kommt, und bestimme so dann die einfache Einheiten des Quotienten nach den gegebenen Reguln, indem man nemlich so viel Ziffern von der rechten vermittelst des (,) Zeichens der einfachen Einheiten abschneidet, als viele dergleichen Ziffern in der zu dividirenden Zahl mehr sind, als in dem Theiler. Kan man den dergestalt erhaltenen Quotienten noch nicht ohne merkliche Fehler vor richtig annehmen, so verfolge man die Division, indem man an dasjenige, so von der vorigen Division übrig geblieben, eine 0 anfüget, und wiederhohle dieses so oft bis man seinen Zweck erreichet, wie in den nachstehenden Exempeln zu sehen ist:

35)

I. Abschnitt.

```
35)  3,972 | 0,11348        241)  79,234 | 32,877
     3,5 : :                      72 3 : :
     -----                        -------
      47 :                         693 :
      35 :                         482 :
     -----                        -------
      122                          2114
      105                          1928
     -----                        -------
       170                          1860
       140                          1687
      -----                        -------
        300                          1730
        280                          1687
       -----                        -------
         20                            43
```

§. 175. Stehen aber in der zu dividirenden Zahl wenigere Ziffern, welche zehentheilche Brüche bedeuten, als in dem Theiler, so setze man zum Anfang nur so viele 00 an die erstern dieser Zahlen, als erfordert werden, damit die Zahl aller Ziffern hinter dem Zeichen der einfachen Einheiten in dieser zu dividirenden Zahl eben so groß werde, als die Zahl dergleichen Ziffern in dem Theiler. Man dividire, bis man ans Ende kommt, und bestimme so dann den Ort der einfachen Einheiten. Es wird aber in diesem Fall die letzte Ziffer des Quotienten selbst einfache Einheiten bedeuten, wie dieses sich allezeit begiebt, wenn die letzte Ziffer der zu dividirenden Zahl Einheiten von eben der Ordnung bedeuten, welche von der letzten Ziffer des Theilers bedeutet wird I, 170. Nachdem man auf die Art den Ort der einfachen Einheiten bestimmet hat, kan man nach und nach 00 an die überbleibende Zahlen fügen, und die Division wie eben gezeiget worden, verfolgen. Die Berechnung nachstehender Beyspiele wird hoffentlich alles vollkommen klar machen.

```
2,84)  750 | 2,64         0,235)  7,000 | 29,7
       568 |                       470  |
      -----                       -----
      1820                        2300
      1704                        2115
      -----                       -----
       1160                        1850
       1136                        1645
      -----                       -----
         24                         205
```

I. Abschnitt.

```
5,72) 0,30 |0,052
      0 300|
      0 3000
        2860
         1400
         1144
          256
```

§. 176. Man kommt mit einer dergleichen Division zuweilen ans Ende, und bekommt den Quotienten vollkommen genau, aber dieses geschiehet nicht allezeit; denn man kan nicht alle Brüche in zehentheilichte verwandeln, und durch diese richtig und dergestalt darstellen, daß gar nichts fehlte. Nachstehende Exempel weisen beydes:

```
3) 7,10000|2,36666          2,3) 17,25|7,5
   1 2222 |                      16 1 |
                                  115
                                  115
                                    0
```

Man siehet leicht, daß in dem ersten Fall man niemals ans Ende kommen könne, weil im Verfolg immer 20 durch 3 zu dividiren ist, welches niemals genau geschehen kan, und es bleibt hier immer eine dergleichen Zahl zu dividiren übrig, als diejenige ist, welche bereits dividiret worden. Wie ist es bey so gestalten Sachen möglich, daß man jemals fertig werde. Es gehet demnach der Quotiente 2, 36666 ohne Ende fort, und wird niemals, vollkommen so groß als $2,3\frac{2}{3}$, welches der eigentliche Quotiente ist, welcher aus der Division der Zahl 7, 1 durch 3 herausgebracht wird.

Einige Vortheile bey der Multiplication und Division.

§. 177. Was bis anhero gesagt worden ist, setzt uns in den Stand eine jede Zahl, welche durch Einheiten von verschiedenen höhern und niedrigern Ordnungen ausgedrückt wird, durch eine andere dergleichen Zahl, zu multipliciren oder zu dividiren. Doch ist noch etwas zu sagen übrig, so zur bequemlichen Verrichtung dieser beyden Rech-

Rechnungsarten dienen kan. Dasjenige so bey den Gründen der Multiplication I, 91. angemerket, und nach dem so oft gebraucht worden, daß newlich die Summe der Producte verschiedener Theile einer Zahl, die sämtlich durch einerley Zahl multipliciret worden, mit dem Product das heraus kommt, wenn man die ganze Zahl durch eben dieselbe Zahl multipliciret, einerley sey: und daß demnach, wenn eine Zahl zum Exempel durch 6 multipliciret werden sol, ich dieselbe erstlich durch 3 multipliciren, und hernach dieses Product zwey mal nehmen könne, weil 6, zwey mal drey ist, oder sich in zwey dreyen theilen läst, und so überhaupt in den übrigen fällen; dieses sage ich wird uns den Grund von allen diesen Bequemlichkeiten geben, welche uns so wohl bey der Multiplication, als auch bey Verrichtung der Division, die Multiplication mit grössern Ziffern zum östern erspa-ren werden.

I. Abschnitt.

§. 178. Es sey die Zahl 372, durch 7 zu multipliciren: Ich habe sie aber bereits durch 4 multipliciret, und das Factum ist 1488, ich habe sie auch durch 3 multipliciret, und es ist hier heraus kommen 1116, so setze ich diese zwey Producte zusammen, die Summa derselben 2604 ist 372×7: Oder ich habe eben diese Zahl 372 durch 3 multipliciret, und das Product ist 1116, ich nehme dieses gedoppelt 2232, so habe ich die vorgegebene Zahl sechs fach, ferner setze ich sie noch einmal zu dem auf die Art gefundenen Product, so ist $2232 + 372 = 2604$ wieder das Factum aus derselben Zahl 372 und 7. Und so kan man ein Factum auf gar verschiedene Arten machen.

§. 179. Ja man kan sich auch der Division bedienen, dergleichen Producte einer Zahl aus andern Producten derselben, die schon vorhero bekannt waren, bequem zu machen, wie auch der Subtraction. Die Gründe sind einerley mit dem vorigen, und ein paar Exempel können die Sache klar machen. Es sey eben die Zahl, welche vorhero da war 372 bereits durch 6 multipliciret, und das Factum sey 2232, ich sol sie durch 3 multipliciren. Weil nun eine Zahl sechs mal genommen doppelt so viel gibt, als wenn man sie nur dreymal nimt, I, 94. so muß das gesuchte Product die Helfte des bereits gefundenen seyn, und demnach heraus kommen, wenn man jenes durch 2 dividiret, folgends ist $372 \times 3 = 1116$.

§. 180. Wiederum wenn eben die Zahl 372 durch 7 multipliciret, das Factum 2604 bringt, und man sol sie durch 6 multipliciren, so kan

I. Abschnitt. kan man nur die einfache Zahl 372 von dem Product derselben durch 7, welches 2604 ist, abziehen. Es bleibt wenn dieses gethan wird, die Zahl 2232, welches eben das Product der 372 durch 6 ist, so zu finden war.

§. 181. Man hat mit einem Wort nur immer darauf zu sehen, wie der Factor, durch welchen multipliciret werden sol, aus denjenigen Factoren durch welche bereits multipliciret worden ist, entstanden sey, und das gesuchte Factum aus den vorigen eben so zu machen. Es sey 372 durch 7 zu multipliciren, aber allbereits durch 3 multipliciret, wovon das Factum ist 1116, und durch viere, und hievon sey das Factum 1488; Der Factor durch welchen multipliciret werden sol, 7, entstehet, indem man die zwey Factoren, durch welche bereits multipliciret worden ist, zusammen setzet: also entsteht auch das Factum der gegebenen Zahl 372 durch 7, indem man die zwey vorige Producte derselben durch 3, und durch 4 zusammen addiret, und ist demnach dieses Factum $= 1116 + 1488 = 2604$.

§. 182. Nun sey 372 durch 7 multipliciret, und das Factum wie gefunden worden 2604. Ferner sey eben die Zahl durch 3 multipliciret, und das Factum 1116, man sol finden, wie viel komme, wenn man eben die Zahl 372 durch 4 multipliciret. Es entsteht 4 aus den Zahlen 7 und 3, wenn man 3 von 7 abziehet, also wird auch das Factum aus 372 durch 4 entstehen, indem man das Factum 372×3 von dem Producte 372×7, das ist 1116 von 2604 abziehet, und demnach seyn $2604 - 1116 = 1488$.

§. 183. Ferner sey 372 durch 3 multipliciret; und das Factum sey 1116, man sol eben die Zahl durch 6 multipliciren. Der Factor 6 ist der vorige Factor 3 zweymal genommen: also ist auch das gesuchte Factum zwey mal so groß, als das gefundene, und entsteht indem man jenes zweymal nimmet, demnach ist $372 \times 6 = 1116 \times 2 = 2232$.

§. 184. Eben so ist es auch in dem nächst folgenden Fall, da gesetzt wird, es sey noch die Zahl 372 durch 6 multipliciret, und so das Factum 2232 entstanden, man sol aber dieselbe durch 2 multipliciren, der Factor 2 entstehet aus dem vorigen 6, indem man jenen durch 3 dividiret; eben so entstehet auch das Factum aus dem vorigen so allbereit gefunden, indem man jenes durch eben die Zahl 3 theilet, und ist demnach 744.

§. 185. Es wird vielleicht nicht undienlich seyn, wenn wir uns

diese

diese Sache nochmals von forne vorstellen, weil sie von Nutzen seyn kan. Man schreibe die Einheit vor sich, und neben derselben eine andere Zahl nach Belieben als 7, wie diese bey A stehet;

I. Abschnitt.

1	7	A
3	21	B
4	28	C
8	56	D
5	35	E
$2\frac{1}{2}$	$17\frac{1}{2}$	F

Man mache so dann aus der 1 eine andere Zahl nach Belieben 3, und aus der 7 ebenfals eine neue, eben so wie man die 3 aus der 1 gemacht. Diese Zahl ist 21 und steht neben der 3 bey B. Aus diesen Zahlen bey A und B mache man ferner neue Zahlen, indem man sie beyderseits zusammen addiret, wie die bey C entstanden sind, oder die kleinern von der grössern wegnimmet, oder sie beyderseits durch einerley Zahl multipliciret oder dividiret: und auf eben die Art mache man aus den Zahlen bey C und den vorigen noch andere. Wie denn die bey D entstanden sind, indem man die Zahlen bey C durch 2 multipliciret hat, und aus diesen die Zahlen bey E worden sind, indem man von den Zahlen bey D die bey B abgezogen hat: aus den Zahlen bey E aber sind die bey F gekommen, nachdem man die bey E mit 2 getheilet. Es ist klar, daß, wenn man dergestalt verfahren, jede Zahl unter der 7 als die bey D, aus der 7 so entstanden sey, wie die Zahl, die bey eben dem D unter der 1 stehet, aus der Einheit entstanden: denn man hat eben die Weise gebraucht, die Zahl unter der 7 bey D aus der 7 zu machen, nach welcher man die Zahl unter der 1 bey eben dem D aus der Einheit gemacht, I, 101.

§. 186. Da demnach die bey D unter der 7 stehende Zahl 56 aus der 7 eben so entstanden ist, wie die ebenfals bey D unter der 1 stehende Zahl 8 aus der 1 geworden, so ist die Zahl 56 das Factum aus 7 und 8. Und kan also dieses Factum auf gar verschiedene Arten heraus gebracht werden, nachdem man aus dem ersten 1 und 7 andere Zahlen nach Belieben machet, und von diesen wieder auf andere komt, bis endlich die bey D stehende Zahlen heraus gebracht werden.

§. 187. Wil man also überhaupt eine Zahl, als hier 7, durch eine jede andere als 8 multipliciren: so hat man sich nur, wie I, 181. gesaget worden, überhaupt eine Art vorzustellen, wie die 8 aus der Einheit werden kan, deren allzeit unendlich viele sind, und so dann aus 7 andere Zahlen, und aus diesen wieder andere nach eben der Art heraus zu

 brin-

I. Abschnitt.

bringen, nach welcher man aus der 1 andere, und aus diesen wieder andere gemacht hat, bis endlich die 8 entstanden ist.

§. 188. Dieses nun auf die Multiplication anzuwenden, wollen wir uns vorstellen, es sey die Zahl, der wir uns bis anhero immer bedienet 372 zu multipliciren durch 642, da man, dem zufolge, so bereits bekannt ist, sie erstlich durch 2 zu multipliciren hat, hernach durch 4, so dann durch 6. Man kan das zweyte Factum heraus bringen, wenn man das erste gedoppelt nimt, und das dritte, wenn man die zwey erstern addiret. Nemlich $372 \times 2 = 744$, so dann $372 \times 4 = 744 \times 2 = 1488$. Ferner $372 \times 6 = 372 \times 2 + 372 \times 4 = 744 + 1488 = 2232$; und also erhält man die Producte, welche in der Rechnung erfordert werden, auf die Art etwas leichter als durch die unmittelbare Multiplication. Man hat nunmehro, was dergestalt gefunden worden, nur gehörig in Ordnung zu setzen, und so dann zu addiren wie sonst gewöhnlich, aber dabey die Ordnungen der Einheiten gehörig zu beobachten:

```
   372        oder also,      372
   642                        642
  ------                     ------
   744                        744
 1488                        744 :
2232                         744 :
------                      744 : :
238824                      744 : :
                            744 : :
                           --------
                           238824
```

Hätte man eben die Zahl 372 durch 264 zu multipliciren, so wäre eben der Vortheil anzuwenden, und man kan in solchen Fällen die nach und nach heraus gebrachte Producte in der Ordnung setzen, in welcher sie nach und nach kommen, wie nachstehende Rechnung ausweiset:

```
  372
  264
 -----
 744
 1488
2232
------
98208
```

Und hierdurch achten wir genugsam gewiesen zu haben, wie man sich des angewiesenen Vortheils in allen übrigen Fällen bedienen könne.

§. 189.

§. 189. Bey der Division kommen dergleichen Vortheile noch einiger massen besser zu statten. Es sey eine gegebene Zahl 7953847 durch eben die 372 zu dividiren:

I. Abschnitt.

```
D 372)   7953847 | 21381
       A 744:::: |
         -----
          513:::
       B  372:::
         -----
          1418::
       C  1116::
         -----
           3024:
       E   2976:
         -----
            487
       F    372
         -----
            115
```

Hier ist das Product bey A, der Theiler D doppelt genommen: B ist so groß als D; C ist = 3 D, und folgends A + B, und wird also aus dem A und B leicht gefunden. E ist = 8 D, und folgends = 2 C + A, und kan also ebenfals ohne grosse Schwierigkeit gefunden werden: man muß aber jederzeit, wie schon erinnert worden I, 188. auf die Bedeutung der Ziffer wohl Acht haben, und wie die Producte gehörig zu setzen sind.

Gebrauch dieser Vortheile bey der Probe der Multiplication.

§. 190. Wil man sich dieser Bequemlichkeit nicht bedienen, die Rechnung selbst zu erleichtern, so kan man sie wenigstens mit grossem Nutzen gebrauchen, die gemachte Rechnung zu probiren, ob sie richtig sey. Es ist kein Zweifel, daß wenn die Reguln gehörig angewendet werden, jederzeit die durch jede der bisher gezeigten Rechnungsarten gesuchte Zahl ohne Irrthum heraus gebracht werde. Aber man kan in dieser Anwendung fehlen, und es ist gut, daß man etwas habe, wodurch man sich mit aller Wahrscheinlichkeit versichern kan, daß man nicht gefehlet. Und die gewiesene Arten einerley Product heraus zu bringen, geben uns dieses an die Hand; denn wenn man einerley Product auf verschiedene Arten rechnet und würklich einerley heraus bringt, so ist die gröste Wahrscheinlichkeit da, daß man nicht gefehlet habe.

I. Abschnitt.

§. 191. Wir haben I, 66. gewiesen, wie diese Untersuchung, ob man gefehlet habe oder nicht, bey der Addition und Subtraction anzubringen sey. Die Division probiret die Multiplication. Der Quotiente durch den Theiler multipliciret, giebt allezeit die Zahl, welche dividiret worden I, 137. Man kan also diese Multiplication verrichten und sehen, ob der gefundene Quotient dadurch der dividirten Zahl gleich wird. Man muß den ganzen Quotienten nehmen, wie er meistentheils aus einer ganzen Zahl und aus einem Bruch besteht. Oder wenn man nur die ganze Zahl nehmen wil, so muß man derselben so dann die letzt übrig gebliebene Zahl, das ist den Zehler des Bruchs, zusetzen. Diese Summe wird in diesem Fall, wenn richtig gerechnet worden ist, der dividirten Zahl gleich seyn. In dem letzten Exempel der Division I, 189. ist der Quotient

in ganzen Zahlen	21381,
der Divisor war . . .	372
	42762
	149667
	64143
von diesen ist das Factum,	7953732
Und das Uebergebliebene	115
Die Summe davon	7953847 ist die dividirte Zahl.

§. 192. Es ist aber hierbey verdrießlich, daß man erst selbst in der Multiplication, welche man, die etwa begangene Fehler zu entdecken, anstellet, fehlen kan, zweytens aber daß, wenn auch ein Fehler wahrhaftig entdecket worden, man nicht wissen kan wo er stecke, und derowegen gezwungen ist die ganze Rechnung wieder von forne vorzunehmen. Es ist also wohl am besten, wenn man probieret, so oft man in dem Quotienten eine neue Ziffer gefunden, ob dieselbe richtig gesetzet, und alles übrige, so noch ferner dabey zu verrichten war, wohl in Acht genommen worden sey, das ist, ob man wohl multipliciret und subtrahiret habe; Wie das letztere geschehen sol, ist gewiesen I, 53. das erstere ist nichts anders als die Probe der Multiplication.

§. 193. Man kan zu dem Ende, wie I, 190. gewiesen worden, jedes Product auf zwey oder mehrere Arten machen. Ich sol eine gegebene Zahl 79 durch 6 multipliciren, ich thue dieses und bringe 474 heraus. Wil ich wissen ob ich hierinnen nicht gefehlet, so multiplicire ich

ich eben die Zahl durch 3, das Factum wird 237, dieses gedoppelt giebt 474 wie vorher, und diese Uebereinstimmung läst mich nicht anders glauben, als, ich habe weder das erste noch das zweyte mal gefehlet.

Eine andere Probe der einfachen Rechnungsarten.

§. 194. Man hat auch noch eine andere Probe, welche sich zwar bey allen Rechnungsarten anwenden läst, aber nirgends mit grösserer Bequemlichkeit als bey der Multiplication, ich meyne diejenige, welche durch Wegwerfung der 9 geschieht. Der Grund davon ist dieser. Gesetzt, man habe nachfolgende Zahlen zu addiren

```
 5987
  543
  625
   92
 ----
 7247
```

man lasse aber in denselben die Ziffern schlechterdings Einheiten bedeuten, ohne darauf Acht zu haben, von welcher Ordnung diese Einheiten sind; so wird man finden, daß, indem man die erste Säule von Ziffern zusammen setzet, und 17 Einheiten heraus bringt, oder 10+7, man zwar die letztern 7 anmerket, an statt der 10 aber nur 1 schreibet, nemlich eine Einheit von der ersten höhern Ordnung, welche man hier nicht von den übrigen unterscheidet. Demnach läst man 9 Einheiten weg, welche nemlich in den Ziffern nicht geschrieben werden. So ist es auch in der zweyten Säule, da durch die Addition 24, oder 20+4 oder 10+10+4 heraus gebracht wird; man schreibet die 4, und die übrigen 20 Einheiten, die in eben dieser Säule enthalten sind, zeiget man bloß durch eine 2 an, welche in die nächste Stelle gebracht wird; und lässet also wieder von jeden 10 Einheiten die hier vorkommen, deren Neune aus, die nicht geschrieben werden, weil nemlich die Gesetze die Zahlen zu schreiben, die man angenommen hat, auf eine ganz andere Art die vollen Zehen ausdrücken. Eben so verfähret man mit den übrigen Säulen, und es geschicht also in der Addition durch die Ziffer nichts anders, als daß in den vorgegebenen Ziffern die 9 verschiedene mal weggeworffen, und die Ueberreste über die weggeworffene 9 in der Summe angemerket werden.

§. 195. Man werffe nunmehro von der Summe wieder die 9 so oft weg als man kan, ohne auch hier auf die Ordnungen der Einheiten, die von den Ziffern bedeutet werden, Acht zu haben, so bleiben

I. Abschnitt.

in unserm Exempel 2 übrig, welche man erhalten, indem man von allen Ziffern derer Zahlen, die zu addiren waren, 9 so oft weggeworffen, als nur möglich gewesen. Denn erstlich hat man derselben verschiedene weg gethan, indem man die Summe geschrieben, und hernach sind die übrigen, welche in der Summe noch da geblieben, ebenfals weggeworffen worden. Es folget hieraus, daß wenn in eben den Ziffern der Zahlen, welche zu addiren vorgegeben worden, alle 9 welche darin angetroffen worden, oder aus der Addition derselben entstehen, nochmals weggeworffen werden, nunmehro ebenfals die Zahl 2 und keine andere übrig bleiben müsse, ob man gleich einer ganzen andern Ordnung folget, die Ziffern zusammen zu setzen, und aus denselben die 9 heraus zu bringen. Wie denn in dem Exempel, so vor uns stehet, allerdings geschiehet, wenn man in den Reihen oder Zahlen von der linken zur rechten fortgehet. Es ist der Ueberschuß über die 9 aller Ziffern der ersten Reihe 2, in der zweyten ist dieser Ueberschuß 3, in der dritten 4, und in der vierten wieder 2, und wenn man von diesen Ueberbleibselen wieder 9 so oft wegwirft, als man kan, so bleibt, wie in der Summe, 2 übrig, und dergleichen muß allzeit erfolgen, wenn richtig gerechnet worden.

§. 196. Erfolgt es aber, und bleibt in der Summe nach Wegwerffung aller 9, welche man durch die Addition der Ziffer derselben heraus bringt, eben so viel als in den addirten Zahlen nach ebenmäßiger Wegwerfung der 9 übrig bleibt, so kan man glauben, daß richtig gerechnet worden. Ich sage man kan es glauben, denn es folgt nicht untrüglich. Es sind viele Zahlen, welche, wenn man auf die Art verfähret, einerley übrig lassen. Man versetze in unserer Summe die Ziffern, und setze an statt 7247 zum Exempel 7742, so bleibt ebenfals nach Abzug der 9 die Zahl 2 übrig. Man nehme der einen Ziffer etwas ab, und setze es einer andern zu, oder vertheile es unter verschiedene andere, als von der ersten Ziffer nehme man 2, und setze 1 zu der zweyten, und 1 zur dritten, und schreibe also an statt 7247, die Zahl 5357 so bleiben nach Abzug aller 9, nach wie vor 2 übrig.

§. 197. Hiedurch, und weil wegen der Menge der Ziffern, die meistentheils bey der Addition vorkommen, die Probe fast schwerer wird, als die Rechnung selbst, und es also gar leicht ist, sich darin zu verstossen, da man denn nicht wissen kan, ob in der Addition oder der Probe gefehlet worden; wird dieselbe bey der Addition fast unbrauchbar. Bey der Multiplication aber fällt ein grosser Theil dieser Unbequemlichkeit weg. Es sey 7532 durch 4 zu multipliciren. Wir haben hier die Multiplication durch eine wiederhohlte Addition verrichtet,

set, und dasjenige so übrig bleibt, wenn man von einer jeden der zu addirenden Zahl, das ist, von dem Factor 7532 die 9 so oft als es sich thun läst, abziehet, darneben gesetzt, und eben dieses bey der Summe oder dem Product gethan, die Verknüpfungen des gegenwärtigen mit demjenigen, so von der Addition eben I, 195. gesagt worden, desto besser zu zeigen, nemlich bey der Zahl

7532	8
7532	8
7532	8
7532	8
30128	5

welche zu multipliciren war, bleiben 8, und bey dem Product 5. Nun soll man demjenigen, so von der Probe der Addition gesagt worden zu folge, von diesen vier 8 welche übrig geblieben, wieder die 9 so oft wegwerfen als man kan. Dieses Wegwerfen aber geschiehet, wenn man die Zahlen, von welchen 9 wegzuwerfen ist, nur zusammen addiret, in der Summe aber alle Ziffern wieder nur einfache Einheiten gelten läst, und dieselbe zusammen setzet, und vor 12 zum Exempel schreibt 3, vor 32 aber 5, und so ferner. I, 194. Man wird also auch im gegenwärtigen Exempel alle übrig gebliebene 8 zusammen setzen, oder welches eben das ist, die 8 so bey dem 7532 stehet, durch die Zahl derselben oder durch den Factor 4 multipliciren müssen. Die Summe oder das Product 8 × 4 das ist 32, wird 5 Einheiten enthalten, eben so viel als das Factum.

§. 198. Und so ist es allezeit. Die Zahl der Einheiten welche in dem einen Factor nach Wegwerfung der 9 übrig bleibt, durch den andern Factor multipliciret, giebt eine Zahl, in welcher nach ebenmässigem Abzug aller 9 eben so viel übrig bleibt, als in dem Producte, nach dem man aus diesem ebenfals jede 9 Einheiten von welcherley Ordnung sie auch seyn mögen, weggelassen. Und wenn demnach eine Zahl durch eine andere multipliciret worden, und man findet nach dieser angegebenen Wegwerfung der 9 des einen Factors, daß der Ueberschuß, durch den andern Factor multipliciret, eine Zahl heraus bringe, derem Ueberschuß über die 9 eben so groß ist, als der Ueberschuß über die 9 des Products, so ist zu glauben, daß das Product richtig sey. Ich sage, es ist zu glauben. Denn es kan aus dieser Probe die Richtigkeit des Products eben so wenig mit einer vollkommenen Gewißheit erhellen, als wenig bey der Addition die Richtigkeit der Summe aus eben der Probe ohne Widerspruch erhellet. Doch muß man auch die-

I. Abschnitt.

dieses sagen, daß sich hier nicht so leicht ein Fehler einschleichen werde als bey der Addition.

§. 199. Wie nun diese Probe geschickt anzuwenden sey, wird nachstehendes Exempel weisen.

A	3597348	3
	974	
B	14389392	3
C	25181436	3
D	32376132	0
E	3503816952	6

Nachdem man von der Zahl bey A, welche solte multipliciret werden, alle 9 weggelassen, welche in den Ziffern derselben enthalten sind, ist die darneben stehende 3 übrig geblieben. Die Zahl bey A durch 4 multipliciret, giebt das Product B. Wenn man von diesem B wieder Neune so oft wegläst als man kan, bleiben die darneben stehende 3 übrig, und wenn die bey A stehende 3 ebenfals durch 4 multipliciret wird, kommt 12, so hier eben so viel ist als 3. Dieses ist ein Zeichen, daß die Reihe B richtig sey. Wiederum wenn A durch 7 multipliciret wird, kommt C. Der Ueberschuß der Ziffer dieser Zahl über 9 ist die nebenstehende 3. Multipliciret man aber den Ueberschuß bey A ebenfals mit 7, so kommt 21, das ist wieder 3, zum Zeichen, daß auch diese Reihe richtig sey. In der Reihe D ist der Ueberschuß 0, und 3 durch 9 multipliciret giebt 27, das ist ebenfals 9 oder 0. Die Summe der also gefundenen Zahlen 3, 3, 0 ist 6, so viel muß auch in der Summe der Producte B + C + D, oder in dem gesuchten Product E übrig bleiben, wenn die Rechnung richtig ist, wie dieses in dem Exempel sich ergiebet.

§. 200. Auf diese Art probieret man jeden Absatz bey der Multiplication, ehe man weiter gehet, und man versichert sich, so viel geschehen kan, daß in dem vorhergehenden kein Fehler zurück geblieben, welcher in das folgende einen Einfluß haben könte. Auf eben die Art kan untersuchet werden, ob die Producte, der man bey der Division benöthigt ist, richtig gefunden worden, so bald man sie gemacht hat, und ehe man sie anwendet, und auf diese Producte kommt es hauptsächlich an, denn die bey der Division ferner vorzunehmende Subtraction braucht selten einer Probe; findet man eine nöthig, so ist schon gezeiget, §. 66. daß keine bequemer und richtiger sey, als die Addition.

Zwey=

Zweyter Abschnitt.

Von der Berechnung der Brüche.

Gründe der Bruchrechnung.

§. 1.

Nunmehro können wir uns zu den gebrochenen Zahlen wenden, und die Rechnungsarten welche mit denselben vorzunehmen sind, etwas vollständiger erklären. Es ist verschiedenes von denselben bereits angebracht worden, so sich aus den allgemeinen Gründen, welche wir betrachtet haben, unmittelbar herleiten ließ. Wir haben gesehen, daß die Summe zweyer oder mehrerer Brüche von gleicher Benennung gefunden werde, wenn man ihre Zehler zusammen addiret, den Nenner aber stehen lässet: und daß, den Unterschied zweyer Brüche, welche wieder einerley Benennung haben, zu finden, man nur den kleinern Zehler von dem grössern abziehen, und den Ueberschuß an die Stelle des Zehlers eines Bruchs setzen müsse, dessen Nenner der vorige ist, welcher Bruch der gesuchte Unterschied seyn wird. I, 76. Es ist übrig, daß wir weisen, wie die Addition und Subtraction bey solchen Brüchen zu verrichten sey, welche verschiedene Benennungen haben.

§. 2. Ferner haben wir gewiesen, wie ein jeder Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren sey, und wir haben zwey Arten dieses zu verrichten angegeben. Entweder multipliciret man den Zehler des Bruchs $\frac{4}{9}$ durch die multiplicirende ganze Zahl 3, und läßt den Nenner stehen: I, 86. oder man dividiret den Nenner des Bruchs durch die gedachte Zahl, durch welche man den Bruch multipliciren soll, und verändert den Zehler nicht. I, 146. Die auf die Art heraus gebrachte Brüche $\frac{12}{9}$ und $\frac{4}{3}$ sind das Product, welches man suchte: sie sind einander gleich, und es bedeutet einer eben so viel als der andere, wenn nemlich die ganze Einheit, auf welche sie sich beziehen, einerley ist, wie dieses bey allen gleichen Zahlen zum Grunde gesetzt werden muß.

§. 3. Eben so haben wir auch zwey Arten gesehen, nach welchen ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiret werden kan. Man dividi-

II. Abschnitt.

vidiret entweder den Zehler des Bruchs $\frac{6}{7}$ durch die Zahl 3, durch welche der Bruch dividiret werden soll, und läst den Nenner unverändert, I, 141. oder man multipliciret den Nenner desselben durch eben die Zahl 3. I, 143. Die dergestalt heraus gebrachte Brüche $\frac{2}{7}$, oder $\frac{6}{21}$ sind der Quotient welchen man suchte. Alles dieses ist gezeigt worden, und wir können hier voraus setzen, daß es bekannt sey, und uns zu dem wenden, so noch rückständig ist, wie man eine jede ganze oder gebrochene Zahl durch einen Bruch multipliciren oder dividiren soll.

§. 4. Der Grundsatz auf welchen wir hiebey bauen werden, ist ebenfals bereits angemerket worden, daß nemlich, wenn man eine Zahl, sie mag ganz oder gebrochen seyn, durch eine andere ganze Zahl erst multipliciret, und hernach dividiret, oder erst dividiret und hernach multipliciret, die Zahl dadurch nicht verändert werde. I, 137. Es ist derselbe auch in dem Fall richtig, wenn man eine Zahl durch einen Bruch multipliciret, und hernach das Product durch eben den Bruch dividiret, oder wenn man sie erst durch den Bruch dividiret und hernach multipliciret. Die Zahl wird dadurch eben so wenig verändert, als wenn man diese Rechnungsarten mit einer ganzen Zahl verrichtet. Allein wir haben von der Multiplication und Division vermittelst gebrochener Zahlen noch keinen vollkommen deutlichen Begrif beygebracht, und aus der Ursach uns enthalten, den Satz in seinem vollkommenen Inbegrif vorzutragen. Er ist übrigens an sich selbst klar. Denn was ist deutlicher, als daß wenn ich ein Ding verdoppele oder dreyfach nehme, und, was dergestalt heraus gebracht worden, wieder in zwey oder drey gleiche Theile theile, ein solcher Theil dasjenige seyn müsse, so ich vorher verdoppelt oder drey mal grösser gemacht. Eben so klar ist es, daß wenn man ein Ding erstlich in drey oder fünf gleiche Theile theilet, dieser Theile aber hernach drey oder fünfe nimt, man dasjenige Ganze wieder erhalte, so im Anfang da gewesen.

§. 5. Man setze diese Begriffe zusammen, und wende sie auf die Brüche an. Es sey der Bruch $\frac{2}{12}$ gegeben. Man multiplicire ihn durch 2, welches man thun kan, indem man den Zehler mit 2 multipliciret, wodurch $\frac{4}{12}$ kommt, oder indem man den Nenner durch 2 dividiret, wodurch man $\frac{2}{6}$ erhält. Jedweden dieser Brüche dividire man wieder durch 2, so wird aus dem ersten welcher $\frac{4}{12}$ war, wenn man die Division des Bruchs durch die Division des Zehlers verrichtet $\frac{2}{12}$, und aus dem zweyten wird, wenn man nach eben der Art di-

vidi-

vidiret, $\frac{1}{6}$. Bedienet man sich aber zur Division der Brüche der Multiplication des Nenners, so wird aus dem erstern Product $\frac{4}{12}$ nunmehro $\frac{4}{24}$, und aus dem zweyten $\frac{2}{6}$ wird $\frac{2}{12}$. Diese vier Brüche demnach $\frac{2}{12}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{24}$, $\frac{2}{12}$ bedeuten einerley, II, 4. allein der erste und der letzte ist von dem gegebenen gar nicht unterschieden, wohl aber sind der zweyte und der dritte durch ganz andere Zahlen ausgedrückt.

II. Abschnitt.

§. 6. Es entstunde der zweyte dieser Brüche $\frac{1}{6}$ aus der Division des Zehlers und des Nenners des zuerst gegebenen Bruchs $\frac{2}{12}$ durch die ganze Zahl 2, und der dritte $\frac{4}{24}$ kam durch die Multiplication des Zehlers und des Nenners eben desselben Bruchs $\frac{2}{12}$, durch eben die Zahl 2. Wenn man demnach den Zehler und den Nenner eines gegebenen Bruchs durch einerley ganze Zahl multiplicirет oder dividiret, und die Producte oder die Quotienten vor die Zehler und Nenner neuer Brüche annimt, so haben diese Brüche eben die Bedeutung, welche der gegebene hatte, ob sie zwar grössere Zahlen zu Zehlern und Nennern haben, wenn man sich der Multiplication bedienet, und kleinere, wenn die Division gebraucht worden.

§. 7. Zu grösserer Deutlichkeit haben wir einerley Stück der ganzen Linie AB drey mal vorgestellet, welches die Brüche $\frac{4}{12}$, $\frac{2}{6}$ und $\frac{1}{3}$ ausdrücken. Dieses Stück ist AC: in der ersten Linie ist AC $\frac{4}{12}$, in der zweyten $\frac{2}{6}$, in der dritten $\frac{1}{3}$. Und man siehet, daß $\frac{2}{6}$ so viel sey als $\frac{4}{12}$, weil in dem letztern Bruch die Theile zwar nur halb so groß genommen worden sind, als in dem erstern, derselben aber auch im Gegentheil zwey mal mehr angenommen worden, das Stück AC auszumachen. Eben so sind die Theile des Bruchs $\frac{1}{3}$ wieder zwey mal grösser als die Theile des Bruchs $\frac{2}{6}$, aber im Gegentheil hat man derer bey dem letzten Bruch $\frac{2}{6}$, zwey mal so viel als bey dem ersten $\frac{1}{3}$, durch welche Verminderung der Grösse der Theile, und Vermehrung der Zahl derselben, eben erhalten worden, daß man einmal so viel als das andere bekommen hat, nemlich AC. I, 14.

F. 18.

Das Aufheben der Brüche.

§. 8. Nun kan das so genannte Aufheben der Brüche, da man nemlich eben das Stück des Ganzen, so durch eine gebrochene Zahl ausgedrücket worden, durch eine andere bezeichnen soll, welche kleinere Zahlen zum Zehler und Nenner hat, nicht die geringste Schwierigkeit mehr haben. Es sey der Bruch $\frac{9}{12}$ durch kleinere Zahlen auszudrücken. Man suche eine Zahl welche den Zehler 9 und den Nen-

M 2 ner

II. Abschnitt. ner 12 zugleich genau theilet. Diese ist hier 3. Man dividire so dann eben besagte zwo Zahlen durch diese gefundene 3, und setze den Quotienten von der Division des Zehlers, welcher 3 ist, zum Zehler, und den Quotienten von der Division des Nenners 4 zum Nenner des neuen Bruchs $\frac{3}{4}$, welcher dem gegebenen $\frac{9}{12}$ gleich seyn, II, 6. und weil die Division gebraucht worden, aus kleinen Zahlen bestehen wird.

§. 9. Es werden solche Zahlen genommen, welche den Zehler und den Nenner ohne neue Brüche theilen, nicht als ob man nothwendig dergleichen wehlen müste, sondern weil auf diese Art Brüche kommen, deren Nenner und Zehler ganze Zahlen sind, welche sich am leichtesten übersehen lassen. Denn daß man einen Bruch leichter übersehen, und von seinem Werth sich einen vollkommenen Begrif machen möge, ist der Zweck der Arbeit, welche wir hier lehren, weil man die Grösse des Bruchs leichter einsiehet, wenn die Zahlen, durch welche er ausgedrücket wird, klein, als wenn sie groß sind. Wenn man dieses nicht achtet, oder wenn sich besondere Umstände hervor thun, kan man auch den Zehler und Nenner durch solche Zahlen theilen, welche bey einer oder der andern dieser Zahlen einen neuen Bruch lassen. Will man in dem vorigen Exempel zur Theilung die Zahl 4 gebrauchen, so wird der mit kleinern Zahlen geschriebene Bruch $\frac{2\frac{1}{4}}{3}$, und dieser bedeutet, wie bereits I, 142. angezeiget worden ist, daß man die ganze Einheit in drey gleiche Theile theilen müsse, und solcher Theile 2, und über dieses noch $\frac{1}{4}$ eines solchen Theils annehmen, um dasjenige zu erhalten, so der Bruch $\frac{2\frac{1}{4}}{3}$ ausdrücket.

§. 10. Eben so kan man es auch bey dem Bruch $\frac{4}{9}$ machen; man kan den Nenner und den Zehler durch 4 dividiren, kommt der Bruch $\frac{1}{2\frac{1}{4}}$, welcher anzeiget, daß man die Einheit so theilen müsse, daß in dieselbe zwey gleiche Theile, und über das $\frac{1}{4}$ eines solchen Theils, kommen, und daß eins von diesen Theilen dasjenige sey, so die gebrochene Zahl ausdrücket. *Fig. 19.* Die Linie AB, in der 19 Figur, welche die Einheit seyn sol, ist so getheilet. AC ist ein Theil, CD = AC der andere, und DB ist $\frac{1}{4}$ von AC. Demnach ist AC eins von den Theilen, deren zwey und $\frac{1}{4}$ auf AB gehen, das ist, AC ist derjenige Theil der ganzen AB, welchen der Bruch $\frac{1}{2\frac{1}{4}}$ ausdrücket. Man kan sich also solcher Zahlen, welche den Zehler oder den Nenner nicht genau theilen,

len, bedienen, aber man muß sich derselben nicht anders bedienen, als wenn man Bequemlichkeit davon hat. Dieses aber kommt auf die Einsicht eines jeden an, und man kan davon keine allgemeine Reguln geben.

II. Abschnitt.

§. 11. Indessen siehet man auch hieraus, wie man die gebrochene Zahlen aus den Nennern und Zehler der Brüche bringen könne, wenn welche in denselben vorkommen. Man hat zu dem Ende nichts zu thun, als so wohl den Nenner als den Zehler des Bruchs durch den Nenner desjenigen Bruchs zu multipliciren, welcher in demselben vorkommt. Es sey, zum Exempel, aus dem Nenner des Bruchs $\frac{2\frac{2}{3}}{5}$ der Bruch $\frac{2}{3}$ wegzuschaffen: so multiplicire ich so wohl den Zehler desselben $2\frac{2}{3}$ durch 3, den Nenner des Bruchs $\frac{2}{3}$, welcher in dem Zehler vorkommt; als auch den Nenner 5, dadurch kommt vor den Zehler 8, I, 147. und vor den Nenner 15, und der Bruch, welcher dem gegebenen $\frac{2\frac{2}{3}}{5}$ gleich ist, ist $\frac{8}{15}$; und dieses fliesset auch unmittelbar aus den gegebenen Grundsätzen. II, 6.

§. 12. Eben so wird auch der Bruch aus dem Nenner des Bruchs $\frac{2}{3\frac{4}{5}}$ weggebracht. Ich multiplicire so wohl den Zehler 2 als den Nenner $3\frac{4}{5}$ dieses Bruchs durch 5, den Nenner, welcher in dem Bruch $\frac{4}{5}$ befindlich ist. Da denn durch die Multiplication des Zehlers 10 und durch die Multiplication des Nenners 15 + 4, das ist 19 kommt. Demnach ist der Bruch, welcher dem gegebenen $\frac{2}{3\frac{4}{5}}$ gleich ist, $\frac{10}{19}$. Solten so wohl in dem Zehler als in dem Nenner dergleichen Brüche vorkommen, wie zwar sehr selten geschiehet: so würde man nach dieser Anweisung erst denjenigen, welcher in dem Zehler enthalten ist, und so dann auch denjenigen, welcher sich in dem Nenner befindet, fortschaffen müssen. Bloß nachstehendes Exempel kan weisen, wie dieses geschehe. Der gegebene Bruch sey $\frac{2\frac{1}{3}}{7\frac{2}{5}}$. Multipliciret man nun die beyden Glieder desselben durch 3, so kommt der Bruch $\frac{7}{21\frac{6}{5}}$, welcher dem vorigen gleich ist, und aus welchem der noch rückständige Bruch $\frac{6}{5}$ weggebracht werden kan, wenn man die Glieder desselben mit 5 multipliciret, wodurch man den verlangten Bruch $\frac{35}{111}$ erhält.

II. Abschnitt.

§. 13. Was aber diejenige Zahlen anlangt, welche die Zehler und Nenner der Brüche genau theilen, so wird hernach gewiesen werden, wie sie zu finden sind; sie fallen einem aber auch ohne diesen Reguln meistentheils ohne sonderliche Schwierigkeit bey. Man thut am besten, wenn man unter allen gemeinschaftlichen Theilern des Zehlers und Nenners eines Bruchs den grösten nimt, denn dadurch bekommt man gleich Anfangs die kleinsten Zahlen, durch welche ein Bruch ausgedrücket werden kan. Man kan aber auch durch eine wiederhohlte Division endlich zu der kleinsten Benennung gelangen, wenn sich der Zehler und der Nenner des Bruchs durch mehr als eine Zahl genau dividiren lassen. Also wird $\frac{12}{36}$, wenn man den Zehler und den Nenner durch 3 dividiret, mit kleinern Zahlen ausgedrücket in dem Bruch $\frac{4}{12}$, wenn man hier nochmals den Zehler und Nenner durch 2 theilet, bekommt man einen Bruch, der eben so viel als der vorige bedeutet, und noch kleinere Zahlen hat $\frac{2}{6}$, und dessen seine Zahlen wieder durch 2 dividiret, geben die allerkleinste Benennung, welche eben das ausdrücken kan, so in dem Bruch $\frac{12}{36}$ enthalten ist, man bekommt nemlich durch diese Division $\frac{1}{3}$, welches man auf einmal erhalten hätte, wenn man gleich Anfangs den Zehler und den Nenner des gegebenen Bruchs durch 12 getheilet hätte.

§. 14. Dieses wäre überflüssig genug dasjenige einzusehen, welches wir gegenwärtig insonderheit zu zeigen vorgenommen, wie man nemlich einen jeden Bruch zu kleinern Benennungen bringen könne. Allein einige Anwendungen, welche wir von dieser Sache ins künftige machen werden, erfordern, daß wir uns noch etwas weniges aufhalten, und bemerken, daß eben durch diese Regul sich ein unächter Bruch in ganze Zahlen verwandeln lasse, so oft dieses geschehen kan. Denn $\frac{3}{1}$ ist nichts anders als drey ganze Einheiten, I, 34. und so viel als 3; $\frac{5}{1}$ ist so viel als 5, und überhaupt ein jeder Bruch dessen Nenner 1, ist einer ganzen Zahl, nemlich seinem eigenen Zehler, gleich.

§. 15. Demnach heisset einen unächten Bruch auf den Nenner 1 bringen, oder an die Stelle eines Bruchs einen andern schaffen, dessen Nenner 1 ist, so viel, als eine ganze Zahl finden, welche dem unächten Bruch gleich ist. Denn mit ächten Brüchen gehet dieses niemals an. Zum Exempel, wenn man in dem Bruch $\frac{6}{3}$ den Zehler und den Nenner durch 3 dividiret, so bekommt man $\frac{2}{1}$, welches so viel ist als $\frac{6}{3}$, und auch so viel als 2, und man hat an die Stelle des unächten Bruchs eine ganze Zahl gefunden, welche ihm gleich ist.

§. 16. Man

§. 16. Man siehet, daß dieses allzeit geschiehet, wenn man zum gemeinschaftlichen Theiler des Zehlers und des Nenners den Nenner selbst annimt, und daß es auf eine andere Art nicht geschehen könne, und daß demnach ein Bruch dessen Zehler sich durch den Nenner nicht genau theilen läst, sich nicht in eine ganze Zahl verwandeln lasse, welche keinen Bruch bey sich hätte. So kan man die Zahl $\frac{21}{7}$ in die ganze Zahl $\frac{3}{1} = 3$ verwandeln, wenn man den Zehler so wohl als den Nenner durch den Nenner 7 theilet, aber $\frac{24}{7}$ läst sich nicht in eine dergleichen Zahl verwandeln, sondern man bekommt, wenn man die Regul hier anwenden wil, nichts anders als $\frac{3\frac{3}{7}}{1}$ das ist $3\frac{3}{7}$ von der Einheit. Ein sehr geringes Nachdenken wird uns beybringen, daß diese Anweisung einen unächten Bruch in eine ganze Zahl zu verwandeln eben die sey, welche vorher gezeiget worden ist, I, 140.

§. 17. Wir schliessen hieraus: wenn ein Bruch sich nicht zu kleinern Benennungen bringen läst, so ist es auch nicht möglich, daß er einer ganzen Zahl gleich sey. Denn wenn ein Bruch einer ganzen Zahl gleich seyn sol, so muß er sich auf die allerkleineste Benennung, welche 1 ist, bringen lassen. Kan aber ein Bruch gar nicht zu kleinerer Benennung gebracht werden, so läst er sich auch noch viel weniger auf die kleinste Benennung 1 bringen. Kehret man aber dieses um, so siehet man auch, daß hinwiederum eine jede ganze Zahl in einen Bruch von einer gegebenen Benennung verwandelt werde, wenn man die ganze Zahl durch den gegebenen Nenner multipliciret, und das Product zu dem Zehler des Bruchs annimt. Die Zahl 5 zum Exempel ist so viel als $\frac{5 \times 3}{3} = \frac{15}{3}$. Und eben so kan man aus $5\frac{2}{3}$, die Brüche $\frac{15}{3} + \frac{2}{3}$, und aus $5 - \frac{2}{3}$, $\frac{15}{3} - \frac{2}{3}$ machen.

Zween Brüche zu einerley Benennung zu bringen.

§. 18. Wenn man zwey Brüche mit einander vergleichen und sagen sol, welcher unter beyden grösser oder kleiner sey als der andere, so gehet dieses zum öftern schwer an, wenn sie verschiedene Nenner haben, wie man befinden wird, wenn man sich vornimt zu sagen, welcher von den beyden Brüchen $\frac{5}{13}$ oder $\frac{11}{27}$ grösser oder kleiner sey, als der andere. Dergleichen Brüche kan man auch nicht wohl zusammen setzen, oder einen derselben von dem andern abziehen, so lang die Nenner verschieden sind. Wenigstens kan dieses nach der bisherigen Anweisung

II. Abschnitt.

sung keines weges geschehen. Denn wenn die Nenner verschieden sind, sind die Theile deren Anzahl die Zehler ausdrücken, von verschiedener Grösse, und lassen sich, so lang man sie als solche Einheiten betrachtet, nicht zusammen setzen, und läst sich eine Zahl derselben von einer andern nicht wegnehmen. I, 68. Ich kan zwar leicht sagen wie viel 5 und 11 ist, nemlich 16, aber wie viel ist $\frac{5}{13}$ und $\frac{11}{17}$ zusammen gesetzt, vielleicht $\frac{16}{13}$? aber warum nicht lieber $\frac{16}{17}$, oder vielmehr keines von beyden? Denn in der That kan $\frac{5}{13}+\frac{11}{17}$ eben so wenig $\frac{16}{13}$ oder $\frac{16}{17}$ seyn, als 5 Thaler und 11 Gulden, 16 Thaler oder 16 Gulden ausmachen können.

§. 19. Es ist demnach nicht allein von grosser Bequemlichkeit, sondern auch nothwendig, daß wir zwey Brüche zu gleichen Benennungen zu bringen, das ist, an die Stelle zweyer Brüche zwey andere zu schaffen wissen, welche jenen beyden gleich sind, und deren Nenner Zahlen von einerley Grösse sind. Die Sache ist leicht. Man multipliciret so wohl den Zehler als den Nenner eines jeden der gegebenen Brüche durch den Nenner des andern. Oder, damit man sich desto weniger verwirre, so setzet man zu jedem der gegebenen Brüche den Nenner des andern, und multipliciret so dann so wohl den Zehler als den Nenner desselben Bruchs durch die Zahl, die man ihm beygesetzet hat. Zum Exempel: ich sol zwey Brüche $\frac{4}{5}$ und $\frac{2}{3}$ unter einerley Benennung bringen: so multiplicire ich den Zehler so wohl als den Nenner des ersten Bruchs $\frac{4}{5}$ durch 3, den Nenner des andern Bruchs, es kommt dadurch $\frac{12}{15}$: und wiederum multiplicire ich so wohl den Zehler als den Nenner des andern Bruchs $\frac{2}{3}$ durch den Nenner des ersten 5, wodurch $\frac{10}{15}$ erhalten wird. Diese zwey Brüche sind die gesuchten. Sie sind den gegebenen zweyen gleich, nemlich $\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$, und $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$, sie haben aber auch einerley Benennung. Der Grund dieser Arbeit ist ohne Schwierigkeit einzusehen.

§. 20. Die Brüche nemlich, welche man suchte, solten erstlich den gegebenen Brüchen gleich seyn. Es ist leicht einzusehen, daß diejenige Brüche, welche nach unserer Anweisung gemacht worden, diese Eigenschaft haben. $\frac{12}{15}$ ist dem Bruch $\frac{4}{5}$ gleich, weil jener aus diesem entstanden ist, indem so wohl der Zehler desselben als auch der Nenner durch die Zahl 3 multipliciret worden. Aus eben dem Grund ist auch der an statt des zweyten Bruchs $\frac{2}{3}$ gefundene neue $\frac{10}{15}$ demselben gleich, weil er ebenfals entstanden ist, indem man so wohl den Zehler als

den

den Nenner von jenem durch einerley Zahl, nemlich durch 5 multiplicirет hat. Denn wir haben gesehen, daß durch solche Multiplicationen der Werth der Brüche, oder dasjenige so sie bedeuten, nicht verändert wird, man mag zur Multiplication eine Zahl annehmen was man vor eine wil. II, 6. Zweytens sollen eben diese gesuchte Brüche einerley Benennung haben. Auch dieses wird durch eben die Multiplicationen erhalten. Vermöge derselben wird der Nenner desjenigen Bruchs, welchen wir zuerst gefunden, $\frac{12}{15}$ erhalten, indem man den Nenner des ersten der gegebenen Brüche 5 durch den Nenner des andern 3 multipliciret. Also ist der Nenner dieses Bruchs 15 das Product aus 5 und 3, den zweyen Nennern der gegebenen Brüche $\frac{4}{5}$ und $\frac{2}{3}$, der Nenner aber des zweyten gefundenen Bruchs $\frac{10}{15}$ kommt, wenn man den Nenner des zweyten der gegebenen Brüche durch den Nenner des ersten multipliciret, und ist demnach wieder das Factum aus den zwey Nennern der gegebenen Brüche. Es können aber einerley Factoren niemals verschiedene Producte bringen, I, 87. und demnach können auch die Nenner, welche man nach der gegebenen Anweisung heraus bringt, unmöglich verschieden seyn.

§. 21. Eben so ist es in allen übrigen Fällen. Sol man die zwey Brüche $\frac{5}{6}$ und $\frac{8}{9}$ unter einerley Benennung bringen, so müssen die Multiplicationen ihrer Zahlen vorgenommen werden, welche nachfolgende Zeichen ausdrücken : $\frac{9\times5}{9\times6}$ und $\frac{6\times8}{6\times9}$, aus welchen alles was gesagt worden, daß nemlich die Brüche, welche man heraus bringet, denen gegebenen gleich seyn und einerley Benennung haben werden, leicht und kurz einzusehen ist. Die Brüche selbst werden demnach folgende seyn $\frac{45}{54}$ und $\frac{48}{54}$. Und nunmehro sind die gegebenen Brüche $\frac{5}{6}$ und $\frac{8}{9}$ leicht mit einander zu vergleichen, und man kan ohne Schwierigkeit sagen, welcher von beyden der grössere sey. $\frac{5}{6}$ ist so viel als $\frac{45}{54}$, und $\frac{8}{9}$ ist dem Bruch $\frac{48}{54}$ gleich, nun ist dieser Bruch $\frac{48}{54}$ ohnstreitig grösser als $\frac{45}{54}$, derowegen muß auch $\frac{8}{9}$ mehr seyn als $\frac{5}{6}$.

Brüche von verschiedenen Benennungen zu vereinigen.

§. 22. Man kan aber auch nunmehro einen Bruch finden, welcher so groß ist als die Summe der zwey gegebenen Brüche $\frac{5}{6}$ und $\frac{8}{9}$, denn weil $\frac{5}{6}=\frac{45}{54}$ und $\frac{8}{9}=\frac{48}{54}$, so muß die Summe der zwey erstern Brü-

 che

II. Abschnitt.

che $\frac{5}{6}+\frac{8}{9}$ nothwendig so groß seyn, als die Summe der zweyen letztern $\frac{45}{54}+\frac{48}{54}$, denn wenn man gleiches zu gleichen hinzu thut, können unmöglich ungleiche Summen kommen. Diese letztere Summe aber kan man durch einen einzigen Bruch ausdrücken, welcher entstehet, indem man die zwey Zehler derselben zusammen setzet, und den Nenner stehen lässet, dergestalt $\frac{45+48}{54}$, oder $\frac{93}{54}$, wie oben I, 76 gelehret worden. Dieser Bruch $\frac{93}{54}$ ist also die Summe der gegebenen Brüche $\frac{5}{6}+\frac{8}{9}$. Und so verfähret man allezeit, wenn man zwey Brüche, welche verschiedene Benennungen haben, addiren, und ihre Summe durch einen einzigen Bruch ausdrücken sol. Man bringt sie erstlich unter einerley Benennung, und addiret so dann die also gefundene Brüche. Man siehet leicht, daß hieraus folge $5\frac{2}{3}$ sey so viel als $\frac{15+2}{3}=\frac{17}{3}$, I, 140: und daß man überhaupt nach diesem Exempel jede Zahl, welche aus einer ganzen und aus einem Bruch bestehet, in einen unächten Bruch verwandeln könne.

§. 23. Eben dieses ist auch von der Subtraction zu sagen. Man sol den kleinern dieser Brüche $\frac{5}{6}$ von dem grössern $\frac{8}{9}$ wegnehmen: so bringe man sie wieder unter einerley Benennung, und schreibe an statt $\frac{5}{6}$ nach der gegebenen Anweisung $\frac{45}{54}$, und an statt $\frac{8}{9}$ setze man $\frac{48}{54}$, und ziehe so dann den ersten dieser Brüche von dem letztern ab: welches, weil sie eine Benennung haben, gar leicht geschehen kan, I, 76. indem man nemlich nur den kleinern Zehler von dem grössern wegnimt, und den Nenner stehen lässt. Es wird, wenn dieses geschiehet, der Unterschied gefunden, welcher ist $\frac{48-45}{54}$, oder $\frac{3}{54}$.

§. 24. Man schliesset hieraus leicht, daß der Unterschied von 5 und $\frac{2}{3}$ sey $\frac{15}{3}-\frac{2}{3}=\frac{15-2}{3}=\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}$. Doch kan man dieses besser folgender massen finden, wenn nur der Bruch, welcher abgezogen werden sol, ächt ist. $5-\frac{2}{3}$ ist so viel als $4+1-\frac{2}{3}$. Nun ist $1=\frac{3}{3}$, also $4+1-\frac{2}{3}=4+\frac{3}{3}-\frac{2}{3}$, welches wieder, wie leicht zu sehen, so viel ist als $4+\frac{3-2}{3}$, oder $4\frac{1}{3}$. Man verwandele nemlich nur eine Einheit der ganzen Zahl in einen Bruch, ziehe von diesem Bruch den ächten Bruch ab, welcher von der ganzen abgezogen werden sol, und setze das Ueberbleibsel zu der um 1 verminderten ganzen Zahl.

§. 25. Man braucht auch nichts mehrers, als daß man zwey Brüche unter einerley Benennung zu bringen wisse, so viele Brüche

von

von verschiedenen Benennungen als man wil, zu vereinigen, das ist, diejenigen unter verschiedenen gegebenen Brüchen zusammen zu addiren, welche zu addiren sind, und diejenige von der Summe abzuziehen, welche man abziehen sol. Zum Exempel, man sol einen Bruch schaffen, welcher so viel beträgt als die nachstehende Reihe von Brüchen, nach Anweisung der ihnen vorgesetzten Zeichen + und —

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8}$$

so mache man erstlich $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}$. Man bringe nemlich diese Brüche unter einerley Benennung, so wird $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, und $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, und demnach $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$. Folgends ist auch $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$ so viel als $\frac{1}{6} + \frac{2}{5}$, und man darf also nur, um die erstern drey Brüche zu vereinigen, die zwey letztern vereinigen. Unter einerley Benennung ist $\frac{1}{6} = \frac{5}{30}$, und $\frac{2}{5} = \frac{12}{30}$, demnach ist auch $\frac{1}{6} + \frac{2}{5}$ so viel als $\frac{5+12}{30}$, oder $\frac{17}{30} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$. Also ist ferner $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{7}$ so viel als $\frac{17}{30} + \frac{1}{7}$. Diese Brüche aber sind unter einerley Benennung so viel als $\frac{119}{210}$ und $\frac{30}{210}$ und demnach machen unsere vier Brüche zusammen $\frac{149}{210}$. Eben so verfähret man auch, die vier ersten Brüche mit dem allerletzten zu vereinigen. Wir haben gefunden, daß jene zusammen so viel bringen als $\frac{149}{210}$, der letzte Bruch ist $\frac{3}{8}$ und sol von jenem abgezogen werden. Man bringet wieder diese Brüche unter einerley Benennung, so werden sie $\frac{1192}{1680}$ und $\frac{630}{1680}$, und wenn man den letztern dieser Brüche von dem erstern abziehet, so bleibt der Ueberschuß $\frac{562}{1680}$. Und dieses ist eben der Bruch, welcher allen gegebenen Brüchen, wie sie mit ihren Zeichen verknüpft stunden, $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8}$, gleich ist, welchen man ferner zu kleinern Benennungen bringen kan, wenn man den Zehler und den Nenner durch 2 dividiret. Es wird dadurch $\frac{562}{1680} = \frac{281}{840}$, und diese Benennung ist die kleinste zu welcher er kan gebracht werden.

§. 26. Eben so verfähret man bey der Vereinigung nachstehender Brüche:

$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} - \frac{1}{2} + \frac{3}{7}$. Die erstern zwey unter einerley Benennung sind $\frac{10}{15} - \frac{12}{15}$, und betragen also zusammen $-\frac{2}{15}$. Dieser Bruch mit dem dritten der gegebenen $-\frac{1}{2}$ wird unter einerley Benennung $-\frac{4}{30} - \frac{15}{30}$, und folgends geben beyde zusammen $-\frac{19}{30}$. Und wenn man diesen Bruch mit dem vierten der gegebenen $\frac{3}{7}$ unter einerley Benennung bringet, so bekommt man $-\frac{133}{210} + \frac{90}{210}$, welches so viel ist als $-\frac{43}{210}$. Nemlich die Summe der Brüche vor welchen das Zeichen — stehet ist hier grösser als die Summe der Brüche welche mit + bezeichnet sind, es ist also der Ueberschuß von der Art der erstern. I, 72.

II. Abschnitt.

§. 27. Dergestalt ist dasjenige, so wir angegeben, sichtlich, daß nemlich, um verschiedene Brüche, wie viel ihrer auch an der Zahl seyn mögen, zu vereinigen, man nichts weiter nöthig habe, als daß man wisse, wie zwey Brüche unter einerley Benennung zu bringen sind, und es geschiehet auch auf die angewiesene Art diese Vereinigung fast am allergeschwindesten und leichtesten, insonderheit wenn man in Acht nimt, daß, so bald man einen Bruch durch die Addition oder Subtraction zweyer andern gefunden, man denselben erst zu den kleinsten Benennungen bringe, ehe man weiter fortgehet. Denn auf die Art bekommt man niemals mit überflüßig grossen Zahlen zu thun. Wir halten vor unnöthig, diese leichte Anmerkung mit einem Exempel zu erläutern.

Drey oder mehrere Brüche unter eine Benennung zu bringen.

§. 28. Doch ob zwar zum Behuf der Addition und Subtraction nicht nothwendig erfordert wird, daß man mehr als zwey Brüche unter einerley Benennung zu bringen wisse, so kan doch dieses bey andern Rechnungen zuweilen erfordert werden. Es ist aber auch diese Sache nicht sonderlich schwer einzusehen. Es seyn die Brüche $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{4}{9}$ alle unter einerley Benennung zu bringen. So multiplicire man erstlich alle Nenner durch einander, ausser dem Nenner des ersten Bruchs, und setze das Product, um sich desto weniger zu verwirren, und den Grund dieser Arbeit desto deutlicher einzusehen, dem ersten Bruch an die Seite, nemlich $4 \times 7 \times 9$ ist $= 252$, und dieses Factum wird neben den ersten Bruch dergestalt geschrieben 252) $\frac{2}{3}$. Ebenermassen multiplicire man alle Nenner aller Brüche ausser dem zweyten in einander, und setze das Product aus denselben $3 \times 7 \times 9$, das ist 189 neben dem zweyten Bruch dergestalt 189) $\frac{3}{4}$. Auch multiplicire man alle Nenner ausser dem Nenner des dritten Bruchs, und setze das Product $3 \times 4 \times 9$ oder 108 neben diesem dritten Bruch 108) $\frac{5}{7}$. Und endlich mache man das Product aus den Nennern aller Brüche ausser dem letzten, welches ist $3 \times 4 \times 7$, oder 84, und setze dieses Product dem letzten Bruch zur Seite: 84) $\frac{4}{9}$. Nachdem dieses alles geschehen, ist nichts übrig, als daß man die Zahlen eines jeden Bruchs durch die neben ihm gesetzte Producte multiplicire.

§. 29. Es wird dadurch an die Stelle des ersten Bruchs $\frac{2}{3}$ gefunden $\frac{504}{756}$, und es ist klar, daß dieser Bruch dem ersten $\frac{2}{3}$ gleich sey.

Was

Was aber seinen Nenner anlangt, so ist derselbe ein Factum aus allen Nennern aller gegebenen Brüche. Denn die demselben beygesetzte Zahl 252 war 4×7×9, ein Factum aus allen Nennern aller Brüche ausser dem ersten. Und indem man den Nenner des Bruchs $\frac{504}{756}$ heraus gebracht, hat man dieses Factum ferner durch den Nenner des ersten Bruchs multipliciret, und ist demnach dieser Nenner allerdings 4×7×9×3. An die Stelle des zweyten Bruchs $\frac{3}{4}$ wird durch eine gleichmässige Multiplication gefunden $\frac{567}{756}$, dessen Gleichheit mit dem gegebenen zweyten eben so leicht einzusehen ist. Sein Nenner kommt, indem man das, dem Bruch beygesetzte Factum aus allen Nennern aller übrigen Brüche 3×7×9 ferner durch seinen Nenner 4 multipliciret, und wird demnach wiederum dieser Nenner des, an die Stelle des zweyten der gegebenen, heraus gebrachten Bruchs $\frac{567}{756}$ das Factum 3×7×9×4 aus allen Nennern der vier gegebenen Brüche. Da nun also einerley Zahlen, in was Ordnung man sie auch multipliciren mag, immer einerley Factum bringen, I, 100. so ist es nicht von ohngefehr geschehen, daß dieser Nenner des zweyten Bruchs dem Nenner des ersten gleich geworden. Eben so ist es auch mit dem Bruch, welchen man an die Stelle des dritten setzet, und welchen man findet, wenn man die Zahlen des dritten Bruchs durch die ihm beygesetzte Zahlen multipliciret. Dieser Bruch ist $\frac{540}{756}$: sein Nenner kommt, wenn man die dem Bruch beygeschriebene Zahl 108, welche ein Factum ist aus dem Nenner des ersten, zweyten und vierten Bruchs, 3×4×9, durch den Nenner des dritten Bruchs multipliciret, und wird also wieder 3×4×9×7. Es muß derohalben, weil die vorigen Nenner ebenfals die Producte aller Nenner aller gegebenen Brüchen waren, dieser letzte Nenner einem jeden der vorigen gleich seyn. Und mit dem Bruch $\frac{336}{756}$, welchen man an die Stelle des letzten gefunden, hat es eben die Bewandtniß.

II. Abschnitt.

§. 30. Man siehet auch leicht, daß so bald man einen einzigen Nenner gefunden, man sodann nicht nöthig habe die übrigen ins besondere zu machen, weil derjenige, so zu dem ersten Bruch gefunden worden, auch die richtigen Nenner vor die übrigen alle abgiebet. Sind nun aber dergestalt verschiedene Brüche unter einerley Benennung gebracht, so kan man sie hernach auf einmal, nach Anleitung der ihnen vorgesetzten Zeichen + und —, vereinigen. I, 76.

II. Abschnitt.

Multiplication durch Brüche.

§. 31. Nun haben wir noch die Multiplication und die Division ganzer oder gebrochener Zahlen durch Brüche vor uns, und es ist zu zeigen, wie eine jede gegebene Zahl durch einen Bruch zu multipliciren und zu dividiren sey. Eine genaue Achtsamkeit auf den allgemeinen Begrif der Multiplication, kan uns die Sache gar leicht machen, denn es ist hier in der That nur dasjenige anzuwenden, so schon zum öftern wiederhohlet worden.

§. 32. Gesezt, wir solten eine Zahl 4 oder $\frac{4}{5}$ durch den Bruch $\frac{1}{2}$ multipliciren, so wird erfordert, daß man aus der Zahl 4 oder $\frac{4}{5}$ eine neue Zahl dergestalt mache, wie der multiplicirende Bruch $\frac{1}{2}$ aus der Einheit entstehen kan. I, 79. Es entstehet aber dieser Bruch aus der Einheit, indem man sie in zwey gleiche Theile theilet: I, 82. also wird auch die gegebene Zahl 4 oder $\frac{4}{5}$ in zwey gleiche Theile zu theilen seyn, um das Product zu erhalten; und die Multiplication der Zahl 4 oder $\frac{4}{5}$ durch den Bruch $\frac{1}{2}$ erfordert eigentlich eine Division dieser Zahl durch den Nenner des gegebenen Bruchs 2. Auf eben die Art schliesset man, daß eine ganze oder gebrochene Zahl durch den Bruch $\frac{1}{3}$ multipliciren nichts anders heisse, als dieselbe Zahl durch 3 dividiren, und so ferner. Und daß überhaupt die Multiplication einer Zahl, sie mag ganz oder gebrochen seyn, durch einen Bruch, dessen Zehler 1 ist, nichts anders erfordere, als daß man die gedachte Zahl durch den Nenner dieses Bruchs dividire.

§. 33. Nun aber kan man diese Division durch den Nenner des multiplicirenden Bruchs auf zweyerley Art verrichten, weil dieser Nenner eine ganze Zahl ist. Man dividire durch denselben den Zehler des Bruchs, welcher dividiret werden sol, oder man multiplicire seinen Nenner, so erlanget man auf beyde Arten den Quotienten, II, 3. Demnach wird die Multiplication eines Bruchs durch einen andern dessen Zehler 1 ist, durch eben diese zwo Rechnungsarten verrichtet. Und es ist das Product aus $\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$, oder $= \frac{4}{10}$, und 4 durch $\frac{1}{2}$ multipliciret giebt 2 oder $\frac{4}{2}$. Denn man kan sich 4 als einen Bruch dessen Nenner 1 ist, vorstellen, und auf diesen Bruch $\frac{4}{1}$, was eben gesagt worden, anwenden.

§. 34. Und

II. Abschnitt.

§. 34. Und zwar hat die Multiplication durch einen dergleichen Bruch, welche vermittelst der Division durch den Nenner verrichtet wird, und da man zum Exempel, durch die Multiplication der Zahl $\frac{4}{5}$ durch $\frac{1}{2}$ das Product $\frac{2}{5}$ heraus bringet, so oft sie sich geschickt verrichten lässet, diese Bequemlichkeit, daß sie das Product in kleinern Zahlen darstellet, als diejenige sind, welche durch die Multiplication kommen. Weil aber die genaue Division nicht bey allen Zahlen statt hat, so kan man auch diese Bequemlichkeit nicht überall haben. Es sey $\frac{9}{14}$ durch $\frac{1}{3}$ zu multipliciren, so wird das Factum $\frac{3}{14}$ oder $\frac{9}{42}$, und man hat hier einigen Vortheil, wenn man die Multiplication durch die Division des Zehlers verrichtet. Hat man aber eben die $\frac{9}{14}$ durch $\frac{1}{5}$ zu multipliciren, das ist, durch 5 zu dividiren, so giebt die Division des Zehlers 9 durch 5 den unbequemen Bruch $\frac{1\frac{4}{5}}{14}$ und man thut also in diesem und dergleichen Fällen besser, wenn man den Nenner multipliciret, wodurch hier der Bruch $\frac{9}{70}$ kommt. Und man siehet hieraus, daß wenn man eine Regul stellen will, so sich in allen Fällen anbringen lässet, dieselbe so lauten müsse: Um einen jeden Bruch $\frac{5}{7}$ durch einen andern $\frac{1}{3}$, dessen Zehler 1 ist, zu multipliciren, multiplicire man nur die Nenner in einander, und lasse den Zehler stehen. Oder: man multiplicire so wohl die Zehler als auch die Nenner in einander; denn dieses kommt hier auf eben das hinaus, weil 1 nicht multipliciret. Demnach ist $\frac{1}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{1 \times 5}{3 \times 7} = \frac{5}{21}$.

§. 35. Wie ist es aber mit den Brüchen beschaffen, deren Zehler grösser ist als die Einheit, und wie entstehen die Producte, wenn man andere Zahlen durch solche Brüche multiplicirer? Wir dürfen nur um etwas weniges weiter nachdenken, auch dieses heraus zu bringen. Wir wollen setzen, daß der Bruch $\frac{4}{5}$ durch $\frac{2}{3}$ zu multipliciren sey: so wird $\frac{2}{3}$ aus der Einheit, indem man diese erstlich in drey gleiche Theile theilet, und so dann dieser Theile zween annimt. Eben so muß auch nach dem Begrif der Multiplication I, 79. das Product aus $\frac{4}{5}$ entstehen. Man muß erstlich $\frac{4}{5}$ in drey gleiche Theile theilen, oder durch drey dividiren, I, 82. und hernach muß man dieses Drittel des Bruchs $\frac{4}{5}$ zwey mal nehmen oder durch 2 multipliciren. Dieses ist alles, so wir hier zu thun haben.

§. 36. Und auf diese Art verfähret man in allen Fällen. Eine jede Zahl wird durch einen Bruch multipliciret, von was Art dieser

auch

auch seyn mag, wenn man sie durch den Nenner des Bruchs dividiret und durch dessen Zehler multipliciret. Dieses kan auf vielerley Art geschehen wie öfters wiederhohlet worden, II. 2, 3. und es ist im Grunde eins, wie man diese Multiplication und Division verrichte. Wir stellen uns hier wieder die ganze Zahlen als Brüche vor, deren Nenner die Einheit ist, und setzen, daß ein dergleichen oder ein anderer Bruch $\frac{10}{21}$ durch den Bruch $\frac{3}{5}$ zu multipliciren sey. So ist der Bruch $\frac{10}{21}$ durch 3 zu multipliciren, und durch 5 zu dividiren. Man verrichte erstlich die Multiplication durch die Multiplication des Zehlers 10, und die Division durch die Multiplication des Nenners, so wird das Product $\frac{30}{105}$. Man verrichte zweytens die Multiplication noch durch die Multiplication des Zehlers, die Division aber verrichte man nunmehro durch die Division des Zehlers, so wird das Product $\frac{6}{21}$. Man verrichte drittens die Multiplication durch die Division des Nenners, und die Division durch die Division des Zehlers, so entstehet nunmehro das Product $\frac{2}{7}$, und endlich verrichte man die Multiplication durch die Division des Nenners, und die Division durch die Multiplication desselben, so kommt $\frac{10}{35}$, welches ebenfals das richtige Factum ist. Und es sind in der That die dergestalt gefundene vier Brüche $\frac{30}{105}$, $\frac{6}{21}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{10}{35}$ dem Werthe nach gar nicht von einander verschieden, sondern sie bedeuten einerley, wie man leicht sehen kan, wenn man den ersten durch die Division seiner Zahlen, des Zehlers und Nenners, durch 15; den zweyten durch eine gleichmässige Division durch die Zahl 3, und den vierten vermittelst der Division seiner Glieder durch 5 auf die kleinste Benennung bringet, welche er haben kan.

§. 37. Wir haben mit Fleiß zwey Brüche erwehlet, bey welchen sich alle mögliche Arten eine Zahl durch einen Bruch zu multipliciren, anbringen liessen. Es gehet aber dieses nicht bey allen Brüchen mit der Bequemlichkeit an, weil nicht jede ganze Zahl durch eine jede andere sich ohne Bruch theilen läst. Soll man den Bruch $\frac{3}{7}$ durch $\frac{2}{5}$ multipliciren, so kan man sich weder bey der Multiplication durch 2, dem Zehler des multiplicirenden Bruchs, noch bey der Division durch 5 dem Nenner desselben, der Division bedienen. Doch läst sich diese Division des einen oder des andern Gliedes zum öftern verrichten, und man thut wohl, wenn in diesen Fällen man sich derselben bedienet, weil dadurch das Product durch kleinere Zahlen ausgedrücket wird, und man sich die Mühe ersparet oder doch erleichtert, den Bruch auf eine kleinere Benennung zu bringen.

II. Abschnitt.

§. 38. Will man dem gewöhnlichen Weg folgen, wenn der Bruch $\frac{4}{5}$ durch $\frac{2}{3}$ zu multipliciren ist, so multipliciret man so wohl die Zehler als die Nenner der zwey gegebenen Brüche $\frac{4}{5}$ und $\frac{2}{3}$ in einander, der Bruch $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$ ist das gesuchte Product, und nach dieser Art Brüche durch Brüche zu multipliciren kan man beständig verfahren, weil sich eine jede ganze Zahl durch eine jede andere dergleichen Zahl multipliciren läst: und dieses ist ohne Zweifel die Ursach, warum man diese Art, Brüche durch Brüche zu multipliciren zur Regul gemacht hat. Es lassen sich aber die vollständigen Reguln II, 36. eben so leicht einsehen und anwenden als diese.

§. 39. Indessen ist aus dieser Art Brüche durch Brüche zu multipliciren am leichtesten einzusehen, daß auch bey diesen Zahlen es einerley sey, in was Ordnung man sie in einander multiplicire, wenn drey, vier, oder mehrere derselben nach und nach in einander zu multipliciren sind. Ja man kan hier so gar die Zehler mit einander verwechseln wie auch die Nenner, ohne in dem Product etwas zu ändern. Gesetzt, es sey der Bruch $\frac{2}{3}$ durch den Bruch $\frac{5}{7}$, und das hieraus entstehende Product durch $\frac{4}{5}$ zu multipliciren, so ist das Product aus allen $\frac{2 \times 5 \times 4}{3 \times 7 \times 5}$; aber eben dieses Product kommt, wenn man $\frac{5}{3}$ durch $\frac{2}{5}$ multipliciret, und das hieraus entstehende Factum ferner durch $\frac{4}{7}$, und man siehet ein, daß das aus dieser Multiplication entstehende Factum $\frac{5 \times 2 \times 4}{3 \times 5 \times 7}$ mit dem vorigen $\frac{2 \times 5 \times 4}{3 \times 7 \times 5}$ einerley sey, wenn man erweget, daß die Zehler dieser zwey Brüche einerley sind, weil sie beyde aus einerley Factoren 2, 4, 5 bestehen, und daß mit den Nennern es aus eben dem Grunde eben die Bewandniß habe, welche beyde aus der Multiplication der Zahlen 3, 5, 7 entstanden sind.

Division durch Brüche.

§. 40. Da nun also beständig das Factum zweyer Zahlen, die man als Brüche ansiehet, gefunden wird, wenn man den ersten dieser Brüche durch den Zehler des andern multipliciret, und durch dessen Nenner dividiret, II, 35. so folgt wiederum, daß wenn ein Factum aus zweyen solchen Zahlen, und ein Factor desselben, gegeben ist, man den andern Factor finden könne, wenn man das Factum mit

II. Abschnitt.

dem Zehler des ersten Factors dividiret, und mit seinem Nenner multiplicirt. Das Factum $\frac{30}{105}$ ist durch die Multiplication der zwey Brüche $\frac{10}{21}$ und $\frac{3}{5}$ entstanden, und es ist der erste dieser Brüche durch den Zehler des zweyten 3 multipliciret, und durch seinen Nenner 5 dividiret worden, dieses Factum $\frac{30}{105}$ zu erhalten. Ist nun also dieses Factum zusamt dem einen Factor $\frac{3}{5}$ gegeben, so kommt allerdings der andere, wenn man das Factum hinwiederum durch den Zehler des gegebenen Factors 3 dividiret, und durch dessen Nenner 5 multipliciret, und es wird in der That, wenn man die Division des Products $\frac{30}{105}$ durch die Division des Zehlers, und die Multiplication desselben durch die Division des Nenners verrichtet, der Factor $\frac{10}{21}$ in eben den Zahlen heraus gebracht.

§. 41. Und wenn man also denjenigen Begrif von der Division zum Grunde leget, welchen wir oben gegeben, I, 138. nach welcher die Zahl welche zu dividiren ist, als ein Product betrachtet werden muß, so durch die Multiplication des Theilers in den Quotienten entstanden, da man denn aus diesem gegebenen Product, und einem Factor desselben, nemlich dem gegebenen Theiler, den andern, welcher der Quotiente ist, suchet: so siehet man bloß hieraus, daß die Division durch einen Bruch nichts anders erfordere, als daß man die Zahl, welche durch den Bruch zu dividiren ist, durch den Zehler des Bruchs dividire, und durch seinen Nenner multiplicire. Dieses kan man, wie nunmehro überflüssig bekannt seyn muß, auf verschiedene Arten verrichten: und daraus verschiedene Arten, eine Zahl durch einen Bruch zu dividiren, zusammen setzen. Es sey der Bruch $\frac{30}{105}$ durch $\frac{3}{5}$ zu dividiren, das ist, durch 3 zu dividiren und durch 5 zu multipliciren: so wird durch die Division heraus gebracht $\frac{10}{105}$ oder $\frac{30}{315}$, weil man die Division mit 3 entweder durch die Division des Zehlers, oder durch die Multiplication des Nenners verrichten kan, und durch die Multiplication mit 5 bekommt man aus dem ersten dieser Brüche $\frac{50}{105}$ oder $\frac{10}{21}$, und aus dem zweyten $\frac{150}{315}$ oder $\frac{30}{63}$, nachdem man nemlich wieder die Multiplication, entweder durch die Multiplication des Zehlers, oder durch die Division des Nenners verrichtet; und es ist demnach jeder dieser vier Brüche $\frac{150}{315}$, $\frac{30}{63}$, $\frac{50}{105}$, $\frac{10}{21}$ der Quotient, welcher gesucht wird. Sie bedeuten einerley, denn sie können alle zu der Benennung des letzten gebracht werden, wie leicht einzusehen ist.

§. 42. Alle diese Arten durch einen Bruch zu dividiren haben ihren

ihren Nutzen, aber bloß diejenigen, da man so wohl die Multiplication als die Division der zu dividirenden Zahl durch eine Multiplication des Nenners und des Zehlers verrichtet, hat allezeit statt, und man bekommt dadurch allezeit ganze Zahlen; II, 38. und setzet man einmal feste, daß man sich dieser Rechnungsart bey jeder Division einer Zahl durch einen Bruch bedienen wolle, so wird die Regul, diese Division zu verrichten, also lauten müssen: Man multiplicire den Nenner der zu dividirenden Zahl durch den Zehler des Theilers (damit wird die zu dividirende Zahl durch den Zehler dividiret) und man multiplicire auch den Zehler der zu dividirenden Zahl durch den Nenner des Theilers, (dadurch wird die Zahl, welche man dividiren soll, durch den Nenner des Theilers multipliciret.) Zum Exempel, $\frac{5}{7}$ ist

II. Abschnitt.

durch $\frac{2}{3}$ zu dividiren, so ist der Quotient $\frac{5 \times 3}{7 \times 2} = \frac{15}{14}$. Dieses ist die Regul, welche gemeiniglich gegeben wird.

§. 43. Man siehet hieraus leicht, daß um eine Zahl durch einen Bruch zu dividiren, man eben die Arbeit vornehmen müsse, welche bey der Multiplication durch einen Bruch erfordert wird, mit dem einzigen Unterschied, daß, da man bey der Multiplication mit dem Zehler multipliciren, und mit dem Nenner dividiren muste, man bey der Division durch den Nenner multipliciren, und mit dem Zehler dividiren muß. Versetzt man derohalben die Zahlen des Theilers, und setzet den Zehler an statt des Nenners, und den Nenner an die Stelle des Zehlers, so hat man nunmehro gar nichts zu beobachten, indem man dividiren will, als daß man mit dem also verkehrt gesetzten Bruch multiplicire. Es sey die Zahl 5 oder $\frac{5}{1}$ durch $\frac{2}{3}$ zu dividiren, so versetze man die Zahlen des Theilers, und mache aus denselben $\frac{3}{2}$, mit diesem Bruch multiplicire man die Zahl, welche man dividiren soll $\frac{5}{1}$, so ist $\frac{5}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{5 \times 3}{1 \times 2} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2}$ der Quotiente.

§. 44. Dergestalt lassen sich die Reguln der Division durch einen Bruch aus dem Begrif der Division herleiten, welchen wir im Anfang dieser Abhandlung II, 40. wiederhohlet haben. Es ist aber etwas natürlicher, daß man dieselbe aus dem ersten Begrif der Division folgere, und die Einsicht, welche man dadurch erhält, wird etwas gründlicher. Dieses kan nachfolgender Massen ohne Umschweife geschehen.

II. Abschnitt.

§. 45. Eine ganze oder gebrochene Zahl durch einen Bruch dividiren, heisset, dem ersten und allgemeinen Begrif von der Division gemäß, aus der zu dividirenden Zahl eine neue dergestalt machen, wie die Einheit aus dem Theiler entstehet. I, 125. Gesetzt, dieser Theiler sey ein Bruch, dessen Zehler 1 ist, zum Exempel $\frac{1}{2}$, so entstehet 1 aus dem Theiler $\frac{1}{2}$, indem man denselben durch 2 multipliciret; demnach wird auch der Quotiente zwey mal so groß genommen werden müssen als die Zahl, welche zu dividiren ist, und man bekommt also den Quotienten, wenn man die Zahl, welche durch $\frac{1}{2}$ zu dividiren war, durch 2 multipliciret, und wenn also die Zahl, welche man durch $\frac{1}{2}$ dividiren soll $\frac{5}{4}$ ist, so ist der Quotient $\frac{10}{4}$ oder auch $\frac{5}{2}$, da der erstere dieser Brüche entstanden, indem man den Zehler von $\frac{5}{4}$ durch 2 multipliciret, und der zweyte, indem man seinen Nenner durch 2 dividiret hat. Und eben so verhält es sich mit der Division durch $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, und überhaupt durch alle Brüche, deren Zehler die Einheit ist, als welche eine würkliche Multiplication durch den Nenner erfordern.

§. 46. Wenn man aber an die Stelle des Theilers $\frac{1}{3}$ einen andern $\frac{2}{3}$ setzet, welcher zwey mal so groß ist als der erstere, und man setzet, daß man die zu dividirende Zahl $\frac{5}{7}$ bereits durch $\frac{1}{3}$ dividiret, oder durch 3 multipliciret, und dadurch $\frac{5 \times 3}{7}$ oder $\frac{15}{7}$ heraus gebracht habe, so ist dieser Quotient zwey mal grösser als derjenige welcher kommt, wenn man eben den Divisorem $\frac{5}{7}$ durch $\frac{2}{3}$ dividiret, weil nemlich $\frac{2}{3}$ doppelt so viel ist als ein Drittel. I, 141. Also kan man aus diesem Quotienten den gesuchten, welchen nemlich der Theiler $\frac{2}{3}$ giebt, machen, wenn man den erst gefundenen durch 2, den Zehler des Theilers, dividiret. Demnach ist der richtige Quotient welchen $\frac{5}{7}$ gibt, wenn man durch $\frac{2}{3}$ dividiret, $\frac{5 \times 3}{7 \times 2} = \frac{15}{14}$, oder ein anderer Bruch, welcher durch eben die Rechnungsarten auf andere Weise verrichtet, heraus gebracht werden kan:

§. 47. Oder man stelle sich die Sache kürzlich folgendergestalt vor: Aus $\frac{2}{3}$ wird die Einheit, wenn man zwey Drittel in zwey gleiche Theile theilet $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, und dieser Theile drey zusammen setzet, dergestalt $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. Denn drey Drittel sind ein Ganzes. Und eben so wird aus $\frac{4}{5}$ die Einheit, wenn man $\frac{4}{5}$ in vier gleiche Theile theilet,

so viel nemlich Einheiten in dem Zehler sind, und derselben fünfe nimt, denn der vierte Theil von $\frac{4}{5}$ ist $\frac{1}{5}$, und deren fünfe geben $\frac{5}{5}$ oder ein Ganzes. Wenn man demnach einen Bruch, was er auch vor einer seyn mag, oder eine ganze Zahl, $\frac{7}{9}$, durch $\frac{4}{5}$ dividiren soll, so muß man, um den Quotienten aus der zu dividirenden Zahl eben so zu machen, wie aus dem Theiler die Einheit entstehet; die gegebene Zahl, welche dividiret werden soll, ebenfalls in vier gleiche Theile theilen, oder durch den Zehler 4 dividiren, und dieser Theile hernach so viele nehmen, als viele Einheiten in dem Nenner enthalten sind; oder man muß, was man durch erst besagte Division heraus gebracht hat, durch den Nenner multipliciren. Und man bekommt also den Quotienten aus der Division der $\frac{7}{9}$ durch $\frac{4}{5}$ indem man setzet erstlich $\frac{7}{9 \times 4} = \frac{7}{36}$, und ferner $\frac{7 \times 5}{36}$, oder auf einmal $\frac{7 \times 5}{9 \times 4} = \frac{35}{36}$: oder sonst wie man will, oder kan, die zu dividirende Zahl durch den Zehler des dividirenden Bruchs dividiret, und durch dessen Nenner multipliciret.

II. Abschnitt.

Einige Anmerkungen.

§. 48. Wenn eine zum Theil ganze zum Theil gebrochene Zahl, als $7\frac{2}{3}$ durch einen Bruch $\frac{4}{9}$ zu multipliciren ist, so multiplicire man beyde Theile dieser Zahl 7 und $\frac{2}{3}$ durch den Bruch $\frac{4}{9}$, und setze die Producte zusammen. Diese sind, $\frac{7 \times 4}{9}$ und $\frac{2 \times 4}{3 \times 9}$ oder $\frac{28}{9}$ und $\frac{8}{27}$ und demnach ist das Product $7\frac{2}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{28}{9} + \frac{8}{27} =$ II, 18. $\frac{84 + 8}{27} =$ II, 22. $\frac{92}{27} =$ II, 15. $3\frac{11}{27}$.

§. 49. Oder man verwandele die gegebene Zahl, welche aus einer ganzen und aus einem Bruche bestehet, ganz in einen unächten Bruch, und multiplicire diesen durch den gegebenen Bruch. Es seyn noch $7\frac{2}{3}$ durch $\frac{4}{9}$ zu multipliciren. Die erstere dieser Zahlen ist dem unächten Bruch $\frac{23}{3}$ gleich. Wenn man diesen durch $\frac{4}{9}$ multipliciret, wird das Product $\frac{92}{27}$ wie vorher, und man kan dieses Product wie eben geschehen, auch durch die Zahl $3\frac{11}{27}$ ausdrücken.

§. 50. Eben so kan man verfahren, wenn eine Zahl die aus einer ganzen und aus einem Bruche zusammen gesetzet ist $7\frac{2}{3}$, durch eine andere dergleichen Zahl $2\frac{3}{4}$ multipliciret werden soll. Man kan die

II. Abschnitt. Zahlen beyde in unächte Brüche verwandeln, und diese so dann in einander multipliciren. Die erste Zahl wird durch diese Verwandlung wieder $= \frac{23}{3}$ und die zweyte $= \frac{22}{9}$. Und das Product aus diesen Brüchen ist $\frac{506}{27} = 18\frac{20}{27}$, und dieses ist auch das Product aus $7\frac{2}{3}$ und $2\frac{4}{9}$.

§. 51. Und dieses ist wol der kürzeste Weg dergleichen Producte zu erlangen. Wil man die gegebene Zahlen stehen lassen wie sie sind, und dieselbe nicht in unächte Brüche verwandeln, so muß man jeden Theil der ersten Zahl durch jeden Theil der zweyten multipliciren, und die Producte so dann zusammen setzen, damit man das gesuchte Product erhalte. Es sey nochmals $7\frac{2}{3}$ durch $2\frac{4}{9}$ zu multipliciren, so wird das Product dieses seyn; $7 \times 2 + \frac{2 \times 2}{3} + \frac{4 \times 7}{9} + \frac{2 \times 4}{3 \times 9} = 14 + \frac{4}{3} + \frac{28}{9} + \frac{8}{27} = 18 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{8}{27} = 18 + \frac{9}{27} + \frac{3}{27} + \frac{8}{27} = 18 + \frac{20}{27}$ oder $18\frac{20}{27}$, wie vorher.

§. 52. Sol man aber eine dergleichen Zahl durch einen Bruch, oder durch eine Zahl, welche ebenfals aus einer ganzen und aus einem Bruch zusammen gesetzet ist, dividiren, so kan man, wenn man Weitläuftigkeiten vermeiden wil, nicht anderst verfahren, als daß man die Zahlen beyde in unächte Brüche verwandelt, und die Division so dann mit diesen Brüchen verrichtet. Es sey nunmehro $7\frac{2}{3}$ durch $2\frac{4}{9}$ zu dividiren: so setze man wieder an statt $7\frac{2}{3}$ den Bruch $\frac{23}{3}$, und an statt $2\frac{4}{9}$ schreibe man $\frac{22}{9}$, und dividire so dann den ersten Bruch durch den zweyten. Der Quotiente $\frac{23 \times 9}{3 \times 22}$, ist der gesuchte, welcher sich auch also ausdrücken lässet: $\frac{69}{22} = 3\frac{3}{22}$. Wir haben zum Beweiß der Richtigkeit dieser Rechnung nicht das geringste hinzu zu fügen, weil alles aus dem so gezeiget worden, überflüssig klar ist.

Von den Einfachen und zusammen gesetzten Zahlen.

§. 53. Dasjenige so bishero von den Brüchen gewiesen worden, ist zur Ausübung der Rechnungsarten, welche bey denselben vorkommen, meistentheils hinlänglich: aber zu recht deutlichem und gründlichem Verstand derselben ist noch verschiedenes hinzu zu setzen, welches wir hieher verspahret, die Aufmerksamkeit des Lesers desto mehr zu unterhalten, welche dadurch erweckt wird, wenn man den Nutzen der vorzunehmenden Betrachtungen vorher einsiehet, ehe man sich zu denselben wendet.

§. 54.

§. 54. Wir haben schon öfters angemerket, und wem ist es unbekant, daß nicht eine jede Zahl durch eine jede andere sich genau dividiren lasse. Es gibt aber auch Zahlen, welche man gar nicht durch andere Zahlen dividiren, und also keines weges als Producte aus zweyen andern Zahlen ansehen kan. Dergleichen sind die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, und viele andere, welche keine ganze Zahl genau und ohne Bruch theilet. Denn die Division durch 1 ist eigentlich keine Division, weil sie die Zahl läst wie sie sie findet. Dergleichen ganze Zahlen, welche durch keine andere ganze Zahlen sich genau theilen lassen, heissen einfache Zahlen. Alle übrige, welche sich dividiren lassen, und welche man also durch die Multiplication heraus bringen kan, werden als zusammen gesetzte Zahlen betrachtet, dergleichen sind die Zahlen 4, 6, 8, 9, 10, 12, und unendlich viele andere.

§. 55. Man verstehet demnach durch das Zusammensetzen einer Zahl 12 aus zwey oder mehrern andern 4 und 3, oder 2 und 2 und 3 hier nichts anders als die Multiplication dieser Zahlen in einander, und weil 4×3, oder $2 \times 2 \times 3$, die Zahl 12 bringt, so sagt man die Zahl 12 sey aus den zwey Zahlen 4 und 3, oder aus den dreyen $2 \times 2 \times 3$ zusammen gesetzt. Selbst in der Erklärung lieget, daß man sich nur die ganze Zahlen als einfach oder zusammen gesetzt vorstellen kan, und daß die Brüche eigentlich weder einfache noch zusammen gesetzte Zahlen sind.

§. 56. Wolte man alle einfache Zahlen bis auf eine gewisse Grösse, als zum Exempel alle die unter hundert sind, finden, so könte man alle Producte in eine Reihe setzen, welche entstehen, indem man die Zahlen, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, durch zwey multipliciret bis an die gesetzte Gränze hundert. Alle diese Zahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 rc. lassen sich durch 2 dividiren. Indem aber dieses geschiehet, wird die erste dieser Zahlen 2 durch sich selbst und durch keine andere dividiret. Ferner müste man alle Producte, welche vermittelst der Multiplication durch 3 entstehen, in eine andere Reihe bringen. Diese sind 3, 6, 9, 12, 15, 18 rc. welche Zahlen alle sich durch 3 dividiren lassen, welcher Theiler von der ersten Zahl dieser Reihe wieder nicht verschieden ist. Eben so müste man alle Producte aller Zahlen durch 4, welche Producte nicht grösser sind als 100, in eine Reihe bringen 4, 8, 12, 16, 20, 24, und so immerfort. Diejenige Zahlen nun, welche in keiner solchen Reihe anders, als an deren Anfang vorkommen, sind einfache Zahlen, die übrigen alle sind zusammen gesetzt,

II. Abschnitt.

setzt, und lassen sich durch diejenige Zahl dividiren, welche im Anfang der Reihe stehet. Die Zahl 2 kommt nicht anders, als in der ersten Stelle der ersten Reihe vor, und ist demnach eine einfache Zahl. Die Zahl 3 kommt nicht anders als in der ersten Stelle der zweyten Reihe vor, und ist derowegen ebenfals einfach. Im Gegentheil kommt 4 zwar auch als die erste Zahl der dritten Reihe vor: sie stehet aber auch in der ersten Reihe in der zweyten Stelle. Demnach ist sie keine einfache Zahl, sondern sie lässet sich durch 2 dividiren.

§. 57. Hieraus erhellet deutlich, daß unter den geraden Zahlen keine andere einfache Zahl anzutreffen sey, als die einzige 2, und daß demnach die übrige einfache Zahlen alle ungerade sind. Die einfache Zahlen unter 100 sind, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

§. 58. Da gar keine Zahlen sind, welche die einfachen Zahlen dividiren, ausser sie selbst: so ist klar, daß es unmöglich sey, eine Zahl zu finden, welche zwo verschiedene einfache Zahlen 3 und 7 zugleich dividirte. Es gibt aber auch zusammen gesetzte Zahlen, die sich nicht durch einerley Zahl dividiren lassen. 8 ist keine einfache Zahl und 9 auch nicht. Jene kan durch 2 und 4 dividiret werden, und diese durch 3, aber weder 8 läst sich durch 3, noch 9 durch 2 oder 4 genau theilen. Dergleichen Zahlen beziehen sich auf einander als einfache Zahlen, ob sie zwar keine sind, denn wenn man dieselbe alle beyde mit einerley Zahl dividiren wil, so kan dieses eben so wenig geschehen, als ob sie einfache Zahlen wären.

§. 59. Man kan ohne sonderliche Mühe eine Tafel machen, in welcher neben einer jeden Zahl die Theiler derselben stehen, aus welcher dann auch die gemeinschaftlichen Theiler zwoer oder mehrerer Zahlen zu nehmen wären, und unter diesen die grössesten, da man aber eine dergleichen Tafel nicht immer bey der Hand haben kan, und sie auch unmöglich auf alle Zahlen erstrecket werden könte: aber doch öfters erfordert wird, daß wir eine solche Zahl, welche zwo andere genau dividiret, und zwar, wenn mehr als eine dergleichen Zahl zu haben ist, die gröste unter allen, zu finden wissen, so müssen wir eine andere Weise zeigen, dieses ins Werk zu richten. Wir werden aber zu deren deutlicherem Verstand einige Sätze von den gemeinschaftlichen Theilern zwoer Zahlen zum Grunde setzen müssen.

Ge-

Gemeinschaftliche Theiler zwoer Zahlen.

II. Abschnitt.

§. 60. Das erste so wir zu dem Ende anzumerken haben, ist auch an sich klar, nemlich daß die gröste Zahl, welche eine jede Zahl genau dividiret, sie selbst sey. Als 12 hat zu Theilern, 2, 3, 4, 6, 12, keiner derselben ist grösser als 12. Einen grössern Theiler als sie selbst ist, kan keine Zahl haben.

§. 61. Und wenn demnach eine Zahl als 6 eine andere Zahl 18 genau theilet, so ist die erstere Zahl selbst der gröste Theiler, welchen diese zwo Zahlen gemeinschaftlich haben. Denn es wird gesetzt, daß die erstere Zahl 6 die zweyte genau dividiren sol. Nun dividiret sie sich ohne Zweifel selbst, denn eine jede Zahl ist in ihr selbst eben einmal enthalten, also theilet die Zahl 6, beyde gegebene Zahlen 6 und 18. Sie ist aber die Gröste unter denen die die erstere Zahl 6 genau theilen, nach demjenigen so eben als bekannt angenommen worden; also ist sie auch der gröste gemeinschaftliche Theiler.

§. 62. Ferner, wenn eine Zahl 16 durch eine andere 6 getheilet wird, es bleiben aber einige Einheiten übrig als hier 4, so theilet diejenige Zahl, welche das Ueberbleibsel 4 und den Theiler 6 genau theilet, auch die Zahl 16 welche dividiret worden, und keine andere Zahl kan diese Theilung verrichten. Das erstere, daß eine solche Zahl als hier die 2, welche das Ueberbleibsel 4 und auch den Theiler 6 genau theilet, auch die Zahl 16 welche durch 6 dividiret worden, theile, wird gar leicht eingesehen, wenn man sich die Zahlen wieder durch Puncte vorstellet. Die zu dividirende Zahl sey AB, der Theiler CD, welcher jene in die Theile AE, EF theilet, und FB übrig läst. Die Helfte von FB, das ist hier 2, theilet die Zahl CD genau, also theilet eben diese 2 auch die AE, so der CD gleich ist, und eben so theilet sie das andere Stück EF, denn dieses ist ebenfals der CD gleich. Endlich theilet sie noch das Ueberbleibsel FB, weil man mit Fleiß eine solche Zahl angenommen, welche das Ueberbleibsel theilet; also theilet sie die ganze Zahl AB. Man hat in der Figur die Theilung durch CD mit gedoppelten und die mit 2 durch einfache Striche bemerket, um alles desto leichter zu machen, ob zwar die Sache an sich wenig Schwierigkeit hat.

F. 20.

§. 63. Daß aber keine andere Zahl so wohl die zu dividirende Zahl als den Theiler genau theile, als diejenige, welche auch das Ueber-

II. Abschnitt.

bleibsel theilet, oder, welches einerley ist, daß keine Zahl, welche entweder das Ueberbleibsel oder den Theiler nicht genau theilet, dennoch so wohl die zu dividirende Zahl, als den Theiler, genau theilen könne, ist also zu erweisen. Man stelle sich wieder die Zahlen vor, die wir eben geschrieben: Man theile nemlich AB durch CD, und FB sey der Ueberschuß von dieser Theilung. Nun fasse man eine Zahl in die Gedanken was man vor eine wil, als zum Exempel 5, welche entweder CD oder FB nicht genau theilet. Setzet man das erste, daß die also angenommene Zahl den Theiler CD nicht dividire, so kan sie eben deswegen nicht die beyden Zahlen CD und AB theilen, und wer dieses sagen wolte, würde angeben, daß eben die Zahl einmal den Theiler CD theilen, und das andere mal nicht theilen könte, welches sich selbst widerleget. Setzet man aber diesen Widerspruch zu vermeiden, daß eine solche Zahl angenommen werde, welche zwar CD theilet, aber nicht den Ueberschuß FB, als hier 3, so muß man bedenken, daß wenn man mit einer solchen Zahl, welche CD theilet, auch die AB theilen wil, jederzeit eine Theilung in die vorigen Theilungspuncte, E, F fallen, und demnach eine Theilung nothwendig mit dem letzten Zeichen F aufhören werde. Wil man nun von dannen weiter fortgehen, und AB bis ans Ende theilen, so muß auch die Zahl FB getheilet werden, welches nicht geschehen kan, wenn man zum Theiler eine solche Zahl angenommen hat, welche das Ueberbleibsel FB nicht genau theilet. Es ist also was gesagt worden richtig, daß keine Zahl den Theiler CD und die Zahl AB zugleich theilen könne, welche nicht den Theiler CD und dasjenige, so nach geschehener Division übrig bleibt, FB, genau theilet.

§. 64. Ist demnach eine Zahl die Gröste unter allen, welche das Ueberbleibsel von einer Division und den Theiler, welchen man darzu gebraucht, genau theilen: so ist sie auch die Gröste unter den Zahlen, welche den Theiler und die dividirte Zahl genau theilen. Man nehme in unserm Exempel 2, welche den Theiler 6, und das Ueberbleibsel 4 genau theilet, und die Gröste unter allen Zahlen ist, welche sie theilen. Diese theilet erstlich die dividirte Zahl 16 auch, wie überhaupt alle Zahlen thun, welche den Theiler und das Ueberbleibsel theilen. II, 62. Eine grössere Zahl als dieser gröste gemeinschaftliche Theiler, zum Exempel 3, theilet nicht beydes, das Ueberbleibsel FB und den Theiler CD, sonst wäre jener nicht die Gröste unter allen, welche den Theiler und das Uberbleibsel zugleich theilen, also kan auch

die-

diese grössere Zahl 3 nicht den Theiler 6 und die dividirte Zahl 16 zugleich theilen, II, 63. und bleibt also die erstere Zahl 2, welche die gröste war unter den gemeinschaftlichen Theilern des Theilers und des Ueberbleibsels, auch die gröste unter den gemeinschaftlichen Theilern, des Theilers 6 und der dividirten Zahl 16.

II. Abschnitt.

Den grösten gemeinschaftlichen Theiler zwoer Zahlen zu finden.

§. 65. Und nunmehro können die Reguln gewiesen und verständlich gemacht werden, nach welchen der gröste gemeinschaftliche Theiler zwoer gegebenen Zahlen gefunden wird. Sie bestehen in nachfolgenden. Ich sol eine Zahl finden, welche 36 und 16 zugleich, und beyde genau dividiret. Ich dividire erstlich die grössere der vorgegebenen Zahlen 36 durch die kleinere 16, und bemerke hier nicht so wohl den Quotienten, als welcher von keinem Nutzen ist, als vielmehr den Ueberrest von der Division, welcher sonst den Zehler des Bruchs abgiebt, welcher der ganzen Zahl in dem Quotienten noch zu zusetzen ist. Dieser Ueberrest ist hier 4. Mit diesem Ueberrest dividire ich so dann den Theiler der vorigen Rechnung 16, welches hier genau geschicht, und dieses ist ein Zeichen, daß eben dieser letzte Theiler 4 auch die andere Zahl 36 dividire, II, 62. wie man dieses auch findet, wenn man diese Division versucht.

§. 66. Es gehet aber die Arbeit nicht allzeit so geschwinde zu Ende. In diesem Fall, wenn nemlich auch bey der zweyten Division der Quotiente nicht genau in ganzen Zahlen zu haben ist, hat man nur die Arbeit, wie sie angefangen worden, fortzusetzen, und ferner den Theiler der letzten Division durch das Ueberbleibsel von eben der Division zu theilen, und dieses immerfort, bis man endlich zu einer genauen Division in ganzen Zahlen gelanget. Endlich wird dieses geschehen, und der letzte Theiler wird allzeit die zwey gegebene Zahlen genau und ohne Bruch theilen. Es wird aber auch zum öftern keine andere dergleichen Zahl als die 1 können gefunden werden, welches ein Zeichen seyn wird, daß die zwo gegebene Zahlen nicht beyde durch einerley Zahlen können getheilet werden, und daß sie sich demnach auf einander als einfache Zahlen beziehen, II, 58. weil die 1 eigentlich keine Zahl theilet.

II. Abschnitt. §. 67. Zum Exempel, welche Zahl dividiret die zwo Zahlen 1785, und 858 genau? Ich dividire die grössere durch die kleinere

```
858) 1785 | 2
     1716 |
     ---- |
       69 |
```

Es bleibt in dieser Division 69 übrig. Mit diesen 69 dividire ich den Theiler 858.

```
69) 858 | 12
    69  |
    ---
    168
    138
    ---
     30
```

Es bleiben hier 30, mit welchen wieder der Theiler so eben gebraucht worden 69 zu dividiren ist:

```
30) 69 | 2
    60 |
    --
     9
```

Hier bleiben 9, durch welche abermal der letzte Theiler 30 zu theilen ist:

```
9) 30 | 3
   27 |
   --
    3
```

Da denn 3 von der Division übrig bleiben, und diese Zahl theilet den letzten Theiler 9 genau, welches ein Zeichen ist, daß eben die 3 auch die zwo gegebene Zahlen 858 und 1785 theile, wie man dieses auch bey angestellter Probe befindet. Denn 858 durch 3 dividiret, giebt zum Quozienten 286, und 1785 durch eben die 3 getheilet, bringt 595.

§. 68. Wolte man aber eine Zahl suchen, welche die zwo Zahlen 21 und 8 genau theilete, so würde man nach wiederhohlter Division:

```
8) 21 | 2.      5) 8 | 1.
   16 |            5 |
   --              -
    5              3

3) 5 | 1        2) 3 | 1
   3 |             2 |
   -               -
   2               1
```

end-

endlich auf 1 kommen, welches ein Zeichen ist, daß die zwo Zahlen 21 und 8 durch keine andere zugleich genau getheilet werden können.

II. Abschnitt.

§. 69. Man kan den Raum bey dieser Rechnung zu sparen, jederzeit den vorhero gebrauchten Theiler an die Seite des Ueberbleibsels von der vorherigen Division setzen, ohne dieses erst wieder abzuschreiben. Wir wollen die vorige Rechnung auf die Art verrichten, damit, wenn etwas nicht so gleich solte verstanden werden, man sich durch die Vergleichung derselben mit der gegenwärtigen helfen könne:

```
D. 858) 1785|2
        1716
   C... 69|858|12
           69
           168
           138
      B... 30|69|2
              60
         A... 9|30|3
                27
                 3|9|3
                   9
                   0
```

§. 70. Der Beweiß von der Richtigkeit dieser Rechnungsart, und daß die gefundene Zahl 3 würklich die gröste der Zahlen sey, welche die im Anfang gegebene Zahlen 858 und 1785 zugleich theilen, fliesset folgender gestalt aus den zum Grunde gelegten Sätzen. Die gefundene Zahl 3 welche 9 genau theilet, ist ohnstreitig der gröste gemeinschaftliche Theiler dieser zwo Zahlen 3 und 9, weil sie die erste dieser Zahlen 3 selbst ist. II, 61. Nun ist 9 der Theiler von der Division bey welcher A stehet, und 3 ist das Ueberbleibsel derselben. Also ist die gefundene Zahl 3 der gröste gemeinschaftliche Theiler des Theilers dieser Division 9, und des Ueberbleibsels derselben 3. Demnach ist eben die Zahl 3 der gröste gemeinschaftliche Theiler, der bey A dividirten Zahl 30 und des Theilers eben der Division, 9. II, 64. Es ist aber wider 9 das Ueberbleibsel von der vorhergehenden Division, bey welcher B stehet, und 30 war der Theiler bey dieser Division. Demnach ist

II. Abschnitt.

die Zahl 3 der gröste gemeinschaftliche Theiler des Theilers und des Ueberbleibsels dieser Division B, und hieraus folgt wieder, daß eben diese Zahl 3, auch der gröste gemeinschaftliche Theiler, der bey B dividirten Zahl 69 und des dabey gebrauchten Theilers 30 seyn müsse. Weil nun diese Zahl 69 wieder der Theiler ist, der bey der Division C gebraucht worden, und 30 das Ueberbleibsel von dieser Division, so ist wieder 3 der gröste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen 69, 858, deren letztere durch die erstere bey C dividiret worden: und weil 69 das Ueberbleibsel ist der Division bey D, und 858 derselben Theiler, so siehet man endlich, wenn man die gebrauchten Schlüsse nochmals wiederhohlet, daß die gefundene Zahl 3 auch der gröste gemeinschaftliche Theiler der gegebenen Zahlen 858 und 1785 seyn müsse.

§. 71. Wenn man diese Arbeit etwas genauer betrachtet, so siehet man, daß wenn man den grösten gemeinschaftlichen Theiler zwoer Zahlen 858 und 1785 finden wil, man in der That nichts anders zu thun habe, als die kleinere dieser Zahlen dergestalt zu multipliciren, daß das Product, der grössern Zahl, so nahe komme, als möglich, und so dann dieses Product von der grössern Zahl abzuziehen: daß man hernach mit dem Ueberbleibsel und der kleinern Zahl eben so verfahren müsse, und so wechselsweise immerfort, bis zuletzt nach Abzug eines dergleichen Products nichts übrig bleibt: und daß die Division würklich zu nichts diene, als diese grösten Producte zu finden. Wir wollen die Rechnung auf die Art anstellen, damit die Sache desto deutlicher werde.

$858 = a$	$1785 = b$
$828 = 12c$	$1716 = 2a$
$30 = d$	$69 = c$
$27 = 3e$	$60 = 2d$
$3 = f$	$9 = e$
	$9 = 3f$
	0

Man hat die kleinere Zahl a zwey mal genommen, von der grossen b abgezogen, dadurch ist c übrig geblieben. Diese Zahl c durch 12 multipliciret, ist wieder von a abgezogen worden, und hier ist d geblieben, welche Zahl man wieder verdoppelt, und von c abgezogen hat. Das Ueberbleibsel ist hier e. Nimt man dieses drey mal, und subtrahiret das

das Product von d, so bleibet f, welche Zahl wieder drey mal genommen, und von e abgezogen nichts übrig läst. Die Zahl 3 ist demnach der gröste gemeinschaftliche Theiler welchen man suchte. Man ziehet überall die grösten Producte ab, welche man haben kan, nicht weil dieses unumgänglich nothwendig ist, sondern nur die überflüssige Subtraction zu vermeiden: denn wenn man sich der grösten Producte bedienet, so bekommt man derselben so wenige als möglich ist. Man halte übrigens diese Rechnung mit der letzten zusammen, wenn man einige Schwierigkeit dabey finden solte, dieses wird dieselbe gar bald heben.

§. 72. Dieser Anweisung nun, den grösten gemeinschaftlichen Theiler zweyer Zahlen zu finden, kan man sich bedienen, wenn man einen Bruch zu der kleinsten Benennung bringen soll, welche er haben kan. Man muß zu dem Ende eine Zahl finden, welche den Nenner und den Zehler des Bruchs zugleich theilet: II. 8. und wir haben gesehen, daß die kleinste Benennung gleich anfangs erhalten werde, wenn man den grösten dieser gemeinschaftlichen Theiler annimt, und damit so wohl den Zehler des Bruchs als auch seinen Nenner theilet. II, 13. Nach den gegebenen Reguln kan man den grösten gemeinschaftlichen Theiler finden, wenn er sonst nicht beyfallen will, und man kan versichert seyn, daß der dergestalt gefundene Theiler würklich der gröste sey, und sich also die vergebliche Mühe ersparen, an eine weitere Reduction des Bruchs zu einer noch kleinern Benennung, zu gedenken, wenn man den dergestalt gefundenen Theiler bereits darzu angewendet hat. Der Bruch $\frac{858}{1785}$, dessen Glieder die zwo Zahlen sind, deren gemeinschaftlichen Theiler wir eben gesucht, und gefunden haben, lässet sich vermittelst dieses Theilers 3 in diesen Bruch $\frac{286}{595}$ verwandeln, aber keinesweges zu einer noch kleinern Benennung bringen.

Einige besondere Wege, den gemeinschaftlichen Theiler zwoer Zahlen zu finden.

§. 73. Diese Regul ist allgemein; man hat aber auch einige besondere Reguln die gemeinschaftlichen Theiler zwoer Zahlen zu finden, welche nicht ohne Bequemlichkeit angewendet werden können. Wir wollen einige der vornehmsten anführen.

§. 74. Alle Zahlen, deren letzte Ziffer eine von diesen ist: 0, 2, 4, 6, 8, oder mit einem Wort, alle gerade Zahlen, lassen sich durch 2 theilen. Dieses siehet man gar leicht ein: solte sich aber ja einige Schwie-

II. Abschnitt.

Schwierigkeit dabey finden, so darf man nur die Zahlen von 1 an, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, durch 2 multipliciren, um sich davon zu überführen.

§. 75. Alle Zahlen, deren letzte Ziffer 5 oder 0 ist, lassen sich durch 5 theilen, welches man auf eben die Weise einsehen kan, wenn man die Zahlen von 1 an, in ihrer natürlichen Ordnung durch 5 multipliciret, wodurch man alle Zahlen bekommt, deren letzte Ziffer 0 oder 5 ist. Denn es folgen diese Producte dergestalt auf einander 5, 10, 15, 20, 25, und so fort.

§. 76. Alle Zahlen welche am Ende eine 0 haben, lassen sich durch 10 theilen: alle Zahlen welche am Ende zwey 00 haben, durch 100, und so ferner. Und man kan also bey jedem Bruch so viele 00 in dem einen Glied, des Zehlers oder des Nenners weglöschen, als viele deren in dem andern Glied stehen, welche man ebenfals weglöschen muß. Zum Exempel, $\frac{3500}{1270}$ ist $= \frac{350}{127}$, und $\frac{132000}{397000}$ ist $= \frac{132}{397}$. Dergleichen Zahlen, welche am Ende ein oder mehr 0 haben, heissen auch runde Zahlen, und man kan einen Bruch allezeit ohne sonderlichen Fehler zu einer kleinern Benennung bringen, wenn man an die Stelle seiner Glieder diejenige runde Zahlen setzet, welche ihnen am nächsten kommen, und hernach nach Anweisung dieser gegenwärtigen Regul verfähret. Der Bruch $\frac{89}{191}$ ist etwas kleiner als $\frac{100}{200}$, und dieser ist so viel als $\frac{1}{2}$, und demnach ist der Bruch $\frac{89}{191}$ etwas, aber nicht sonderlich viel, kleiner als $\frac{1}{2}$. Genauer verfähret man, wenn man an die Stelle des gegebenen Bruchs $\frac{89}{191}$ setzet $\frac{90}{190}$, welcher Bruch dem Bruche $\frac{9}{19}$ gleich ist, und dem Werth des gegebenen Bruchs näher kommet.

§. 77. Alle Zahlen, welche, wenn man ihre Ziffer alle vor einzelne Einheiten gelten läst, und von denselben 3 so oft wegwirft als man kan, nichts übrig lassen, oder welche, wenn man ihre Ziffer zusammen addiret, ohne auf die Ordnung der Einheiten Acht zu haben, so sie bedeuten, eine Zahl geben, die sich durch 3 theilen läst, lassen sich ebenfals durch 3 theilen. Nach dieser Regul hätte man den gemeinschaftlichen Theiler der zwey Zahlen 1785 und 858 leicht finden können. Denn die Ziffer der ersten dieser Zahlen geben, wenn man sie dergestalt zusammen setzet, 21, oder 3, und die Ziffer der zweyten Zahl bringen durch eine gleichmässige Addition eben so viel. Woraus zu schliessen ist, daß sich diese Zahlen beyde durch 3 theilen lassen.

§. 78. Auch hievon ist der Grund nicht gar schwer einzusehen. Wenn

Wenn man die Zahlen, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. durch 3 multipliciret, so bekommet man gewiß eine Summe verschiedener 3, das ist 3, oder 3 + 3, oder 3 + 3 + 3, und soferner; diese Summen aber werden vermittelst der gewöhnlichen Ziffer dergestalt geschrieben, daß man verschiedene drey mal 3, oder 9 wegwirft, und nur die übrigen 3 oder 3 + 3 und so ferner, behält. Wie zum Exempel, an statt 3 + 3 + 3 + 3 man schreibt 12, welches durch die gewiesene Addition nur 3 giebt. Demnach werden alle Producte, welche entstehen, indem eine Zahl, so groß sie auch seyn mag, durch 3 multipliciret wird, durch Ziffern ausgedrücket, welche sich durch 3 dividiren lassen, wenn man mit ihnen, wie gewiesen worden ist, verfähret.

Wie die zusammengesetzten Zahlen aus den einfachen entstehen.

§. 79. Dieses alles, und was noch rückständig ist, wird noch deutlicher, wenn wir betrachten, wie die zusammengesetzte aus den einfachen Zahlen entstehen. Denn daß alle zusammengesetzte Zahlen endlich aus den einfachen durch die Multiplication heraus gebracht werden können, ist leicht einzusehen. Sie lassen sich genau dividiren, und können folgends durch die Multiplication des Theilers in den Quotienten entstehen; wenn dieses nicht wäre, so wären sie einfache Zahlen. Dieser Theiler und dieser Quotient sind nun wieder entweder einfache Zahlen oder zusammengesetzte. Ist das erste, so ist die zusammengesetzte Zahl nur aus den zweyen einfachen, dem Theiler und den Quotienten, entstanden: ist aber der Theiler oder der Quotiente wieder eine zusammengesetzte Zahl, so kan man ihn von neuen durch die Division zerfällen. Endlich muß man doch auf einfache Zahlen kommen. Zum Exempel, 24 ist eine zusammengesetzte Zahl, welche aus den zwey Factoren 4 und 6 entstanden ist. Jeder derselben läst sich wieder in zwey andere zerfällen, denn 4 ist $= 2 \times 2$, und $6 = 2 \times 3$. Demnach entstehet die Zahl 24 aus den Factoren 2, 2, 2, 3, welche alle einfache Zahlen sind, und so ist es mit allen übrigen.

§. 80. Daß nun, wenn man durch die Multiplication der einfachen Zahlen zusammengesetzte heraus bringet, an der Ordnung nichts gelegen sey, in welcher man multipliciret, und daß immer einerley Zahl heraus gebracht werde, in was Ordnung man auch die einfache Zahlen in einander multiplicire, ist bereits bekannt, und wir wis-

II. Abschnitt.

sen, daß $3 \times 2 \times 5$ keine andere Zahl bringe als $2 \times 5 \times 3$, und so ferner. I, 96.

§. 81. Daß aber einerley Zahl nicht aus verschiedenen einfachen Zahlen zusammen gesetzt werden könne, ist etwas, welches allerdings in Zweifel kan gezogen werden, ehe man es untersuchet. Die Zahl 35 entstehet aus der Multiplication der einfachen Zahlen 5 und 7, könte sie nicht auch aus zweyen oder dreyen, oder mehrern andern einfachen Zahlen, als 3 und 11, entstehen? Man siehet in diesem Exempel leicht ein, daß es nicht seyn könne, denn 3 mal 11 ist 33 und nicht 35. Aber verhält sich die Sache immer so? Und wenn einerley Zahl aus zweyen einfachen nicht auf verschiedene Art entstehen kan, kan nicht etwa einerley Zahl aus drey oder mehr verschiedenen einfachen Zahlen, durch deren Multiplication heraus gebracht werden? Die Zahl 210 kan aus nachfolgenden Factoren 6, 5, 7, und 15, 2, 7, wie auch aus 14, 5, 3, und noch aus andern entstehen, und es ist $210 = 6 \times 5 \times 7 = 15 \times 2 \times 7 = 14 \times 5 \times 3$. Solte dieses nicht auch angehen, wenn alle drey Factoren derselben einfache Zahlen sind? Denn unter denjenigen, welche wir angegeben haben, ist immer ein zusammengesetzter, nemlich 6, 15, 14, ob zwar die übrigen einfache Zahlen sind.

§. 82. Die Antwort hierauf ist, Nein. Es läst sich keine Zahl aus verschiedenen einfachen Zahlen zusammen setzen, und man kan keine Zahl durch eine andere einfache Zahl genau dividiren; als durch eine derjenigen, aus deren Multiplication sie einmal entstanden ist. Man siehet leicht ein, daß dieses letztere mit dem erstern einerley sey, oder daß es wenigstens aus demselben unmittelbar fliesse. Denn wenn sich die Zahl 30 aus keinen andern einfachen Zahlen als aus 2, 3, 5, zusammen setzen läst, so kan sie ohnmöglich durch eine andere einfache Zahl, 7 zum Exempel, dividiret werden. Wäre dieses, so wäre die Zahl 30 auch durch die Multiplication dieses Theilers 7 und den Quotienten, welchen wir indessen durch Q andeuten wollen, entstanden, und weil Q wieder entweder eine einfache Zahl, oder aus einfachen zusammen gesetzet ist, so wäre eben diese Zahl 30 auch aus den einfachen Zahlen 7 und Q, oder 7 und denjenigen einfachen Zahlen, aus welchen Q zusammen gesetzt ist, entstanden: und folgends wäre diese Zahl $30 = 2 \times 3 \times 5 = 7 \times Q$. Daß aber dem nicht also sey, und daß jede zusammengesetzte Zahl nur auf einerley Art aus einfachen Zahlen entstehen könne, ist nun zu beweisen.

§. 83. Man

§. 83. Man nehme zu dem Ende eine zusammengesetzte Zahl, was man vor eine nehmen will, 1729, und dividire sie durch eine einfache Zahl, durch die sie sich genau theilen läst. Dieses gehet mit der Zahl 19 an, und der Quotiente ist 91, und demnach $1729 = 91 \times 19$. Noch dividire man eben diese Zahl 1729 durch eine andere einfache Zahl genau. Die Zahl 7 thut dieses, und der Quotient ist hier 247, daß demnach eben die Zahl 1729 auch dem Producte 247×7 gleich ist. Ich sage, es lasse sich 91, der Quotient der ersten Division auch durch den Theiler der zweyten dividiren, und wir werden auf diese Eigenschaft das übrige bauen können, wenn dieselbe erst wird erwiesen seyn.

§. 84. Es sey demnach $19 \times 91 = 247 \times 7$, und 19 und 7 seyen einfache Zahlen, wir sollen erweisen, daß bey diesen Umständen sich der andere Factor des ersten Products 91, durch den einfachen Factor des zweyten, 7, theilen lasse. Man multiplicire 91 durch 7. Das ist, man multiplicire die Zahl 91 von welcher gezeiget werden soll, daß sie sich dividiren lasse, durch diejenige 7, welche vor einen ihrer Theiler angegeben wird. Oder man zeige vielmehr diese Multiplication nur durch die gewöhnlichen Zeichen an $7 \times 91 = 91 \times 7$, und bemerke die Gleichheit dieser Producte bey B, und die Gleichheit der vorigen bey A.

A	$19\times91 = 247\times7$	B	$7\times91 = 91\times7$
C	$14\times91 = 182\times7$	E	$5\times91 = 65\times7$
D	$5\times91 = 65\times7$	F	$2\times91 = 26\times7$
G	$4\times91 = 52\times7$		
H	$1\times91 = 13\times7$		

In dem ersten dieser Producte bey A und B, 19×91 und 7×91 kommt der gemeinschaftliche Factor 91 vor, und in dem letztern 247×7 und 91×7 ist der Factor 7 gemeinschaftlich, und diese gemeinschaftliche Factoren sind eben diejenige Zahlen, von welchen angegeben wird, daß die erstern 91 sich durch die zweyte 7 dividiren lasse. Die Producte bey B sind kleiner als diejenigen die bey A stehen. Man multiplicire diese Producte bey B beyde durch die gröste Zahl, mit welcher man sie multipliciren kan, ohne daß dadurch Zahlen kommen, welche die Producte bey A übertreffen. Man darf zu dem Ende nur die erstern Factoren derselben multipliciren, und die zweyten stehen lassen, denn damit werden auch die Producte multipliciret, I, 94. wie wir wissen. In unserm Exempel hat man diese Zahlen bey B mit nicht mehr als

II. Abschnitt.

2 multipliciren können, und die Producte, welche aus dieser Multiplication entstanden sind, stehen bey C. Diese Producte bey C ziehe man von den Producten bey A ab. Sie sind einander gleich, weil sie doppelt so groß sind als die gleichen Producte bey B; es müssen also nach diesem Abzug gleiche Zahlen bleiben, welche bey D angemerkt stehen. Man gebe sich die Mühe, diese Rechnungsarten etwas genauer zu erwegen, so wird hoffentlich bey denselben keine Schwierigkeiten bleiben, und alles deutlicher werden, als wir es uns durch viele Worte zu machen getrauen, weil alles aus den Grundsätzen, die bey der Multiplication gewiesen worden, I, 91. ganz natürlich fliesset.

§. 85. Nunmehro multiplicire man die Ueberbleibsel bey D wieder durch einerley Zahl, doch so, daß sie nicht grösser werden, als die Producte bey B. Wir können in unserm Exempel sie durch nicht mehr als durch 1 multipliciren, und musten sie also bey E schreiben, wie sie bey D stehen. Diese Producte bey E ziehe man nun wieder von den über ihnen stehenden Producten ab, und bemerke die Ueberbleibsel bey F. Wiederum multiplicire man diese Ueberbleibsel bey F, beyde durch die gröste Zahl, welche sie jedoch nicht grösser machet als die Ueberbleibsel bey D. Diese Zahl ist hier wieder 2, und die Producte hat man bey G bemerket. Man ziehe sie von den über ihnen stehenden Producten bey D ab, und bemerke den Ueberschuß bey H. Dieser ist hier $1 \times 91 = 13 \times 7$, das ist $91 = 13 \times 7$, und hieraus ist klar, daß sich 91 durch 7 dividiren lasse, und daß dadurch der Quotient 13 komme, weil nemlich 91 dem Product aus 7 und 13 gleich ist.

§. 86. Dieses nun hätte man zwar gar leicht einsehen können, wenn man bloß 91 durch 7 nach den ordentlichen Reguln dividiret hätte. Allein wir sollen zeigen, daß eben dieses unter den Umständen, die wir angegeben haben, beständig folge, und dieses einzusehen, leiten uns nachfolgende Betrachtungen, welche sich auf die gegebene Rechnung gründen. Man hat in derselben in der That nichts anders gethan, als daß man den grösten gemeinschaftlichen Theiler der Zahl 19 die bey A und der Zahl 7 die bey B im Anfang stehet, gesucht hat. Denn hätte man diesen grösten Theiler finden wollen, so hätte man II, 11. verfahren müssen, wie nachstehende Rechnung weiset. Damit diese desto leichter mit der vorigen II, 84. zusammen gehalten werden könne, sind die Zahlen, welche insonderheit zu vergleichen sind, mit einerley Buchstaben bezeichnet, nur haben wir uns hier der kleinen an statt

der

der grossen bedienet, welche in der vorigen Rechnung beygeschrieben sind:

a	- -	19	b	- -	7
c	- -	14	e	- -	5
d	- -	5	f	- -	2
g	- -	4			
h	- -	1			

Der gemeinschaftliche Theiler ist h, und weil die Zahlen 19 und 7 deren gemeinschaftlichen Theiler man suchte, einfache Zahlen sind, und durch keine andere Zahlen können getheilet werden, II, 83. so konte bey h, nachdem man die Arbeit bis ans Ende fortgesetzet, nichts anders kommen, als die Einheit, II, 68. und demnach kan auch der erste Factor bey H keine andere Zahl als die Einheit seyn. Der zweyte Factor des ersten Products bey H nemlich 91, ist eben die Zahl, von welcher zu zeigen war, daß sie sich theilen lasse, denn diese Zahl ist niemals verändert worden. Und es ist demnach das Product bey H allezeit die Zahl, deren Stelle hier 91 vertritt, selbst, weil 1 nicht multipliciret. Nun ist diese Zahl dem zweyten Producte bey H 13 × 7 nothwendig gleich, wie aus der Art, wie dieses Product heraus gebracht worden ist, erhellet. Es ist aber der zweyte Factor dieses Products die Zahl 7, von welcher man zeigen solte, daß sie die erstern 91 dividire, und kan niemals eine andere Zahl seyn, weil man diese Zahl ebenfals immer stehen lassen, wie sie im Anfang stunde: und demnach erhellet hieraus, daß allezeit der Factor, dessen Stelle hier 91 vertritt, ein Product aus der einfachen Zahl, an deren Stelle hier 7 stehet, und einer andern Zahl sey, und das ist dasjenige, so wir erweisen solten.

§. 87. Durch die Wiederhohlung desjenigen so wir eingesehen, und durch die Anwendung desselben auf verschiedene Fälle, werden uns die Sachen immer klärer, und dieses zu befördern, wollen wir die Rechnung hersetzen, durch welche gezeiget werden kan, daß wenn die Producte 7 × 247 und 91 × 19 gleich sind, und im übrigen alles bleibt wie vorhin, (wie denn auch diese Zahlen selbst von denjenigen, die wir bereits gebraucht, nicht verschieden sind; sondern nur in verkehrter Ordnung stehen) sich auf 247 durch 19 theilen lasse: Wir multipliciren zu dem Ende 247 in 19 und setzen:

II. Abschnitt.

A.	$7\times247 = 91\times19$		B.	$19\times247 = 247\times19$	
E.	$5\times247 = 65\times19$		C.	$14\times247 = 182\times19$	
F.	$2\times247 = 26\times19$		D.	$5\times247 = 65\times19$	
			G.	$4\times247 = 52\times19$	
			H.	$1\times247 = 13\times19$	

Weil nun hier wieder bey H gefunden wird $247 = 13\times19$, das ist, weil die Zahl 247 ein Product ist aus 13 und 19 so läst sich diese Zahl 247 nothwendig durch 19 theilen. Uebrigens zeiget die Ordnung der Buchstaben die bey den Zahlen stehet, wie die Rechnung zu verrichten sey.

§. 88. Hieraus ist nun dasjenige gar leicht zu schliessen, so wir II, 82. gesetzt, und zu beweisen vorgenommen haben, daß nemlich einerley Zahl nicht aus verschiedenen einfachen Zahlen zusammen gesetzt seyn könne. Wir wollen bey unserm Exempel bleiben, und die Zahl 1729 nehmen. Wir wollen setzen, daß jemand unternehme diese Zahl in einfache Factore, auf verschiedene Art zu zerfällen, einmal zum Exempel in diese A, B, C, und das zweyte mal in drey oder mehrere andere a, b, c, so müste er seine Arbeit ohngefehr so anfangen. Er müste die gegebene Zahl 1729 erstlich durch eine nach Belieben angenommene einfache Zahl 7 dividiren, und so denn auch durch eine andere, zum Exempel 19, dadurch bekäme er verschiedene Quotienten 247 und 91, und diese könten ihm, so er nicht weiter nachdächte, Hofnung machen, was er sucht, zu finden. So bald er aber sich des eben erwiesenen Satzes erinnert und erweget, daß der erste Theiler 7 in dem zweyten Quotienten 91 als ein Factor vorkommen müsse, und der zweyte Theiler 19 in dem ersten Quotienten, so siehet er leicht, daß er in seiner Unternehmung nicht weit kommen werde. Denn er kan hieraus schliessen, daß der erste Quotient 91 nothwendig ein Product aus 19 und einer andern Zahl, die wir indessen N nennen wollen, seyn müsse, und daß also die Zahl 1729 aus diesen dreyen Factoren $7\times19\times N$, bestehe. Aus eben dem Grunde muß er schliessen, daß in dem zweyten Quotienten, welchen er durch die Division der Zahl 1729 durch 19 heraus gebracht, der Theiler der ersten Division enthalten sey, daß er diesen Quotienten als ein Factum aus 7 und einer andern Zahl, die wir mit M bedeuten wollen, ansehen müsse, und daß demnach die Zahl 1729 selbst diesem Product $19\times7\times M$ gleich sey. Diese Producte $7\times19\times N$ und $19\times7\times M$ sind einander gleich, denn ein jedes derselben ist = 1729,

1729, und wenn man sie beyde durch 7×19 dividiret, so siehet man, daß die Zahlen M, N, ebenfals einander gleich seyn. In unserm Exempel ist $N = M = 13$, welches eine einfache Zahl ist, und so oft dergleichen vorkommt, siehet man ohne weiter zu gehen, daß die Zahl, welche man angenommen, nicht aus verschiedenen einfachen Zahlen zusammengesetzt seyn könne.

§. 89. Wird aber diese Zahl, die wir uns unter N vorstellen, nicht einfach befunden, so ist sie doch wieder aus zweyen einfachen und einer andern Zahl Q, welche auch 1 seyn kan, zusammen gesetzt, und diese einfache Zahlen, werden einerley befunden, wenn man der gegebenen Anweisung, sie heraus zu bringen, folget. Von der Zahl Q aber kan nunmehro eben das gezeiget werden, so vorher von N oder M gezeiget worden ist, und so immer fort, bis man auf einfache Zahlen kommt; woraus denn unwidersprechlich folget, daß keine zusammengesetzte Zahl durch die Multiplication anderer und anderer einfachen Zahlen entstehen könne.

§. 90. Demnach läst sich keine Zahl, ausser den einfachen Zahlen, durch deren Multiplication sie entstanden, durch andere Zahlen dividiren, als durch Producte zweyer, dreyer oder mehrerer dieser einfachen Zahlen. Und man kan alle Zahlen leicht finden, welche eine Zahl theilen, wenn man sie in ihre einfache Zahlen zerfället hat, denn man darf so dann nur die Producte jeder zwo, jeder drey, jeder vierr und so ferner, dieser einfachen Zahlen machen, um die Theiler alle zu bekommen. Die Zahl 546 zum Exempel, entstehet aus der Multiplication der einfachen Zahlen 2, 3, 7, 13, und ist dem Product $2 \times 3 \times 7 \times 13$ gleich, die Theiler derselben sind demnach 2, 3, 7, 13, und 2×3, 2×7, 2×13, 3×7, 3×13, wie auch 7×13, und ferner $2 \times 3 \times 7$, $2 \times 3 \times 13$ $2 \times 7 \times 13$ und $3 \times 7 \times 13$, durch andere Zahlen, als diejenige, welche wir angezeiget, läst sich die Zahl 546 nicht theilen, weil sie sich sonst auch aus andern einfachen Zahlen müste zusammen setzen lassen.

Erläuterung der gemeinschaftlichen Theiler verschiedener Zahlen.

§. 91. Wenn demnach zwo Zahlen aus einfachen zusammen gesetzt sind, die erste $A = 2 \times 3 \times 17$, und die zweyte $B = 5 \times 7 \times 13$, und die einfache Zahlen, aus welchen A zusammen gesetzt ist, sind von den einfachen Zahlen, durch deren Multiplication B entstehet, verschieden, so ist kein Gedanke, daß man einen gemeinschaftlichen Theiler vor beyde Zah-

II. Abschnitt.

Zahlen A und B finden werde, und es beziehen sich also solche Zahlen auf einander als einfache Zahlen. Im Gegentheil wenn zwo Zahlen $C = 2 \times 3 \times 5$, und $D = 5 \times 2 \times 13$ aus einfachen Zahlen dergestalt entstanden sind, daß unter den einfachen Zahlen deren Multiplication C bringet, etliche enthalten sind, die auch unter den Factoren der Zahl D stehen, dergleichen hier 2 und 5 sind, so haben die Zahlen gemeinschaftliche Theiler: nemlich eben die einfache Zahlen 2 und 5, welche bey denselben beyderseits vorkommen; und das Product derselben 10. Dieses Product, welches der gröste gemeinschaftliche Theiler ist, wird durch die Reguln gefunden, die wir oben gegeben. II, 65.

§. 92. Wenn drey zusammengesetzte Zahlen $A = 2 \times 3 \times 7 \times 13$, $B = 3 \times 7 \times 17$, und $C = 5 \times 7 \times 13$ gegeben sind, so ist der gemeinschaftliche Theiler aller dreyen die einfache Zahl, oder das Product der einfachen Zahlen, welche zugleich in A, B und C vorkommen, und bey den gegebenen Zahlen keine andere als 7. Man findet diese Zahl, wenn man erstlich den gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen A und B suchet, und so dann den gemeinschaftlichen Theiler dieses gefundenen Theilers 3×7, und der Zahl C ausmacht, welcher kein anderer seyn kan, als die Zahl 7. Man siehet II, 91. daß dieser Theiler der gröste seyn werde, welchen man haben kan, wenn man so wohl Anfangs den grösten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen A und B findet, als auch hernach den grösten gemeinschaftlichen Theiler des vorigen und der Zahl C nimt.

§. 93. Auf eben die Art kan man den grösten gemeinschaftlichen Theiler von vier Zahlen A, B, C und D finden, wenn man erstlich den grösten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen A und B heraus bringet, welchen wir a nennen wollen, so dann den grösten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen a und C suchet, welcher b heissen soll, und endlich den grösten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen b und D. Dieser wird die gröste der Zahlen seyn, welche die vier Zahlen A, B, C und D theilen. Mit mehrern Zahlen verfähret man auf eben die Art, und alles dieses, so sonst etwas weitläuftig müste dargethan werden, fliesset aus demjenigen, so wir von der Zusammensetzung der Zahlen gewiesen haben, ohne Umschweif.

Anwendung dieser Betrachtungen auf die Brüche.

§. 94. Wenn demnach die Glieder eines Bruchs beyde in die einfache Zahlen zerfället werden, aus deren Multiplication sie entstanden

den sind, so siehet man leicht, ob sich dieser Bruch zu kleinern Benennungen bringen lasse, und wie dieses geschehen könne. Man darf nemlich nur diejenigen einfachen Zahlen, welche in dem Zehler und Nenner zugleich vorkommen, aus der Multiplication weglassen, denn dadurch werden die Glieder des Bruchs durch die gedachten einfachen Zahlen, oder durch die Producte aus denselben, dividiret, und die noch übrige einfache Zahlen sind die Quotienten. Als wenn man die Glieder des Bruchs $\frac{42}{132}$ in ihre einfache Zahlen zerfället, den Zehler in 2, 3, 7, und den Nenner in 2, 2, 3, 11, so bekommt der Bruch dieses Ansehen $\frac{2\times3\times7}{2\times2\times3\times11}$. Man lasse aus dem Zehler die Factore 2, 3 weg, und eben diese Zahlen vermeide man auch in dem Nenner, so wird der Bruch $\frac{7}{2\times11}$ oder $\frac{7}{22}$ dem vorigen gleich seyn, und jener ist damit zu der kleinsten Benennung gebracht worden, durch welche er ausgedruckt werden kan. II, 13. Man siehet leicht, daß durch die Weglassung der Zahlen 2 und 3 man würklich so wohl den Zehler $2\times3\times7$, als auch den Nenner $2\times2\times3\times11$, oder $2\times3\times2\times11$, durch das Product aus denselben 2×3 oder 6 dividiret habe, I, 138. und daß 7 und $2\times11 = 22$ die Quotienten sind, die aus dieser Division kommen.

§. 95. Kommt nach dieser Zerfällung keine einfache Zahl in dem Zehler und Nenner des Bruchs zugleich vor, so läst sich auch der Bruch nicht zu einer kleinern Benennung bringen, weil in diesem Fall der Zehler und der Nenner keine gemeinschaftliche Theiler hat, sondern die Glieder des Bruchs sich als einfache Zahlen auf einander beziehen. II, 91. So ist es mit dem Bruch $\frac{15}{77}$, welcher durch die Zerfällung seiner Glieder in ihre einfache Zahlen dieser wird, $\frac{3\times5}{7\times11}$; es ist nicht zu gedenken daß man ihn zu einer kleinern Benennung werde bringen können, und eben hieraus können wir schliessen, daß der Bruch $\frac{7}{22}$ oder $\frac{7}{2\times11}$ die kleineste Benennung habe, zu welcher der Bruch $\frac{42}{132}$ oder $\frac{2\times3\times7}{2\times2\times3\times11}$ kan gebracht werden.

§. 96. Man kan dieses umkehren, und es ist richtig, daß, wenn ein Bruch sich nicht zu einer kleinern Benennung bringen läst; auch

II. Abschnitt.

nach der Zerfällung des Zehlers und Nenners desselben in die einfachen Zahlen, aus welchen sie entstanden sind, in dem Zehler keine einfache Zahl vorkommen müsse, welche auch in dem Nenner vorkommt. Denn wäre dieses, so könte man, wie eben gewiesen worden, den Zehler so wohl als den Nenner durch diesen gemeinschaftlichen Factor theilen. Der Bruch $\frac{6}{35}$ läst sich nicht durch eine kleinere Benennung ausdrücken: zerfället man aber seine Glieder in ihre einfache Zahlen $\frac{2\times3}{5\times7}$, so kommt in dem Nenner keine einfache Zahl vor, welche zugleich in dem Zehler vorkäme.

§. 97. Und ist in einem Bruch der Zehler grösser als der Nenner, und enthält also dieser Bruch eine oder etliche ganze Einheiten, so ist nicht möglich daß er einer ganzen Zahl, ohne anhängenden wahren Bruch gleich seyn könne, wenn nicht die einfache Zahlen des Nenners alle unter den einfachen Zahlen vorkommen, in welche der Zehler kan zerfället werden. Denn in diesem Fall läst sich der Bruch ohnmöglich auf die kleinste Benennung, die ein Bruch haben kan, nemlich die 1, bringen, und dieses muß geschehen können, wenn ein Bruch einer ganzen Zahl gleich seyn sol, II, 15. So ist es mit dem Bruch $\frac{385}{30} = \frac{5\times7\times11}{2\times3\times5}$ beschaffen, es kan derselbe zu dieser kleinern Benennung gebracht werden $\frac{7\times11}{2\times3} = \frac{77}{6}$, man kan ihn auch durch eine ganze Zahl mit einem derselben anhängenden Bruch, nemlich durch $12\frac{5}{6}$ ausdrücken, aber ohnmöglich durch eine ganze Zahl allein: da im Gegentheil der Bruch $\frac{42}{6} = \frac{2\times3\times7}{2\times3}$ dem Bruch $\frac{1\times7}{1}$ das ist der ganzen Zahl 7 gleich ist, weil die einfache Zahlen des Nenners alle unter den einfachen Zahlen des Zehlers vorkommen.

§. 98. Man siehet leicht, daß man auch dieses umkehren, und sagen könne, daß wenn man eine Zahl, welche aus einer ganzen und einem wahren Bruch bestehet, als $2\frac{4}{5}$ ganz in Form eines Bruchs schreibt, $\frac{14}{5}$, und die Glieder dieses Bruchs in ihre einfache Zahlen zerfället $\frac{2\times7}{5}$, es nicht möglich sey, daß alle einfache Zahlen des Nenners unter den einfachen Zahlen des Zehlers vorkommen, weil sonst der

der Bruch $\frac{14}{5}$, und folgends auch die Zahl $2\frac{4}{5}$ einer ganzen Zahl gleich seyn müste.

II. Abschnitt.

Einige Vortheile bey der Bruchrechnung.

§. 99. Sonst fliessen hieraus noch einige Bequemlichkeiten bey den Bruchrechnungen, welche wir nicht ganz ausser Acht lassen können, ob sie zwar so unumgänglich nothwendig nicht sind. Indem man zwey Brüche unter einerley Benennung bringt, können diese beyde Brüche öfters zu kleinern Benennungen gebracht werden, ohne daß diese kleinere Benennungen verschieden werden. Man kan dieses durch die II, 8. gegebene Regeln erhalten, aber man kan auch gleich anfangs, indem man die Brüche auf einerley Benennung bringt, dergestalt verfahren, daß man zugleich die kleinsten Benennungen erhalte, durch welche die Brüche ausgedruckt werden können.

§. 100. Gesetzt, es seyn die Brüche $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{12}$ unter einerley Benennung zu bringen. Man zerfälle, zu deütlichem Begrif desjenigen so wir weisen wollen, die Glieder derselben in ihre einfache Zahlen, so werden diese Brüche $\frac{5}{3\times3}$ und $\frac{7}{3\times4}$, und bringet man sie würklich unter einerley Benennung, indem man nemlich die Glieder eines jeden Bruchs durch den Nenner des andern multipliciret, so bekommt man vor den ersten Bruch $\frac{3\times4\times5}{3\times3\times3\times4}$, und vor den zweyten $\frac{3\times3\times7}{3\times3\times3\times4}$. Diese Brüche lassen sich beyde zu kleinern Benennungen bringen, indem man ihre Nenner und Zehler durch 3 dividiret. Unter diesen kleinern Benennungen sind die Brüche $\frac{4\times5}{3\times3\times4}$ und $\frac{3\times7}{3\times3\times4}$, und man siehet leicht, daß dadurch die Gleichheit der Nenner nicht aufgehoben worden. Betrachtet man aber die Brüche etwas genauer, so siehet man, daß die Zahl 3 dadurch so wohl in den Nenner als in den Zehler der beyden Brüche gekommen ist, weil sie in beyden Nennern der Brüche $\frac{5}{3\times3}$ und $\frac{7}{3\times4}$, welche unter einerley Benennung solten gebracht werden, vorkommt: weil jede Zahl, welche dergestalt in beyden Nennern vorkommt, nothwendig auch in die Zehler gebracht werden muß, wenn man, wie bey dieser Arbeit erfordert wird, die Zehler durch die Nenner multipliciret.

§. 101. Man

II. Abschnitt.

§. 101. Man kan demnach gleich Anfangs aus den Nennern alle diejenigen einfache Factoren weglassen, welche in denselben vorkommen, das ist, man kan die Nenner beyde durch ihre gröste gemeinschaftliche Theiler dividiren, und hernach die Zehler und Nenner der Brüche, an statt der ganzen Nenner, durch die Quotienten dieser Division, multipliciren. Nemlich, wenn die Brüche $\frac{5}{3\times 3}$ und $\frac{7}{3\times 4}$ unter einerley Benennung zu bringen sind, welche zugleich die kleinste unter allen gemeinschaftlichen Benennungen sey, so sie haben können, so multiplicire man die Zehler und Nenner des ersten Bruchs nur durch 4, und den Zehler und Nenner des zweyten durch 3, welche Zahlen nemlich in den Nennern 3×4 und 3×4', ausser dem gemeinschaftlichen Factor 3 vorkommen, so kommen die Brüche $\frac{4\times 5}{3\times 3\times 4}$ und $\frac{3\times 7}{3\times 3\times 4}$, oder $\frac{20}{36}$ und $\frac{21}{36}$, welche alle die Eigenschaften haben, welche bey den Brüchen erfordert werden, die man an statt der gegebenen schaffen sollte. Diese Zahlen 3 und 4 sind die Quotienten, welche kommen, wenn man die Nenner der gegebenen Brüche $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{12}$ durch die gröste Zahl dividiret, welche sie beyde theilet, nemlich durch die Zahl 3.

§. 102. Man kan sich eben dieser Betrachtung bedienen, wenn man mehr als zwey Brüche unter einerley Benennung bringen sol, welche zugleich die kleineste sey unter allen Benennungen, welche sie gemeinschaftlich haben können. Es seyn die drey Brüche $\frac{1}{6}, \frac{5}{21}, \frac{2}{15}$ unter einerley Benennung zu bringen, so muß man, wie II, 28. gewiesen worden, die Glieder eines jeden dieser Brüche durch das Product aus den Nennern der zwey übrigen multipliciren. Man zerfälle aber diese Glieder in die einfache Zahlen, aus welchen sie entstanden, so werden diese Brüche $\frac{1}{2\times 3}, \frac{5}{7\times 3}, \frac{2}{5\times 3}$, und man siehet, daß nach der angewiesenen Multiplication die Brüche unter einerley Benennung nachfolgende seyn werden: $\frac{3\times 3\times 5\times 7}{2\times 3\times 3\times 3\times 5\times 7}$, $\frac{2\times 3\times 3\times 5\times 5}{2\times 3\times 3\times 3\times 5\times 7}$, und $\frac{2\times 2\times 3\times 3\times 7}{2\times 3\times 3\times 3\times 5\times 7}$. Die Nenner der gegebenen Brüche, lassen sich alle durch die Zahl 3 theilen, und dieses ist die grösseste Zahl, welche sie

sie alle theilet. Diese Zahl stehet in einem jeden Zehler der gefundenen Brüche zwey mal als ein Factor, weil ein jeder Zehler in das Product zweyer Nenner multipliciret worden ist; und in einem jeden Nenner stehet sie drey mal als ein Factor. Demnach können die Glieder eines jeden Bruchs, durch 3×3 dividiret, und dadurch zu kleinern Benennungen gebracht werden: auf die Art $\frac{5 \times 7}{2 \times 3 \times 5 \times 7}$, $\frac{2 \times 5 \times 5}{2 \times 3 \times 5 \times 7}$, $\frac{2 \times 2 \times 7}{2 \times 3 \times 5 \times 7}$, und man siehet, daß deswegen doch die Benennung einerley bleibt. Man würde aber gleich Anfangs diese kleinern Benennungen erhalten haben, wenn man den gemeinschaftlichen Theiler 3 aller Nenner aus der Multiplication weggelassen hätte.

§. 103. Und man begreiffet also, daß nicht allein drey Brüche unter einerley Benennung zu bringen, sondern auch zu machen, daß diese gemeinschaftliche Benennung die kleineste sey, welche sie alle haben können, man dergestalt verfahren könne. Man nehme noch die vorigen Brüche, aber ohne ihre Glieder in einfache Zahlen zu zerfällen $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{21}$, $\frac{2}{15}$, und schreibe vor jeden derselben das Product aus den Nennern der übrigen, dergestalt $315)\frac{1}{6}$, $90)\frac{5}{21}$, $126)\frac{2}{15}$, dividire so dann diese Zahlen durch den grösten gemeinschaftlichen Theiler welchen sie haben, welchen zu finden wir II, 92. gelehret; dieser ist hier 9, und die Quotienten, die durch diese Division kommen, sind 35, 10, 14. Diese Zahlen schreibe man neben die Brüche an statt der vorigen $35)\frac{1}{6}$, $10)\frac{5}{21}$, $14)\frac{2}{15}$, und multiplicire so dann die Glieder eines jeden Bruchs durch die Zahl welche neben ihm stehet, so erlangt man das gesuchte, und die Brüche werden unter der kleinsten gemeinschaftlichen Benennung welche sie haben können, diese seyn: $\frac{35}{210}$, $\frac{50}{210}$, $\frac{28}{210}$. Auf eben die Art verfähret man, wenn mehr als drey Brüche unter eine Benennung zu bringen sind, welche zugleich die kleinste unter allen sey, die sie gemeinschaftlich haben können.

§. 104. Bey der Multiplication eines Bruchs durch einen andern, welche, wie wir gesehen, die Multiplication eines Bruchs durch eine ganze Zahl, oder die Multiplication einer ganzen Zahl durch einen Bruch unter sich begreift, II, 14. kan man sich eines ebenmässigen Vortheils gebrauchen, und dadurch das Product in kleinern Zahlen heraus bringen. Es sey $\frac{4}{21}$ durch $\frac{3}{10}$ zu multipliciren, welche Brüche, wenn

II. Abschnitt.

man ihre Glieder in die einfache Zahlen zerfället, aus welchen sie entstanden sind, dergestalt stehen $\frac{2\times2}{3\times7}$, und $\frac{3}{2\times5}$. Man multiplicire die Zehler und die Nenner, wie erfordert wird, II,38. so wird das Product $\frac{2\times2\times3}{2\times3\times5\times7}$ welches sich durch eine kleinere Benennung ausdrücken läst, wenn man unter den Factoren der Glieder die beyden 2 und 3 wegläßt, und dadurch wird das Product $\frac{2}{5\times7}$, oder $\frac{2}{35}$. Man würde aber diese Zahlen 2 und 3 gleich Anfangs vermieden und nicht in das Product gebracht haben, wenn man den Zehler des ersten Bruchs 4 und den Nenner des zweyten 10 durch die gröste Zahl 2 dividiret hätte, welche sie beyde dividiret, wodurch die Quotienten 2 und 5 kommen, und wenn man mit dem Zehler des zweyten Bruchs 3 und dem Nenner des ersten 21 eben so verfahren, und vermittelst der Division durch den gemeinschaftlichen Theiler 3 aus denselben die Quotienten 1 und 7 heraus gebracht hätte. Denn die Brüche $\frac{2}{7}, \frac{1}{5}$ an die Stelle der ersten gesetzt, bringen durch ihre Multiplication das Product $\frac{2}{35}$ welches man suchte, in den kleinsten Zahlen. Es ist leicht zu sehen, daß dieser kleine Vortheil sich auch bey der Division anbringen lasse.



Drit-

Dritter Abschnitt.

Von den Quadrat- und Cubiczahlen.

Begriffe der Quadratzahlen.

§. 1.

Wenn man eine Zahl in sich selbst multipliciret, so wird das heraus gebrachte Factum eine Quadratzahl genennet. Man beziehet jede Quadratzahl auf diejenige Zahl aus deren Multiplication in sich selbst sie entstanden ist, und nennet sie das Quadrat, oder die Quadratzahl von derselben Zahl. Und eben so beziehet man die Zahl aus deren Multiplication in sich selbst die Quadratzahl entstanden ist auf diese, und nennet sie dieser Zahl ihre Quadratwurzel. Zum Exempel 4 multipliciret durch 4 giebt 16, und diese 16 ist eine Quadratzahl. Und zwar ist 16 die Quadratzahl der 4, und 4 ist die Quadratwurzel der 16, weil 4 und keine andere Zahl, wenn man sie in sich selbst multiplicirет, die Zahl 16 bringet. Es werden demnach die Quadratzahlen leicht gemachet, wenn ihre Wurzeln gegeben sind.

§. 2. Wenn aber eine Quadratzahl gegeben ist, ist es weit gefehlet, daß die Wurzel mit eben solcher Leichtigkeit zu haben wäre. Es wird zwar jederzeit aus dem Product und dem einen Factor der andere Factor durch die Division gefunden, und kommt also auch die Quadratwurzel in die Stelle des Quotienten, wenn man das Quadrat durch die Wurzel dividiret. Allein dieses kan bey Erfindung der Wurzel nicht den geringsten Nutzen haben. Wer wird die Wurzel durch eine dergleichen Division suchen, da sie allbereits gegeben seyn muß, wenn man durch dieselbe dividiren sol? Es wäre dann, daß man durch vieles Probieren zur Wurzel kommen wolte, indem man ein gegebenes Quadrat durch eine Zahl nach der andern dividirte, bis man auf eine käme, welche einen Quotienten bringt, der eben so groß ist, als der angenommene Theiler. Dieses aber wäre eine entsetzliche Weitläuftigkeit, und überhaupt kan in den Wissenschaften nicht ge-

dul-

III. Abschnitt. duldet werden, daß etwas zu finden, man bloß eine Anweisung zu wiederhohlten Proben gebe. Wolte man aber ja probieren, so könnte man mit etwas geringerer Arbeit so lange Zahlen in sich selbst multipliciren, bis man auf eine käme, deren Quadrat eben so groß ist als die Zahl, deren Quadratwurzel man suchet. Diese Zahl wäre so dann die Wurzel. Als, die Wurzel von 16 ist 4, weil 4 mal 4 die Zahl 16 bringt, und wenn 16 durch 4 dividiret wird, der Quotient ebenfals 4 ist.

§. 3. Doch ist keine andere als diese angezeigte Weise anzugeben, diejenige Quadratwurzeln zu finden, welche nur eine Ziffer haben, oder, die Wurzeln 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 aus ihren Quadratzahlen zu erlangen. Da aber dieser Wurzeln ihre Quadrate bekant genug sind, so kan dieses niemand aufhalten. So bald man 4 nennet, fället so gleich bey, daß zwey mal 2, viere bringe, und daß demnach die Zahl 2 die Quadratwurzel von 4 seyn müsse. Der Deutlichkeit nichts zu vergeben haben wir diese Zahlen mit ihren Quadraten besonders hieher gesetzt:

Wurzeln: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Quadrate: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

und wir werden künftig immer zum voraus setzen, daß von diesen Quadraten die Wurzeln bekant sind.

§. 4. Nimt man eine der eben gesetzten Quadratzahlen an, welche man wil, und setzet derselben ein, zwey, drey, oder mehr Paare von 00 bey, so kan die Wurzel ebenfals gefunden werden. Man nimt erstlich die Quadratwurzel der Ziffer, und setzet derselben so viele einzelne 0 zu, als viele Paare von 00 in dem Quadrat vorkommen. Die Quadratwurzel von 36 ist die Zahl 6, von 3600 ist die Quadratwurzel 60, von 360000 ist die Quadratwurzel 600, und so ferner, und dieses siehet man leicht ein, wenn man Acht hat, wie die Quadrate aus den Zahlen, welche am Ende eine oder etliche 00 haben, nemlich durch die Multiplication entstehen; vor jede 0 welche in einer Zahl am Ende angetroffen wird, kommen zwo 00 in das Quadrat derselben.

§. 5. Eben so ist es auch mit dergleichen Ziffern, welche vorne 00 haben, und welche zehentheilichte Brüche bedeuten. Vor jede dergleichen 0 in der Wurzel stehen in dem Quadrat zwo 00, oder es sind so viele Stellen von der letzten Ziffer an, bis an den Ort der einfachen Einheiten. Das Quadrat von 0,2 ist 0,04, das Quadrat von 0,03 ist 0,0009, das Quadrat von 0,9 ist 0,81, und das Quadrat von 0,08 ist

ist 0,00064. Man darf nur die vorgeschriebene Zahlen, wie III, oben I, 111. gelehret worden, in sich selbst multiplicizen, wenn man Abschnitt, diese Wahrheit ganz deutlich einsehen wil.

§. 6. Was aber die übrige Quadratzahlen anlanget, so sind ihre Wurzeln nicht so leicht gefunden, und wir können, wie dieses zu thun ist, oder, wie man sich gemeiniglich auszudrücken pflegt, wie die Wurzel eines jeden dergleichen Quadrats auszuziehen, nicht eher verständlich machen, als bis wir vorgestellet haben, wie die Theile einer Wurzel in ihre Quadratzahl hinein gebracht, und gleichsam verwickelt werden. Gleichwie nemlich oben I, 149. die Theile des Quotienten nach und nach aus der Zahl heraus zubringen gelehret worden, welche dividiret werden solte; eben so wird auch die Wurzel nach und nach, und ein Theil derselben nach dem andern, aus der Quadratzahl heraus gebracht, und darzu werden Reguln zu geben seyn. Wie wil man aber den Grund derselben einsehen, wenn nicht vorher bekant ist, wie die Theile der Wurzel in die Theile der Quadratzahl verwickelt worden? Wir haben aus eben der Ursache uns vorstellen müssen, wie die Zahlen aus dem Theiler und dem Quotienten entstehen, damit wir hinwiederum den Quotienten aus der Zahl, welche zu dividiren ist, und dem Theiler, heraus zu bringen lerneten.

§. 7. Diejenige Art deren wir uns damals I, 83. bedienet, indem wir nemlich die Zahlen durch eine Menge einzelner Einheiten vorgestellet, scheinet auch hier die bequemste zu seyn. Dadurch wird den Augen dasjenige vorgestellt, was man auch in dem Verstande haben muß; wenn man einsehen wil was gesagt wird. Es ist kein Zweifel, daß die Begriffe der Dinge nicht nur deutlicher sondern auch lebhafter werden, wenn sie nicht allein durch Worte oder andere dergleichen Zeichen ausgedrückt werden, sondern auch dasjenige selbst, so die Begriffe vorstellen sollen, den Augen vorgeleget wird.

Zusammensetzung der Quadratzahl einer zweytheiligen Wurzel.

§. 8. Man nehme demnach eine Zahl, was man vor eine wil, als AB, und theile dieselbe in die zwey Theile AC und CB, multiplicire so dann die Zahl in sich selbst, oder setze sie erst 3, und hernach 2 mal, nach Maßgebung der Theile, in welche man sie zerschnitten, so wird das Factum, welches die Quadratzahl der Wurzel 5 seyn wird, F. 21.

S stehen,

III. Abschnitt.

stehen, wie die Figur weiset; Aus welcher man so gleich siehet, warum solche Zahlen Quadratzahlen genennet werden: weil sich nemlich die Einheiten aus welchen sie bestehen, in solche Vierecke ordnen lassen, welche in der Geometrie Quadrate genennet werden.

§. 9. Man siehet aber auch dasjenige, welches wir hauptsächlich erweisen wolten, daß ein jedes Quadrat einer Zahl, die in zwey Theile getheilet worden ist, man sich füglich aus vier Theilen zusammen gesetzt vorstellen könne, und daß diese Theile sind, erstlich DC, das Quadrat des ersten Theils der Wurzel AC. Es ist sichtlich, daß die in Form eines Vierecks zwischen D und C gesetzte Zahl, nichts anders als dieses Quadrat des ersten Theils der Wurzel AC seyn könne. Denn die Linie CF schneidet von der Wurzel diesen ersten Theil AC ab, und die Querlinie DE hat man gezogen, nachdem man die Wurzel AB, und folgends auch den ersten Theil derselben AC so oft gesetzt hatte, als oft in eben diesem Theil AC die Einheit enthalten ist, das ist, es ist die Linie DE gezogen worden, nachdem man den ersten Theil der Wurzel AC in sich selbst multipliciret hat.

§. 10. Zweytens, so stehet an diesem Quadrate DC ein Factum CE, welches entstanden ist, indem der zweyte Theil der Wurzel, nemlich CB, welchen der Strich CF zur rechten läst, durch den erstern Theil AC = BE multipliciret worden. Eine Wiederholung desjenigen so eben gesagt worden mit gar geringer Veränderung, kan dieses klar machen, wenn die Sache nicht vor sich selbst in die Augen leuchten solte. Man kan dieses Factum bloß ein Factum aus den Theilen der Wurzel nennen, weil in der That einerley kommt, ob man den ersten Theil derselben BE durch den zweyten CB, oder den zweyten CB durch den ersten BE multipliciret. I, 87.

§. 11. Drittens hat man noch ein dergleichen Factum aus den zwey Theilen der Wurzel in der untern Abtheilung zur linken, nemlich DF, in welchem der erste Theil der Wurzel AC durch den zweyten CB multipliciret ist, und endlich kommt viertens in der untern Abtheilung zur rechten wieder ein Quadrat des andern Theils der Wurzel CB, nemlich FE, bey welchem wir uns desto weniger aufzuhalten nöthig haben, weil auf eben die Art einzusehen ist, daß in diesen Fach FE das Quadrat des zweyten Theils kommen müsse, nach welcher wir gezeiget, daß in dem allerersten, und diesem letztern schräg gegen über stehenden Fach DC, das Quadrat des ersten Theils der Wurzel enthalten sey.

§. 12. Die-

§. 12. Dieses kürzer zu fassen muß man sagen, daß das Quadrat einer Wurzel AB die aus zweyen Theilen AC und CB zusammen gesetzt ist, das Quadrat eines jeden derselben Theile AC und CB enthalte, und noch über das zwey Producte, welche entstehen, wenn man die Theile der Wurzel AC und BC in einander multipliciret.

III. Abschnitt.

§. 13. Man wird dieses alles so wohl deutlicher verstehen, als auch davon besser überzeuget werden, wenn man noch mehrere Quadrat-Zahlen von verschiedenen Wurzeln auf diese Art setzet. Man theile zum Exempel die Wurzel 7 in die zwey Theile 4×3, so bestehet dieses Quadrat von 7, welches 49 ist aus den Theilen 4×4, oder 16, 4×3 oder 12, nochmals 4×3 oder 12, und 3×3 welches 9 ist. Das ist, es bestehet das Quadrat von 7 aus den Quadrat-Zahlen der beyden Theile 4 und 3 in welche man 7 getheilet, und folgends aus 16+9, und über das aus dem Product dieser Theile gedoppelt genommen, oder 2 mal 12, welches 24 ist, und ist demnach das Quadrat 16+24+9, das ist 49, wie allbereit bekannt ist, man kan diese Zahlen leicht in die Ordnung schreiben, in welcher die Zahlen der Figur stehen.

§. 14. Das gedoppelte Factum der Theile entstehet auch, wenn man einen der Theile der Wurzel, den ersten wenn man will, gedoppelt nimt, und durch den andern Theil multipliciret, I, 94. und dieses wollen wir mehrerer Bequemlichkeit halben künftig beständig annehmen. In unserm Exempel ist dieses Factum 24, welches kommt, wenn man den ersten Theil der Wurzel 4 gedoppelt nimt, und diese Zahl durch den andern Theil der Wurzel 3, multipliciret. 8×3=24.

§. 15. Auf eben die Art kan man auch die Quadratzahlen solcher Wurzeln machen, welche aus Zehnern und Einheiten bestehen, und diese sind es hauptsächlich, welcher wegen diese ganze Betrachtung von der Zusammensetzung der Quadrate aus den Theilen der Wurzel unternommen wird. Denn, es ist nicht nöthig zu lehren, wie eine Quadratwurzel, so nicht über 10 steiget, auszuziehen ist, weil dieses als vor sich bekannt angenommen worden ist; wohl aber müssen Reguln gegeben werden, nach welchen solche Wurzeln zu finden sind, die über 10 steigen.

§. 16. Es sey die Zahl, deren Quadrat man nehmen will 87, welche aus den Theilen 80 und 7 zusammen gesetzet ist: so bestehet diese Quadratzahl:

III. Abschnitt.

1. Aus dem Quadrate des ersten Theils	6400
2. Aus dem Product der Theile gedoppelt	1120
3. Aus dem Quadrate des andern Theils	49
Und ist demnach die Summe dieser Zahlen	7569

Das gesuchte Quadrat von 87, wie dieses auch durch die Multiplication der 87 in sich selbst, das ist durch 87, gefunden wird.

§. 17. Ja selbst diese Multiplication weiset uns die angegebene Zusammensetzung des Quadrats in diesem Falle. Man verfahre mit der Multiplication ordentlich:

87	87
87	87
7×7	49
7×80	560
80×7	560
80×80	6400
□ 87	7569

so bekommt man erstlich 49, das Quadrat von 7, so dann 560 das Factum aus 80 durch 7, ferner nochmals 560, das Factum aus 7 durch 80, und endlich 6400 die Quadratzahl von 80. Man darf nur die Multiplication nach den gemeinen Reguln verrichten, aber kein Factum im Anfang mit dem andern vermischen, sondern jedes besonders schreiben, dieses einzusehen.

§. 18. Eben so kan man auch das Quadrat einer Zahl finden, welche zwey Ziffern und am Ende oder auch von forne 00 hat. Man mache erstlich das Quadrat der Ziffer selbst, wie eben gewiesen worden, und hänge so dann so viele paare von 00 an dasselbe, als viele einzelne 0 in der Wurzel vorkommen. Demnach ist das Quadrat von 870, die Zahl 756900, das Quadrat von 8700 ist die Zahl 75690000, und so weiter.

Die Quadratzahl einer Wurzel die mehr als zween Theile hat, zusammen zu setzen.

§. 19. Dieses wäre hinlänglich uns nunmehro zur Ausziehung solcher Quadratwurzeln zu leiten, welche nur aus zwey Ziffern bestehen. Allein weil die Reguln dazu auch in der allgemeinen Regul enthalten sind, nach welcher alle Wurzeln, aus wie vielen Ziffern sie

auch

auch bestehen mögen, zu erlangen sind: so wollen wir fortfahren zu weisen, wie die Quadrate von Zahlen, die mehrere Ziffern haben, entstehen.

III. Abschnitt.

§. 20. Es wird das Quadrat der Zahl 364 verlangt. Man nehme erstlich das Quadrat der ersten Ziffer derselben, 3 oder eigentlich 300, welches Quadrat ist: 9 * * * *
so dann das Product aus der ersten Ziffer gedoppelt, das ist aus 600 in die nachfolgende 6 oder 60 = 36 * * *
und das Quadrat dieser zweyten Ziffer 60 = 36 * *
so hat man das Quadrat aus 360, oder 36 Zehnern, welche man als den ersten Theil der Wurzel ansehen kan. Will man nun weiter gehen, und das ganze Quadrat der Zahl 364 oder 360 + 4 machen, so muß man zu dem bereits gemachten Quadrat den ersten Theil 360 zwey mal genommen, in den zweyten, das ist 720 × 4 = 288 *
und noch das Quadrat der letzten Ziffer 4, = 16
setzen: so ist die Summe von diesen Ziffern allen = 132496
das Quadrat von 364 welches man suchte.

§. 21. Wir wollen diese Zahlen noch einmal absetzen, damit wir sie aber etwas mehr in die Enge bringen, P allezeit den ersten Theil der Wurzel, und p den zweyten bedeuten lassen, daß demnach $2P \times p$ nichts anders als das Factum aus dem ersten Theil gedoppelt, durch den zweyten multipliciret, wird bedeuten können. I, 89. Ein q hingegen ans Ende einer Zahl oder eines Buchstabens, welcher eine Zahl anzeiget, gesetzt, soll die Quadratzahl, von welcher jene die Wurzel ist, andeuten. Also wird durch 3^q die Quadratzahl von 3 oder 9 ausgedrücket, durch P^q das Quadrat des ersten Theils einer Zahl, und durch p^q, das Quadrat des andern Theils eben derselben Zahl. Diesem zu folge kan man die oft besagte Regul die Quadratzahlen zusammen zu setzen III, 12. gar leicht ausdrücken, wenn man nur sagt, das Quadrat einer Zahl, welche in zwey Theile getheilet ist, bestehe aus $P^q + 2P \times p + p^q$. Nach der angenommenen Bedeutung der Buchstaben P, p, q, kan diese kurze Bezeichnung nichts anders ausdrücken, als was in der Regul enthalten ist.

§. 22. Es sey nun nochmals das Quadrat aus 364 zu machen, so wird erstlich das Quadrat aus 36 Zehnern und hernach das Quadrat aus 360 + 4 zu machen seyn. III, 20. Dieses geschiehet folgender

III. Abschnitt. dergestalt. Wenn man erstlich die Zahl 360 in zweye theilet, deren erstere 300 ist, und die zweyte 60, und so dann in der Zahl 364, vor den ersten Theil 360 und vor den zweyten 4 annimt: so ist

$$364^q = \begin{cases} P^q = 360^q = \begin{cases} P^q = 300^q = & 9\ldots \\ 2P \times p = 2 \times 300 \times 60 = & 36\ldots \\ p^q = 60^q = & 36\ldots \end{cases} \\ 2P \times p = 2 \times 360 \times 4 = & 288. \\ p^q = 4^q = & 16 \end{cases}$$

und folgends das gesuchte Quadrat 132496

§. 23. Es sind demnach die Zahlen, durch deren Addition die verlangte Quadratzahl gefunden wird, nachfolgende: Erstlich hat man 9, das Quadrat der ersten Ziffer 3 der gegebenen Wurzel 364. Zweytens das Factum aus dieser Ziffer zwey mal genommen, durch die folgende 6, dieses ist 36. Drittens das Quadrat der zweyten Ziffer 6, das ist, wieder 36. Viertens das Factum aus der ersten und zweyten Ziffer 36 zwey mal genommen durch die dritte, welches 288 ist. Fünftens das Quadrat der dritten Ziffer, 16.

§. 24. Und dieses ist eben der Anfang der Regul, nach welcher aus einer jeden Zahl, sie mag durch so viele Ziffern geschrieben seyn als man will, eine Quadratzahl zu machen ist, und man hat dieselbe nur nach eben den Gesetzen fortzuführen, nach welchen man sie angefangen. Wir wollen dieselbe ganz setzen, und mit einem Exempel erläutern, ehe wir zu ihrem Beweiß schreiten.

§. 25. Es sey das Quadrat der Zahl 75342 zu machen, welche aus fünf Ziffern bestehet: so nehme man

1) Das Quadrat der ersten Ziffer, welches 49 ist.

2) Das Factum aus der ersten Ziffer gedoppelt, oder aus 14 durch die nachfolgende 5. Dieses Factum ist 70.

3) Das Quadrat der zweyten Ziffer 5, das ist 25.

4) Das Factum aus der ersten und andern Ziffer 75 gedoppelt, oder aus 150 durch die nächste dritte 3, welches ist 450.

5) Das Quadrat dieser dritten Ziffer 9.

6) Das Factum aus der ersten, zweyten und dritten Ziffer 753 gedoppelt, das ist das Factum aus 1506 durch die nächste 4, welche Multiplication 6024 bringet.

7) Das Quadrat der vierten Ziffer 4, welches 16 ist.

8) Das

8). Das Factum aus der ersten, zweyten, dritten und vierten Ziffer 7534 gedoppelt, oder aus 15068, durch die nächste 2, da denn 30136 kommt.

III. Abschnitt.

9). Das Quadrat der fünften Ziffer 2, welches 4 ist. Die also gefundene Producte sind richtig unter einander zu setzen, daß nemlich überall die Ordnungen der Einheiten, welche in denselben enthalten sind, in Acht genommen werden. Es ist dieses etwas leichtes; man darf nemlich, wenn man von dem ersten Quadrate anfängt, nur beständig das nächstfolgende Factum um eine Stelle weiter hinaus nach der rechten Hand rücken, und das nächste Quadrat wieder um eine Stelle weiter, so daß die Zahlen unter einander zu stehen kommen, wie hier sichtlich ist:

```
49
 70
  25
  450
    9
   6024
     16
    30136
        4
5676416964
```

Die Summe aller dieser Zahlen ist das gesuchte Quadrat der Zahl 75342, welches, wenn man will, auch durch die Multiplication derselben in sich selbst kan gefunden werden.

§. 26. Die Richtigkeit dieser allgemeinen Regul ist nach eben der Weise einzusehen, nach welcher wir oben III, 20. gefunden, wie ein Quadrat einer Zahl, die nur aus drey Ziffern bestehet, gemacht werde. Man mache erstlich das Quadrat der zwey ersten Ziffern 75 der gegebenen Zahl 75342, welches geschiehet, wenn man III, 21. setzet $70 = P$, und $5 = p$, und machet:

$P^q = 7^q =$ - - - - - - - 49.

$2P \times p = 14 \times 5 =$ - - - - - 70.

$p^q = 5^q =$ - - - - - - - 25

Diese drey Zahlen machen das Quadrat von 75. Wenn man nun zu den vorigen zweyen 75 die dritte Ziffer der gegebenen Zahl 3 hin-

III. Abschnitt.

zu thut, und nunmehro setzet $P = 75$, oder eigentlich 750, und $p = 3$, so hat man bereits P^q gefunden, und man hat also nur noch zu machen:

$2P \times p = 150 \times 3 =$ - - - - - 450
und $p^q = 3^q =$ - - - - - 9

Und damit ist das Quadrat von 753 fertig, als welches der Summe aller bereits gefundenen Zahlen gleich ist. Um nun weiter fortzugehen, setze man nunmehro $P = 753$ oder eigentlich 7530, und $p = 4$, welches die nächstfolgende Ziffer in der gegebenen Wurzel ist, so hat man, wie eben gesagt ist, bereits das Quadrat von P^q und hat also nur noch darzu zu setzen;

$2P \times p = 1506 \times 4 =$ - - - - 6024
und $p^q = 4^q$ - - - - - 16

Damit ist das Quadart von 7534 auch gemacht. Man setze zu diesen noch die letzte Ziffer der gegebenen Wurzel 2 hinzu, und mache nun $P = 7534$, oder eigentlich 75340 und $p = 2$, so ist wieder P^q die Summe der bereits gefundenen Ziffer, und wenn man demnach zu diesen noch hinzu thut:

$2P \times p = 15068 \times 2 =$ - - - - 30136
und $p^q = 2^q =$ - - - - - 4

So hat man alle Theile des Quadrats $75340 + 2$, das ist alle Theile des Quadrats der Zahl 75342, und man darf diese demnach nur in eine Summe zusammen ziehen, damit dieses Quadrat würklich in einer Zahl dargestellet werde. Man siehet aber leicht, daß diese Theile des Quadrats nach der gegebenen Regul entstanden sind.

§. 27. Vielleicht kommt einigen die Sache noch deutlicher vor, wenn wir sie bloß vermittelst der gegebenen Zeichen III, 21. kurz ausdrücken, welches nachfolgender Massen geschehen kan: wobey wir uns wegen Enge des Raums an statt des gewöhnlichen Zeichens der Multiplication bloß eines Puncts (.) bedienet haben, welches wir zwischen die zwey Factoren gesetzet, welches zwar auch sonst bey vielen I, 89. gewöhnlich ist:

$P^q =$

$$P^q = 75342^q = \begin{cases} P^q = 7534^q = \begin{cases} P^q = 753^q = \begin{cases} P^q = 75^q = \begin{cases} P^q = 7^q = \\ 2P.p = 2.7.5 = \\ p^q = 5^q = \end{cases} \\ 2P.p = 2.75.3 = \\ p^q = 3^q = \end{cases} \\ 2P.p = 2.753.4 = \\ p^q = 4^q = \end{cases} \\ 2P.p = 2.7534.2 = \\ p^q = 2^q = \end{cases}$$

$P^q = 7^q =$	49	..			
$2P.p = 2.7.5 =$	7	0			
$p^q = 5^q =$	.	25	.		
$2P.p = 2.75.3 =$	.	45	0.		
$p^q = 3^q =$	.	..	.9	.	
$2P.p = 2.753.4 =$	.	.6	02	4.	
$p^q = 4^q =$	.	..	..	16	.
$2P.p = 2.7534.2 =$	.	.	30	13	6.
$p^q = 2^q =$	.	..	..	..	.4
	56	76	41	69	64

§. 28. Und nunmehro sind wir im Stande verständlich zu weisen, wie aus einem jeden gegebenem Quadrat die Wurzel zu erhalten ist. Es sey das Quadrat 132496 gegeben, welches wir oben III, 22. aus seiner Wurzel 364 gemacht. Wir setzen daß diese Wurzel unbekannt sey, und daß man sie aus dem Quadrate erst finden solle. Zu dem Ende theilet man erstlich das vorgegebene Quadrat in Classen von zwo Ziffern von der rechten gegen die linke Hand, da denn die letzte Classe zur linken, wenn sichs so füget, auch nur eine Ziffer haben kan. Diese Abtheilung stehet so: 13|24|96, und man erhält dadurch, daß man in einem Blick einsiehet, wo die Quadrate der Ziffer der Wurzel, welche man in das Quadrat der ganzen Zahl gebracht, anzutreffen sind, und wo ferner die Producte, welche ausser diesen Quadraten darein gebracht worden, zu suchen sind.

§. 29. Nemlich an dem letzten Strich endiget sich mit der Ziffer 6 das Quadrat 16 der letzten Ziffer die Wurzel 4, und die erste Ziffer desselben 1 vermischet sich mit den übrigen. Dieses wie alles folgende kan man einsehen, wenn man sich nur die Rechnung vor Augen leget, nach welcher dieses Quadrat aus seiner Wurzel III, 22. gemacht worden. Es ist aber eben dieses auch leicht zu begreiffen, wenn man bedenket, daß die letzte Ziffer der Wurzel einfache Einheiten bedeute, und demnach die Quadratzahl derselben ebenfals einfache Einheiten enthalten müsse. Das Quadrat der nächsten Ziffer der Wurzel 6, welches 36 ist, endiget sich bey der Ziffer 4, welche an dem zweyten Striche stehet, ist aber gar sehr mit den übrigen Producten vermischet. Daß es indessen sich hier endigen müsse, ist ausser der gedachten Rechnung, durch welche wir diese Quadratzahl gemacht haben, auch daraus zu ersehen, weil diese Ziffer 6 in der Wurzel Zehner bedeutet, daß demnach nothwendig die Quadratzahl derselben 36 Hunderte

III. Abschnitt.

derte bedeuten, oder eigentlich 3600 seyn muß. III, 4. Eben so siehet man, daß das Quadrat der ersten Ziffer der Wurzel 3, welches 9 ist, sich in der ersten Abtheilung mit der letzten Ziffer derselben endige. Denn die erste Ziffer der Wurzel bedeutet hier Hunderte, oder ist eigentlich 300, und folgends das Quadrat davon 90000. Und also ist es mit allen Quadraten, der einzelnen Ziffer der Wurzel beschaffen. Jene endigen sich allezeit zur linken an dem Theilungszeichen, und, so fern diese aus mehr als einer Ziffer bestehen, stehen jene von dannen weiter nach der linken zu.

§. 30. Da nun die Producte, welche ausser obgedachten Quadraten noch in das Quadrat einer Zahl müssen gebracht werden, allezeit eine Ziffer weiter hinaus gegen die rechte zu gesetzt werden, wie man leicht siehet, wenn man auf die Zusammensetzung der Quadratzahlen, die wir gewiesen, III, 25. Acht hat, so kan es nicht anders seyn, sie müssen bey dieser Eintheilung einer Quadratzahl sich allezeit an dem Theilungszeichen zur rechten Hand endigen, und von dannen, im Fall sie aus mehr als einer Ziffer bestehen, weiter nach der linken zu zurücke stehen. So endiget sich in unserm Exempel das Factum aus 2 mal 3 durch 6 multipliciret oder 36 unter der 2, und das Factum aus 2 mal 36 durch 4, oder 288 unter der 9, und die übrige Ziffern derselben stehen von dannen weiter nach der linken Hand.

Die Wurzel aus einer ganzen Quadratzahl auszuziehen.

§. 31. Nach dieser Vorbereitung III, 28. wird die Ausziehung der Quadratwurzel folgender gestalt verrichtet. Man fängt dieselbe bey der ersten Classe zur linken Hand, dadurch an, daß man die Wurzel eines solchen Quadrats nimt, welches unmittelbar kleiner ist, als die Ziffer dieser Classe. Dieses ist so gleich die erste Ziffer der gesuchten Wurzel. Die nächste und alle folgende werden durch eine Division gefunden, aber um jede neue Ziffer zu finden, muß man auch einen besondern Theiler haben. Und dieser Theiler ist allezeit doppelt so groß, als alle dasjenige, so von der Wurzel bereits gefunden worden, und wird demnach immer grösser und grösser, je weiter man in Ausziehung der Wurzel fortfähret. Ausser dem aber ist die Ausziehung der Wurzel von der gemeinen Division darin unterschieden, daß man nach geschehener Division hier nicht nur das Product aus dem Theiler in den Quotienten, sondern noch über dieses das Quadrat des Quotienten abziehen muß, nachdem dieses an seinen

nem gehörigen Platz gesetzet worden. Dieses ist die erste Einleitung. Es wird alles deutlicher werden, wenn wir die Reguln ordentlich aus einander setzen, und mit einem Exempel erläutern.

III. Abschnitt.

§. 32.

```
      13|24|96 |364
       9|  |
     -------
  6)   424|
       36.
        36|
     ---------
 72)    2896
        288.
          16
        -----
           0
```

1) Die Zahl 9 ist das Quadrat, welches unmittelbar kleiner ist als die Ziffer der ersten Classe 13, denn das nächste Quadrat 16 ist schon grösser. Jenes Quadrat wird von 13 abgezogen, und die übergebliebene 4 darunter bemerket, die Wurzel aber dieses Quadrats 9, welche 3 ist, wird als der erste Theil der gesuchten Wurzel des gegebenen Quadrats 132496, an der Stelle bemerket, wo man sonst bey der Division den Quotienten hinzuschreiben pflegt.

2) Nunmehro setze ich, um mich desto weniger zu verwirren, der übergebliebenen 4 die nächste Ziffer des Quadrats, welche die erste der folgenden Classe ist, bey, welche mit der vorigen 42 giebt. Aus dieser 42 wird durch die Division der nächste Theil der Wurzel gebracht. Um aber diese Division zu verrichten

3) Multipliciret man dasjenige, so von der Wurzel bereits gefunden worden ist, als hier 3, durch 2, das Factum 6 ist der Theiler, welchen man an seiner Stelle neben der Zahl 42, die zu dividiren ist, antrift.

4) Nachdem alles zur Division fertig, hat man nunmehro nur die besagte Zahl 42 durch den beygesetzten Theiler 6 zu dividiren. Der Quotient 6 ist die zweyte Ziffer der Wurzel, und wird neben die bereits gefundene erste, welche 3 war, gesetzet.

5) Nunmehro schreibt man unter die Zahl 42, welche man dividiret hat, das Product aus dem Quotienten in den Theiler, welches 36 ist. Ferner rücket man die nächste Ziffer des Quadrats, welche die

 letzte

III. Abschnitt.

letzte der zweyten Classe und hier 4 ist, herunter, und setzet unter dieselbe das Quadrat des letzt gefundenen Quotienten 6, das ist, 36, dergestalt, daß es sich unter dieser Ziffer endige. So wohl das Quadrat als das Factum, welche man blos in den Gedanken zusammen setzen kan, wird von den über ihnen stehenden Ziffern abgezogen, das Ueberbleibsel ist hier 28, so bemerket werden muß, und damit ist die zweyte Classe abgefertiget.

6) Mit der dritten Classe verfähret man nicht anders als mit der zweyten, nur ist hier wohl zu merken, daß nicht die einzelne letzte Ziffer der Wurzel 6 gedoppelt genommen den Theiler gebe, sondern daß alle dasjenige, so an der Wurzel bereits gefunden worden, gedoppelt genommen werden müsse, um den Theiler zu erhalten, und demnach ist hier der Theiler, mit welchem die nächste Ziffer der Wurzel gefunden wird, 36 gedoppelt, oder 72. Dieser Theiler stehet in dem Exempel an seinem gehörigen Ort, bey der Zahl, welche dividiret werden sol, welche

7) hier wiederum das Ueberbleibsel ist von den vorigen Classen, nemlich 28 mit beygesetzter ersten Ziffer der nächsten dritten Classe 9, daß demnach die zu theilende Zahl 289 ist. Die würkliche Division dieser 289 durch 72 bringt den Quotienten 4, welcher die dritte Ziffer der Wurzel, und den vorigen bereits gefundenen beyzusetzen ist.

8) Nun wird wieder unter die Zahl, welche man dividiret hat, das Factum aus dem Theiler 72, und dem Quotienten 4 gesetzt. Dieses ist 288. Es wird die letzte Ziffer dieser dritten Classe, 6, ebenfals herunter gerückt, und unter derselben das Quadrat des letzten Quotienten 4 dergestalt gesetzt, daß es sich mit dieser Ziffer endige. So wohl das Quadrat, als das in Gedanken zusammen gesetzte Product, wird von den überstehenden Ziffern weggenommen. In unserm Exempel bleibt nichts übrig, und dieses ist ein Zeichen, daß das gefundene, 364, die wahrhafte Quadratwurzel der gegebenen Zahl sey.

§. 33. Man wird wohl thun, und dieses alles vollkommener einsehen, wenn man das vorgegebene und andere dergleichen Exempel, zu welchen man die Quadrate vorher nach der gegebenen Anweisung gefunden, III, 25. selbst berechnet. Auf diese Art siehet man deutlich, wie die Zahlen, deren in den eben III, 32. gegebenen Reguln Erwehnung geschehen ist, nach und nach heraus kommen. Eben dieses ist in allen dergleichen Fällen zu bemerken. Nichts ist fähiger uns zu überzeu-

zeugen, daß wir eine Regul vollkommen verstanden haben, als wenn wir uns im Stande sehen dasjenige zu thun, so dieselbe haben wil; zu geschweigen daß man sich zu bestreben hat, eine Fertigkeit in Ausübung der Reguln zu erhalten, welche nicht anders als durch eine wiederhohlte Uebung kan erlanget werden.

III. Abschnitt.

§. 34. Wir wollen diese Arbeit zu befördern noch ein Exempel hieher setzen, wozu wir ein ebenfals ein oben III, 27. zusammen gesetztes Quadrat annehmen wollen:

```
         56|76|41|69|64| 75342
         49|..|..|..|..| A
   14)    776|
          70.|..|..|..| B
          25|..|..|..| C
  150)     5141|
           450.|..|..| D
             9|..|..| E
 1506)      63269|
            6024.|..| F
              16|..| G
15068)      301364|
            30136.| H
                 4| I
            000000
```

Der erste Theil der Wurzel 7 ist hier wieder die Wurzel von dem Quadrat 49, welches der Ziffer der ersten Classe 56 am nächsten komt. Die Zahl aus welchem die zweyte Ziffer der Wurzel durch die Division gebracht wird ist 77, und der Theiler ist zwey mal so groß als der bereits gefundene Theil der Wurzel 7, und demnach 14: Also ist der zweyte Theil der Wurzel 5. Die Zahl aus deren Division die dritte Ziffer der Wurzel kommt, ist 514, und der Theiler darzu zwey mal 75, oder 150, welche den Quotienten 3 als die gesuchte dritte Ziffer geben. Die Zahl durch deren Division die vierte Ziffer der Wurzel gefunden wird, ist 6326 und der Theiler 1506, nemlich die bereits gefundene ersten drey Ziffern der Wurzel 753 gedoppelt genommen. Endlich ist die Zahl durch deren Division der letzte Theil der Wurzel erhal-

III. Abschnitt. halten wird 30136, und der Theiler wieder zwey mal so viel als alle Ziffer der Wurzel die bereits gefunden sind, oder 2x7534, welches 15068 machet. Es bleibet hier nach der letzten Subtraction wieder nichts übrig, und ist also wieder die gefundene Zahl 75342 die richtige Wurzel, wie auch schon vorher aus der Zusammensetzung dieser Quadratzahl bekant war.

§. 35. Die dieser Rechnung beygeschriebene Buchstaben werden uns dienen den Grund dieser Arbeit anzugeben, und zu zeigen, daß durch die vorgeschriebene Reguln allerdings die Wurzel des gegebenen Quadrats gefunden werde, wiewohl dieses fast von selbst in die Augen leuchten muß, wenn man nur dasjenige, so von der Zusammensetzung der Quadratzahlen gelehret worden, im frischen Gedächtniß hat. III, 25. Ich weiß, daß in den Ziffern der ersten Classe das Quadrat des ersten Theils der Wurzel enthalten: aber daß auch in diesen Ziffern noch andere Einheiten seyn können, welche von den nächstfolgenden Producten herüber gegangen. Es ist demnach die erste Ziffer der Wurzel 7, die Quadratwurzel der Zahl der ersten Classe, oder eines Quadrats, als hier 49 welches unmittelbar kleiner ist, und diese Betrachtung giebt mir den ersten Theil der Wurzel, deren Quadrat ich von den Ziffern der ersten Classe wegnehmen muß, weil es zur Ausziehung nichts weiter nützen kan, und wenn es da bliebe, nur dienen würde die nächstfolgende Theile des Quadrats, welche man doch aus einander setzen wil, (um die Theile der Wurzel nach und nach zu bekommen,) mit fremden Zusätzen zu verwirren. Nach geschehener Subtraction also der Zahl bey A ist in der nächsten Ziffer der zweyten Classe, und den andern, welche von dannen weiter zur linken stehen, das ist, in unserm Exempel in 77, nichts als das Factum aus dem gefundenen Theil der Wurzel zwey mal genommen und der nächsten Ziffer der Wurzel, das ist das Factum aus 14 x 5 enthalten, ausser noch einigen Einheiten, welche noch von den Producten und Quadraten, die weiter zur rechten stehen, hierüber gegangen sind. Wenn man demnach mit 14 dividiret, so kan nichts anders als die nächste Ziffer der Wurzel 5 zum Quotienten kommen. Man ziehet das Factum bey B aus dem ersten Theil der Wurzel gedoppelt und dem Quotienten 5 ab, und weil mit der nächsten Ziffer die Zahl C, als das Quadrat dieses zweyten Theils der Wurzel, sich endiget, so subtrahiret man dieses Quadrat ebenfals, nachdem man, grösserer Deutlichkeit halben, diese zweyte Ziffer der Classe, welche hier 6 ist, zu den vorhergehenden herunter gesetzet: weil doch

doch diese beyde Zahlen bey Erfindung eines neuen Theils der Wurzel keinen weitern Nutzen schaffen können, und im Gegentheil, wenn sie da bleiben, das folgende verwirren würden. Weil nun also mit der ersten Ziffer der dritten Classe wiederum ein Factum aus den gefundenen zwo Ziffern der Wurzel gedoppelt durch die dritte multipliciret, sich endiget, und von dannen weiter nach der linken sich erstrecket, so ist klar, daß dieser dritte Theil der Wurzel wieder kommen müsse, wenn man diese Ziffer, nemlich die vorher von den vorhergehenden Classen nach geschehenem Abzug übergeblieben, mit Beysetzung der ersten Ziffer der dritten Classe, durch dasjenige, so an der Wurzel allbereit gefunden worden ist, zwey mal genommen, dividiret. Mit Abziehung des Products und des Quadrats hat es die Bewandtniß wie vorher, und so gehet es bis ans Ende: daß wir nicht nöthig finden in dieser Betrachtung, welche ein jeder vor sich vollführen kan, weiter zu gehen.

§. 36. Man kan die Sache auch auf die Art einsehen. Wir haben die vorgelegte Quadratzahl, in ihre Theile A, B, C, D, E, F, G, H, I zergliedert, welche Theile weil sie nach und nach von derselben abgezogen, endlich nichts übrig lassen, allerdings die gedachte Quadratzahl ausmachen, und ihr gleich sind. Man hat aber diese Theile von der Art angenommen als diejenige sind, aus welchen jede Quadrate, nach der bekannten Regul zusammen gesetzet werden:

A ist das Quadratum der ersten Ziffer 7.

B ist das Product aus jener gedoppelt durch die andere 5.

C ist das Quadrat dieser Ziffer 5.

D ist wieder das Product aus den ersten zwo Ziffern 75 gedoppelt durch die dritte 3.

E ist das Quadrat dieser dritten Ziffer 3.

F ist das Factum aus der ersten, zweyten und dritten Ziffer 753 gedoppelt durch eine vierte 4.

G ist das Quadrat dieser vierten Ziffer 4.

H ist abermal ein Factum aus der ersten, zweyten, dritten und vierten Ziffer 7534 gedoppelt durch die fünfte 2.

I ist das Quadrat aus dieser fünften Ziffer, und hierbey sind allemal die Grössen der Einheiten, welche in allen diesen Quadraten und Producten vorkommen gehörig beobachtet, wie aus der Rechnung sichtlich ist.

Es ist demnach allerdings die Zahl welche aus A, B, C, D, E, F, G, H, I, gehörig zusammen gesetzt ist, das richtige Quadrat der Zahl

75342.

III. Abschnitt. 75342. III, 25. Da nun aber die gegebene Zahl 5676416964, aus gedachten Theilen A, B, C, D, E, F, G, H, I bestehet, so muß dieselbe nothwendig das Quadrat der gefundenen Zahl 75342 seyn, und diese ist demnach die Quadratwurzel von jener, welche Wurzel man hat finden sollen.

Ganze Zahlen, deren Quadratwurzeln keine ganze Zahlen sind.

§. 37. Auf die Art wird die Wurzel einer jeden ganzen Zahl gefunden, wenn diese Wurzel ebenfals eine ganze Zahl ist. Aber nicht alle ganze Zahlen haben ganze Zahlen zu Wurzeln, und dieses ist leicht einzusehen. Wenn man die Quadrate der gemeinen Zahlen vor sich schreibt 1, 4, 9, 16, 25, so findet man, daß zwischen jeden zweyen derselben noch andere ganze Zahlen fehlen. Zwischen 1 und 4 die 2 und 3, zwischen 4 und 9 die 5, 6, 7, 8, zwischen 9 und 16, die 10, 11, 12, 13, 14, 15, und also immer mehrere, je weiter man fortgehet. Diese Zahlen können unmöglich Wurzeln haben, die ebenfals ganze Zahlen wären. Denn die Wurzel von 3 zum Exempel, wenn sie eine ganze Zahl seyn solte, müste ohnstreitig grösser seyn als 1 die Wurzel von 1, und kleiner als 2, die Wurzel von 4, weil 3 zwischen diesen beyden Quadraten in der Mitte stehet. Nun ist hier keine ganze Zahl möglich, welche grösser wäre als 1 und kleiner als 2. Demnach kan auch 3 keine Wurzel haben die eine ganze Zahl wäre. So ist es mit der 8, welche Zahl zwischen die Quadrate 4 und 9 fällt, es muß ihre Wurzel grösser seyn als die Wurzel von 4 welche 2 ist, und kleiner als die Wurzel von 9, welche 3 ist. Es ist keine ganze Zahl möglich, welche zwischen 2 und 3 fiele, und grösser wäre als 2, kleiner aber als 3, derowegen kan auch keine ganze Zahl die Wurzel von 8 abgeben.

§. 38. Es fallen aber zwischen jede 2 ganze Zahlen unendlich viele gebrochene. Zwischen 1 und 2 stehet die gebrochene Zahl $1\frac{1}{12}$, $1\frac{2}{12}$, $1\frac{3}{12}$, $1\frac{4}{12}$ und noch viele andere mehr, ja man mag derselben so viele geschrieben haben als man wil, so kan man doch immer mehrere und neue schreiben, welches eben dadurch angezeigt wird, wenn man saget, es fallen zwischen 1 und 2 unendlich viele gebrochene Zahlen. Solte nicht unter allen diesen Brüchen ein einziger die genaue Wurzel der Zahl 3 seyn, so daß wenn er in sich selbst multipliciret würde, eben 3 und nicht mehr oder weniger käme? Und ob zwar 8 keine Wurzel in ganzen Zahlen hat, als die zwischen 2 und 3 fallen müste, so fal-

fallen doch wieder zwischen 2 und 3 unendlich viele Brüche, das ist, so viele, daß man sie ohnmöglich alle schreiben, denken, oder aussprechen kan, und unter diesen sind $2\frac{1}{25}$, $2\frac{2}{25}$, $2\frac{3}{25}$, $2\frac{4}{25}$ rc. $2\frac{1}{29}$, $2\frac{2}{29}$ rc. solte nicht unter diesen allen ein einziger Bruch angetroffen werden können, welcher die genaue Wurzel von 8 wäre, und in sich selbst multipliciret eben die Zahl 8 brächte? So unglaublich es scheinet, daß unter so vielen Millionen Brüchen, nicht ein einziger die hier erforderte Grösse haben solte, so wird doch verneinet, daß ein Bruch angegeben, geschrieben oder ausgesprochen werden könne, welcher eine dergleichen Wurzel abgeben könte. Es wird zum Exempel verneinet, daß die Wurzel der Zahl 8, $2\frac{2}{3}$, $2\frac{3}{4}$, $2\frac{4}{5}$, $2\frac{5}{7}$ oder sonst ein anderer dergleichen Bruch sey, welchen man angeben kan.

III. Abschnitt.

§. 39. Wie ist es aber möglich, daß unter den unendlich vielen Brüchen, die zwischen der 2 und 3 stehen, nicht ein einziger die erwehnte Grösse haben solte? Da ihrer unendlich viele, und alle in der Grösse von einander unterschieden sind, müste sich doch endlich ein einziger finden, welcher eben passte: man kan denjenigen welcher zu klein ist nach und nach vermehren, und auf die Art endlich auf einen solchen Bruch kommen, welcher durch die Multiplication in sich selbst eben 8 bringt, Unter vielen Millionen Leisten, welche alle verschiedene Grösse haben, aber doch ohngefehr nach der Grösse des Fusses eines erwachsenen Menschen gemacht sind, sol kein einziger seyn, welcher eben vor meinen Fuß gerecht wäre? ist dieses nur einiger massen gläublich?

§. 40. Dieser Einwurf wäre nicht zu beantworten, wenn man sagte, 8 habe gar keine Quadratwurzel, oder es sey an sich wiedersinnisch, wenn man sich eine Zahl vorstellete, welche in sich selbst multipliciret, 8 bringt, welches aber die Meynung nicht ist. Man setzet bloß, daß diese Zahl vermittelst der erklärten Zeichen nicht ausgedrückt, und also weder geschrieben noch ausgesprochen werden könne, und dieses kan ohne sonderliche Schwierigkeit erwiesen werden, wenn wir nur zu dem Ende, und auch wegen seines eigenen Nutzens etwas von den Quadratzahlen der Brüche werden voraus gesetzt haben.

§. 41. Doch ehe wir uns dazu wenden, wollen wir mit einem ähnlichen und bereits bekanten Exempel darthun, daß die Sätze, die Zahl 8 habe eine Quadratwurzel, oder eigentlich, man könne ohne Widerspruch eine Zahl in die Gedanken fassen, welche in sich selbst multipliciret, die Zahl 8 bringet, aber diese Zahl könne weder geschrieben noch ausgesprochen werden, nichts widersprechendes enthalten. Wenn

III. Abschnitt. man 11 durch 9 dividiret, so ist der Quotient $1\frac{2}{9}$, und dieser kan leicht geschrieben und ausgesprochen werden. Wil man aber zehentheilichte Brüche zum Quotienten haben, und fänget die Division an:

$$9)\ 11,000 \,|\, 1,222$$
$$2\ \ 22$$

so siehet man so gleich, daß man niemals ans Ende kommen, und den Quotienten durch dergleichen Brüche genau ausdrücken können werde. Wir haben seinen Anfang gefunden, wir können ihn weiter fortführen, wenn wir nur an die gefundene Ziffer beständig 2 setzen, folgender gestalt 1,22222, aber es wird doch immer etwas fehlen, welchen Fehler man durch einen neuen Zusatz von 2 zwar kleiner machen, aber nicht gänzlich heben wird, man mag auch so viele 2 zusetzen, als man wil. I,176. Demnach kan der Quotient der Zahl $\frac{11}{9}$ durch zehentheilichte Brüche weder geschrieben noch ausgesprochen werden, und gleichwohl kan man diesen Quotienten auf eine andere Art angeben, weil er $1\frac{2}{9}$ ist. Da nun dieser Quotient, welchen man doch gar leicht übersiehet, durch zehentheilichte Brüche nicht ausgedrückt werden kan: warum solte es widersinnisch seyn, sich eine Quadratwurzel einer Zahl vorzustellen, welche sich weder durch zehentheilche noch andere Brüchen ausdrücken lässet?

Vorbereitung zu dem Beweis. Quadrate der Brüche.

§. 42. Das Quadrat eines Bruchs entstehet, wenn man den Bruch in sich selbst multipliciret, eben wie man eine ganze Zahl in sich selbst multipliciren muß, ihre Quadratzahl zu erlangen. Es sey das Quadrat des Bruchs $\frac{2}{3}$ zu machen, so habe ich $\frac{2}{3}$ durch $\frac{2}{3}$ zu multipliciren. Wil ich dieses thun, so muß der Zehler 2 durch 2 oder durch sich selbst multipliciret werden, und der Nenner 3 ebenfals durch sich selbst oder durch 3. Und dieses ist die Weise ein Quadrat von einem Bruch zu machen. So wohl der Zehler als der Nenner muß in sich selbst multipliciret werden, oder es muß so wol die Quadratzahl des Zehlers als auch hernach die Quadratzahl des Nenners gemacht werden. III,1. Die erstere giebt den Zehler, die zweyte den Nenner des Bruchs ab, welcher das Quadrat des gegebenen ist. Das Quadrat von $\frac{4}{5}$ ist $\frac{16}{25}$, da 16 das Quadrat des Zehlers 4 ist, und 25 das Quadrat des Nenners 5.

§. 43. Man siehet demnach, daß, wenn man die Quadratwurzel von

von einem Bruch als $\frac{16}{25}$, oder einen andern Bruch $\frac{4}{5}$ schaffen soll, welcher in sich selbst multipliciret den erstern giebt, man so wohl aus dem Zehler 16, als aus dem Nenner 25 die Quadratwurzeln auszuziehen habe, welche Wurzeln den Zehler und Nenner des verlangten Bruchs $\frac{4}{5}$ geben.

§. 44. Hat man aber eine Zahl, welche aus einer ganzen und einem Bruch zusammen gesetzet ist, als $1\frac{9}{16}$, und man will die Quadratwurzel derselben haben, so thut man am besten, wenn man dieselbe erstlich ganz in einen unächten Bruch verwandelt, als hier in $\frac{25}{16}$, und so dann die Ausziehung der Wurzel, wie gewiesen worden, verrichtet, indem man nemlich so wohl von dem Zehler als auch von dem Nenner die Wurzel nimt; da denn in unserm Fall die gesuchte Wurzel des Bruchs $\frac{5}{4}$ oder $1\frac{1}{4}$ wird. Dieses hat auch seines eigenen Nutzen halber gezeiget werden müssen.

Nähere Gründe, und würklicher Beweiß.

§. 45. Dasjenige aber anlangend, so insonderheit wegen unsers vorhabenden Beweises anzumerken ist: so setzen wir, daß ein Bruch durch die kleinste Zahlen geschrieben sey, durch welche er sich ausdrücken lässet, und demnach in einen andern, welcher mit noch kleinern Zahlen geschrieben wäre, nicht könne verwandelt werden, und daß man von diesem Bruch ein Quadrat gemachet; und behaupten, daß ein solches Quadrat sich niemals zu einer kleinern Benennung bringen lasse. Zum Exempel $\frac{2}{3}$ ist mit den kleinsten Zahlen geschrieben, welche eben diesen Bruch ausdrücken können, und das Quadrat davon $\frac{4}{9}$ kan ebenfals nicht zu kleinern Benennungen gebracht werden. So ist es mit $\frac{3}{4}$, von welchen das Quadrat $\frac{9}{16}$ ist. Der erste dieser Brüche läst sich nicht zu einer kleinern Benennung bringen, und auch der zweyte nicht, gleichwie auch weder $\frac{6}{35}$ noch sein Quadrat $\frac{36}{1225}$ zu kleinern Benennungen kan gebracht werden. Denn dieses Quadrat ist ein Product der Wurzel durch sich selbst, das ist $\frac{6}{35} \times \frac{6}{35}$, oder $\frac{6\times 6}{35\times 35}$ III, 42. Man zerfälle den Nenner so wohl als den Zehler der Wurzel in die einfache Zahlen, aus welchen sie zusammen gesetzt sind, II, 79. und setze an statt $\frac{6}{35}$ nunmehro $\frac{2\times 3}{5\times 7}$ so wird das Quadrat dieses Bruchs $\frac{2\times 3\times 2\times 3}{5\times 7\times 5\times 7} = \frac{2\times 2\times 3\times 3}{5\times 5\times 7\times 7}$ und es können in dessen

III. Abschnitt. Zehler keine andere einfache Zahlen stehen, als diejenige, welche in dem Zehler der Wurzel vorkommen, und so ist es auch mit dem Nenner. Solte nun dieser Bruch $\frac{2\times2\times3\times3}{5\times5\times7\times7}$ sich zu einer kleinern Benennung bringen lassen, so müsten einige der einfachen Zahlen, welche dessen Nenner ausmachen, auch in dem Zehler desselben vorkommen. II, 95. Dieses aber ist bey dem, so wir angenommen, daß nemlich die Wurzel dieses Bruchs $\frac{2\times3}{5\times7}$ sich nicht zu einer kleinern Benennung bringen lasse, nicht möglich. Denn da in dem Zehler oder Nenner des Quadrats keine andere einfache Zahlen enthalten sind, als in dem Zehler oder Nenner der Wurzel, so müste eben die einfache Zahl, welche in dem Zehler und Nenner des Quadrats zugleich vorkommt, auch in dem Zehler und Nenner der Wurzel zugleich vorkommen, und es müste sich demnach die Wurzel zu einer kleinern Benennung bringen lassen. II, 94.

§. 46. Ist demnach die Wurzel ein eigentlicher Bruch, welcher sich nicht in ganze Zahlen verwandeln läst, es mag nun derselbe ächt oder unächt seyn, oder es mag der Werth desselben kleiner oder grösser seyn als die ganze Einheit: so kan das Quadrat desselben unmöglich eine ganze Zahl seyn. Denn man drücke die Wurzel durch die kleinste Benennung aus, durch welche sie ausgedrücket werden kan, und mache das Quadrat derselben, so ist bekannt, daß wenn dieses Quadrat sich in eine ganze Zahl verwandeln lassen soll, man dasselbe zu der kleinsten Benennung, die möglich ist, 1, müsse bringen können. II, 14. Nun aber läst sich dieses Quadrat gar nicht zu einer kleinern Benennung bringen, weil sich sonst auch die Wurzel durch eine noch kleinere Benennung ausdrücken liesse, als durch die kleinste, durch welche sie bereits ausgedrücket worden ist, III, 45. und also läst sich noch vielweniger das Quadrat zu der allerkleinsten Benennung 1 bringen. Die Quadratzahl des Bruchs $\frac{5}{2}$ ist $\frac{25}{4}$, und diese $\frac{25}{4}$ können nicht in eine ganze Zahl, ohne anhängenden Bruch verwandelt werden. Sie betragen $6\frac{1}{4}$.

§. 47. Es ist demnach das Quadrat einer gebrochenen Zahl allezeit wieder eine gebrochene Zahl. Hieraus aber ist nunmehro gar leicht zu schliessen, daß, wenn eine ganze Zahl keine Wurzel hat, die auch eine ganze Zahl ist, ohnmöglich eine gebrochene Zahl angegeben wer-

werden könne, welche die wahre Wurzel abgeben könte. Wir nehmen zum Exempel, die Zahl 3. Wolte jemand setzen, die Wurzel davon wäre $1\frac{7}{10}$, oder welches eben das ist $\frac{17}{10}$, so würde man also schliessen können, um zu erweisen, daß dieser Bruch die Wurzel nicht seyn könne. Wenn $\frac{17}{10}$ die Wurzel wäre, so müste der Bruch $\frac{17}{10}$ in sich selbst multipliciret 3 bringen; III, 1. das ist, das Quadrat einer gebrochenen Zahl $\frac{17}{10}$, müste eine ganze Zahl 3 seyn. Nun ist es unmöglich, daß das Quadrat einer gebrochenen Zahl eine ganze Zahl werde. III, 46. Also ist es auch nicht an dem, daß $\frac{17}{10}$ die Wurzel von 3 sey.

III. Abschnitt.

§. 48. Man siehet leicht, daß man eben so bey einem jeden andern Bruch schliessen könne, welcher als die Wurzel von 3 angegeben wird, und daß man also darthun könne, daß keine von den gebrochenen Zahlen zwischen 1 und 2, welche nur genennet werden mag, die Wurzel von 3 sey, und eben so ist es mit allen übrigen ganzen Zahlen, deren Wurzeln in ganzen Zahlen nicht können gefunden werden. Wären ihre Wurzeln gebrochene Zahlen, so müsten sie auch selbst, als die Quadrate von gebrochenen Zahlen, dergleichen gebrochene Zahlen seyn, und wären folgends dieselben ganze Zahlen keine ganze Zahlen, welches sich selbst widerspricht.

§. 49. Es ist also wohl keine Hofnung übrig, die Wurzel von 3 und allen dergleichen Zahlen genau zu finden; denn wie will ich eine Zahl finden, welche weder geschrieben noch ausgesprochen werden kan? aber es bleibt uns doch noch etwas bey der Sache zu thun übrig. Man kan eine Zahl finden, welche der Wurzel ziemlich nahe kommt, und in sich selbst multipliciret nicht vielweniger als 3 bringt, dergleichen die Zahl 1, 7 ist. Denn wenn man diese in sich selbst multipliciret, bekommt man das Quadrat 2, 89, welches eben von der 3 so gar sehr nicht unterschieden ist, und man kan noch einen andern dergleichen zehentheilchten Bruch finden, welcher in sich selbst multipliciret, eine Zahl giebt, welche der 3 noch näher kommt, und wieder einen andern, welcher noch genauer ist, und so beständig fort. Ob man zwar niemals auf einen Bruch kommen wird, dessen Quadrat die Zahl 3 ohne einigen Abgang oder Ueberschuß wäre.

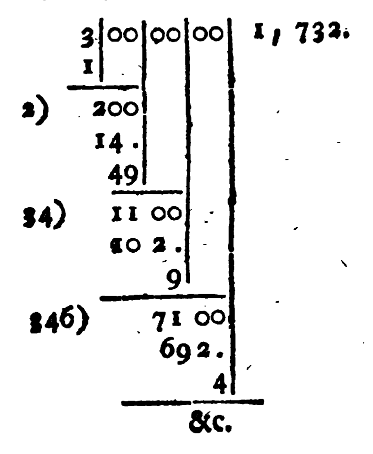
Wie man sich den Quadratwurzeln nähere, die nicht genau ausgedrücket werden können.

§. 50. Die Weise dergleichen Brüche zu finden, und sich der

III. Abschnitt.

Wurzel einer jeden vorgegebenen Zahl, wenn sie nicht genau zu haben ist, so sehr zu nähern, als man nur will, ist gar leicht, und was eben gezeiget worden, wird dazu nicht weiter erfordert, als daß es uns alle vergebliche Hofnung benehme, jemals mit der Arbeit ans Ende zu kommen.

§. 51. Ich soll einen Bruch finden, welcher in sich selbst multipliciret die Zahl 3 mit so geringen Abgang bringet, als man will, so setze ich der Zahl so viele paare von 00 bey, als ich denke genug zu seyn. Je mehr ich derer beysetze, desto genauer wird die Zahl, die ich heraus bringe. Ich setze zum Exempel, an statt der 3, die Zahl 3, 000000, welche nicht mehr und nicht weniger als drey bedeutet, wie aus der Bezeichnung der Zahlen bekannt ist. I, 40. So dann ziehe ich die Wurzel bloß nach der gegebenen Regul III, 31. aus, da mir denn die erste Classe 3, ganze Einheiten in der Wurzel bringen wird, die nächste, Zehenthel, die folgende, Hundertthel, und so ferner. Oder ich bekümmere mich im Anfang um die Ordnung der Einheiten, welche in der Wurzel kommen, nicht, und erwege nur nach vollbrachter Arbeit, daß von dem (,) als dem Ort der einzeln Einheiten an, bis an die letzte Ziffer der Wurzel, halb so viele Ziffern stehen müssen, als in dem Quadrat von dem (,) an, bis an die letzte Ziffer stehen, welches oben III, 5. erwiesen worden, und daß demnach in unserm Exempel das (,) in der Wurzel so gesetzt werden müsse, daß von demselben an bis ans Ende der Wurzel noch drey Ziffern stehen, weil in dem Quadrate 3, 000000, derselben hinter dem (,) sechse vorkommen. Die Rechnung selbst stehet folgender gestalt:



Die

Die also gefundene Zahl 1, 732 kommt der Wurzel gar nahe. Ihr Quadrat ist:

2, 999824, welches
von 3, 000000 abgezogen
0, 000176 läst, um welche die Zahl 3 grösser ist als das Quadrat dieser Zahl. Dieser Unterschied ist gar gering, und beträgt noch nicht zwey Zehentausendthel der Einheit. Und doch hätte man noch näher kommen können, wenn man gleich Anfangs mehr 00 hinzu gesetzt hätte.

§. 52. Oder man kan nur die 00 nach und nach zu den Ueberbleibselen setzen, ohne sie gleich Anfangs hinzu schreiben. Dieses kommt auf eines hinaus, und man hat hiervon einige Bequemlichkeit, welche sich insonderheit äussert, wenn von einer grossen Zahl eine Wurzel auszuziehen ist, und man nicht weiß, ob dieselbe eine Quadratzahl sey, und folgends eine Wurzel in ganzen Zahlen habe oder nicht. In welchem Fall man nur die Ausziehung der Wurzel bis ans Ende der Ziffer fortsetzen, und wenn nach der letzten Subtraction noch etwas übrig bleibt, diesem Ueberbleibsel eine Classe von 00 beyfügen, so dann aber die Arbeit fortführen kan, da denn die erste Classe der 00 in der Wurzel Zehenthel giebt. Findet man es nöthig, so kan man den Ziffern, die hier übrig geblieben, wieder eine Classe von 00 zusetzen, aus welchen so dann Hundertheilchen kommen, und eben so erlangt man in der Wurzel die Tausendtheilchen, und die übrigen untern Ordnungen der Einheiten, wenn man sie nöthig hat.

§. 53. Ein paar Exempel werden diese Sache klar machen. Erstlich wollen wir uns nochmals der Wurzel von 3 nähern:

```
       3 | 1, 7320508
       1 |
2)    200
      14
       49
34)   1100
      102
         9
346)  7100
       692
          4
```

3464)

III. Abschnitt.

```
3464)      17600
           00000
          -------
34640)     1760000
           173200
               25
          --------
346410)     2797500
            0000000
           ---------
3464100)    279750000
            277128008
                   64
           ----------
                &c.
```

Nun sey eine Zahl zu finden, welche von der Wurzel der Zahl 465 nicht weit entfernet sey:

```
        465 | 21563858
        4   |
       -----
4)      65
        4
         1
       -----
42)     2400
        210
          25
       ------
430)    27500
        2580
          36
       -------
4312)   166400
        12936
             9
       --------
43126)  3703100
        345008
            64
       ---------
431276)  25295600
         2156380
              25
        ----------
4312770)  373177500
              &c.
```

Die

Die Wurzeln zehentheilichter Brüche.

§. 54. Eben so werden auch die Wurzeln der zehentheilichten Brüche gefunden. Nur hat man hier zu beobachten, daß indem man die vorgegebene Zahl, aus welcher die Wurzel verlangt wird, theilet, III, 28. ein Theilungszeichen eben durch das (,) welches den Ort der Einheiten bezeichnet, gehen müsse, sonst kan man nicht wissen von welcher Ordnung die Einheiten sind, welche durch jede Ziffer der Wurzel bedeutet werden. Stehet demnach hinter dem Ort der Einheiten in einer dergleichen Zahl eine ungeräde Zahl von Ziffern, so muß man dieselbe mit einer darzu geschriebenen 0 gerade machen. Denn es müssen alle Classen zwo Ziffern haben, ausser der ersten zur linken Hand, welche auch nur eine haben kan. Es sey zum Exempel die Wurzel von 0, 000729 zu geben, so theile ich sie in Classen, 0,|00|07|29, fange so dann von der dritten Classe an, weil die erstern in der That nichts geben, und fahre mit Ausziehung der Wurzel fort, wie in beystehender Rechnung:

```
      7|29|27
      4   |
    -----
4)    3 29
      2 8
       49
     -----
        0
```

Demnach sind 27 die Ziffer der Wurzel, welche man gehörig setzen wird, wenn man bedenket, daß in dem Quadrate von dem Ort der Einheiten an bis ans Ende 6 Ziffern stehen, und folgends in der Wurzel hinter dem (,) drey Ziffern zu stehen kommen müssen, III, 5. daß man demnach den gefundenen zweyen noch eine 0 vorzusetzen hat, wodurch die Wurzel wird 0, 027, und dieses zwar im gegenwärtigen Exempel genau, weil nach der letzten Subtraction nichts übrig geblieben ist.

§. 55. Endlich sey noch die Wurzel von 0, 006 so genau als es nöthig seyn möchte, zu schaffen. Weil hier hinter dem Ort der Einheiten nur 3 Ziffern stehen, und die Eintheilung in Classen nicht so geschehen kan, daß eine Theilung in das (,) fiele, so setze ich noch eine 0 ans Ende und theile so dann, also: 0, |00|60.| Es wird nunmehro bloß die Wurzel von 60 gesucht, denn die vorhergehende 00 geben nichts, und stehet hierzu die Rechnung dergestalt:

III. Abschnitt.

```
        60 | 7745
        49 |
  14)   1100
        98
         49
 154)   7100
        616
          16
1548)   92400
        &c.
```

Hier stehen in der gegebenen Zahl 0, 0060 hinter dem Ort der Einheiten vier Ziffern, und drey Classen von Ziffern sind in der Rechnung darzu gekommen, welche mit den vorigen vier Ziffern oder zwo Classen in allen fünf Classen, oder paare von Ziffern, ausmachen, so in dem Quadrat hinter dem Ort der einfachen und ganzen Einheiten stehen. Eben so viele einzelne Ziffern müssen in der Wurzel hinter dem (,) stehen, daß demnach die eigentliche Wurzel, oder vielmehr die Zahl, welche an statt der wahren Wurzel, als derselben genugsam nahe, gefunden worden, diese ist 0, 007745, und diese in sich selbst multipliciret, giebt:

0, 0059985025
so von 0, 0060000000

um 0, 0000014975 unterschieden ist, welcher Unterschied kleiner ist als ein anderthalb millionstes Theilchen der Einheit.

Irrationalzahlen.

§. 56. Uebrigens nennet man die Quadratwurzeln solcher ganzen Zahlen, welche nicht selbst ganze Zahlen sind, und alle dergleichen Zahlen, welche nicht ausgesprochen werden können, Irrationalzahlen, und man könte sie im Teutschen gar wohl unaussprechliche Zahlen nennen. Dergleichen ist die Quadratwurzel von 3. Man kan sich derselben nähern, wie wir gesehen. III, 53. 1, 7 ist von dieser Wurzel so gar sehr nicht entfernet, 1, 73 kommt ihr noch näher, und noch weniger fehlet 1, 732 oder 1, 7320; wieder weniger 1, 73205, und weniger als diese Zahlen alle ist 1, 7320508 von dieser Wurzel verschieden. Wolte man in der Ausziehung der Wurzel noch weiter fortfahren, so kämen noch immer Ziffern zu den vorigen hinzu, welche

che den Fehler verminderten, aber niemals wird man die Wurzel genau bekommen: es wäre denn, daß man in dieser Arbeit ohne Ende fortführe. Denn so bald als man aufhört, und dasjenige, so bereits gefunden worden, vor die wahre Wurzel hält, so fehlet man. III, 41. Daß man aber in Ausziehung der Wurzel ohne Ende fortfahre, ist unmöglich, indessen leitet uns dasselbe noch zu einem andern Begrif von diesen Zahlen.

§. 57. Man kan sie nemlich als Brüche ansehen, deren Nenner unendlich groß ist, und also anzeiget, daß man die Einheit in unendlich kleine Theile theilen müsse. Deswegen ist der Bruch 1,7320508 oder $\frac{17320508}{10000000}$ der Wurzel von 3 ziemlich nahe, weil der Nenner desselben groß ist, nemlich eine Million. Aber weil er eigentlich noch undenklich grösser seyn müste, wenn er die Grösse der Theilchen, aus welchen die Wurzel von 3 zusammen gesetzt werden kan, genau ausdrücken solte: so fehlet er noch etwas. Nemlich gleichwie sich der Bruch $\frac{11}{9} = 1,22222$ rc. nicht anders durch zehentheilichte Brüche ausdrücken läst, als wenn man vermittelst derselben die Einheit ohne Ende theilet, III, 41. also lassen sich dergleichen Wurzeln durch gar keinen Bruch anzeigen, es müste denn seyn, daß man den Nenner desselben ebenfals ohne Ende vergrössern, und dadurch die Einheit ohne Ende theilen wolte. Aber gleichwie man deswegen 1,222 . . . und immer fort 2 auf eine andere Weise leicht darstellen kan, weil dasselbe nicht mehr und nicht weniger ist als $\frac{11}{9}$; also kan man auch solche Grössen, welche durch Irrationalzahlen ausgedrückt werden, darstellen, wenn man alle ihre Theilchen auf einmal, und ohne sie von einander abzusondern, angiebt, wie dieses in der Geometrie geschiehet.

Begriffe von den Cubiczahlen.

§. 58. Wenn man eine Zahl durch ihr eigenes Quadrat multipliciret, wird sie eine Cubiczahl, welche auch zuweilen ein Cubus genennet wird. Man beziehet diese auf diejenige Zahl, welche in ihr eigenes Quadrat multipliciret die Cubiczahl heraus bringt, und nennet sie die Cubiczahl derselben. Die Zahl im Gegentheil, welche durch ihr Quadrat multipliciret die Cubiczahl heraus gebracht, wird dieser Cubiczahl ihre Cubicwurzel genennet. Das Quadrat von 3 ist 9; multipliciret man demnach 3 durch 9, so wird das Product 27, die Cubiczahl von 3, und die Zahl 3, ist die Cubicwurzel von 27. So ist es mit allen übrigen Zahlen. Man kan aus jeder derselben eine Cubic-

III. Abschnitt.

Cubiczahl machen. Denn man kan sie in sich selbst multipliciren, und auf die Art ihre Quadratzahl heraus bringen, und was hindert, daß man diese Quadratzahl nicht noch einmal durch die Zahl, welche zuerst angenommen worden, multiplicire? Wil man eine Cubiczahl aus 23 machen, so mache man von 23 erstlich die Quadratzahl 529, multiplicire diese Zahl wieder durch 23, das Quadrat nemlich durch seine Quadratwurzel, das Factum 23×529 welches ist 12167, ist die Cubiczahl von 23, und diese 23 ist die Cubicwurzel von jener 12167.

§. 59. Also hat wohl die Verfertigung der Cubiczahlen eben so wenige Schwierigkeit, als die Verfertigung der Quadratzahlen. Ganz was anders aber ist es, wenn man die Aufgabe umkehret, eine Cubiczahl angiebet, und verlangt, daß man ihre Wurzel anzeigen sol. Die blosse Division oder eine jede andere einfache Rechnungsart, welche bis anhero gezeiget worden, kan diese Wurzel zu erfinden eben so wenig hinlänglich seyn, als wenig dieselbe die Quadratwurzel heraus zu bringen vermögend war. III, 2. Man müste dann durch wiederhohlte Versuche verfahren wollen, und wenn man zum Exempel die Wurzel von 12167 schaffen solte, so lang verschiedene Zahlen probieren, bis man auf eine käme, welche durch ihre Quadratzahl multipliciret, eben 12167 herausbrächte, oder welche, wenn man durch dieselbe die vorgegebene Zahl dividirte, zum Quotienten das Quadrat des Theilers brächte; wie hier geschiehet, wenn man mit 23 dividiret, da der Quotient 529 die Quadratzahl des Theilers 23 ist.

§. 60. In der That kan man die Cubicwurzeln, welche nicht über 9 steigen, nicht anders als auf diese Weise finden. Man machet nemlich die Cubiczahlen von allen Zahlen bis auf 9, und schreibet sie vor sich, so ist man so gleich im Stande, wenn eine oder die andere dieser Cubiczahlen gegeben wird, die Wurzel davon anzuzeigen; denn dieselbe stehet in einer dergleichen Tafel bey der Cubiczahl. Hier sind diese Cubiczahlen alle mit ihren Wurzeln über ihnen:

Cubicwurzeln:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
Cubiczahlen:	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729.

§. 61. Damit man aber einsehen könne, wie auch die Wurzeln zu erhalten sind, welche aus mehr als einer Ziffer bestehen, so müssen wir auch hier vor allen Dingen untersuchen, wie eine Cubiczahl, und die verschiedene Ziffer derselben, aus den Ziffern ihrer Wurzel entstehen, und wie diese Ziffern in jene nach und nach verwickelt werden. Der Nutzen von dieser Erkänntniß kan nunmehro nicht verborgen

seyn,

seyn, nachdem wir ihn bey der Quadratrechnung so deutlich gespüret, und wir werden uns also ohne Aufschub zur Sache selbst wenden können.

III. Abschnitt.

Wie die Cubiczahl einer zweytheilichten Wurzel zusammen gesetzet wird.

§. 62. Es entstehet aber eine Cubiczahl aus einer Wurzel, welche in zwey Theile nach Belieben getheilet ist, nachfolgender massen: Die Cubiczahl hat acht Theile, und sind dieselbe:

1) Die Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel.

2) Das Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel in den zweyten Theil derselben. Dergleichen Facta hat man dreye, und diese mit der erst genanten Cubiczahl machen vier Theile.

3) Das Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils der Wurzel durch den ersten Theil. Dergleichen Producte sind in der Cubiczahl wieder dreye, und diese machen mit den vorigen vier Theilen deren sieben aus, und endlich ist der achte Theil

4) die Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel.

Daß demnach der Cubus einer Zahl, welche aus zweyen Theilen wie man wil zusammen gesetzt ist, zum Exempel der Cubus der Zahl 6, welche aus den Theilen 4 und 2 bestehet, heraus kommt, wenn man nimt:

1) Die Cubiczahl von 4, welche 64 ist.

2) Das Factum aus 16, dem Quadrat des ersten Theils 4 durch den zweyten Theil 2 multipliciret, wodurch 32 kommt, und dieses Factum drey mal setzet.

3) Das Factum aus 4, dem Quadrat des zweyten Theils durch den ersten Theil 4 multipliciret, welche Multiplication 16 giebt, und dieses Factum wieder drey mal setzet, und endlich:

4) Die Cubiczahl des zweyten Theils welche 8 ist. Dieses alles zusammen gesetzt:

64
32
32
32
16
16
16
8
―――
bringet 216, welche Zahl die richtige

Cu-

III. Abschnitt.

Cubiczahl von 6 ist, wie aus dem Täfelchen der Cubiczahlen zu ersehen.

§. 63. Man siehet leicht, daß man die angegebene acht Theile auf viere bringen kan, wenn man gleich Anfangs das zum zweyten gesetzte Factum drey mal nimt, und eben so auch mit dem andern Product verfähret. Geschiehet dieses, so wird die Cubiczahl, welche wir eben gemacht aus nachfolgenden vier Theilen bestehen:

1) Der Cubiczahl des ersten Theils . . . 64
2) Dem Product aus dem Quadrat des ersten Theils in dem zweyten, drey mal: . . . 96
3) Dem Product aus dem Quadrat des zweyten Theils in dem ersten, drey mal . . . 48
4) Die Cubiczahl des zweyten Theils . . . 8

Die Summe ist wie vorher . . . 216

Der zweyte Theil der Cubiczahl, nemlich das Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel durch den zweyten multipliciret, und so dann drey mal genommen, kommt auch, wenn man zuerst das Quadrat des ersten Theils drey mal nimt, und dieses Factum so dann durch den zweyten Theil multipliciret. Das Quadrat des ersten Theils ist 16, dieses drey mal giebt 48, und dieses ferner durch den andern Theil 2 multipliciret bringt 96: und eben so kommt auch der dritte Theil der Cubiczahl, wenn man das Quadrat des zweyten Theils drey mal nimt, und dieses Factum so dann durch den ersten Theil multipliciret.

§. 64. Demnach kan man dasjenige so eben gesagt worden, mit etwas wenig veränderten Worten, auch also ausdrücken: Die Cubiczahl einer Wurzel die aus zweyen Theilen bestehet, ist zusammen gesetzt:

1) Aus der Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel.
2) Aus dem Product von dem Quadrat des ersten Theils drey mal genommen, durch den zweyten Theil.
3) Aus dem Product von dem Quadrat des zweyten Theils drey mal genommen, durch den ersten Theil.
4) Aus der Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel.

§. 65. Es ist vielleicht unnöthig zu erinnern, daß, wenn wir sagen, das Quadrat des ersten (oder zweyten) Theils drey mal genommen, müsse durch den zweyten (ersten) Theil multipliciret werden, wir nicht

nicht verstehen wollen, daß derselbe Theil drey mal genommen, so dann das Quadrat von diesem Product gemacht, und dieses Quadrat in den andern Theil multipliciret werden müsse; denn auf diese Art würde zu viel kommen: und in unserm Exempel würde vor dem andern Theil auf die Art gefunden werden 144×2, oder 288 an statt 96; sondern man muß erstlich das Quadrat machen, dieses so dann durch drey und ferner das hieraus entstehende Factum durch den andern Theil der Wurzel multipliciren. Dieses zu erinnern dörfte wie gesagt vielleicht unnöthig seyn, doch damit wir nichts versäumen, so zur Deutlichkeit etwas beytragen kan, haben wir es nicht vorbey gehen wollen.

III. Abschnitt.

§. 66. Den Beweiß von dieser Zusammensetzung kan man sich sehr deutlich vorstellen, wenn man sich Würfel von Holze machen läst, und dieselbe nach der Anweisung die wir so gleich geben wollen, zusammen setzet. Man kan deren mit geringen Kosten eine grosse Menge bekommen, aber an 125, (diese ist die Cubiczahl von 5) hat man genug. Diese Würfel hat man als Einheiten und nicht anders anzusehen, und wir erwehlen bloß diese Figur, weil die Würfel sich am bequemsten zusammen setzen lassen, da man ausser dem auch Kugeln, oder Cörperchen von einer jeden andern Figur brauchen könte.

§. 67. Man setze nunmehro aus diesen Einheiten eine Zahl zusammen, was man vor eine wil AB, und theile dieselbe in zwey Theile in C; man multiplicire sie ferner in sich selbst, damit man ihre Quadratzahl ABEFD erhalte, welche man aber hier eben so wie vorher bey den Quadratzahlen geschehen III, 8. in ihre vier Theile, DC das Quadrat des ersten Theils, CE und DF die Producte aus den Theilen, und EF, das Quadrat des zweyten Theils, theilen muß. Dieses ist die erste Arbeit welche man vorzunehmen hat, wenn man aus einer gegebenen Zahl ihre Cubiczahl machen wil. Das also formirte Quadrat ist nun ferner durch die Wurzel zu multipliciren, damit die Cubiczahl heraus komme, und dieses geschiehet am füglichsten wenn man über ein solches Quadrat ein anders setzet, und so schichtweise Quadrate über einander zu ordnen fortfähret, bis man derselben so viel über einander habe, als viele Einheiten in der Wurzel sind. Denn wenn dieses geschehen, so ist klar, daß gedachtes Quadrat durch seine Quadratwurzel multipliciret, und folgends die Cubiczahl von eben der Wurzel gemacht worden sey.

F. 22.

§. 68. Damit man aber die acht Theile, die wir hernach auf

viere

III. Abschnitt.

viere gebracht, III, 62. in der Cubiczahl erhalte, muß man in dieser multiplication absetzen, so bald man der Quadrate so viele über einander gesetzt, als viele Einheiten in dem ersten Theil der Wurzel sind, und so denn ferner eben diese Quadrate so oft auf einander bringen, als oftmals die Einheit in dem zweyten Theil der Wurzel enthalten ist. Es wird, wenn das Quadrat durch den ersten Theil der Wurzel multiplicieret wird, dieses Factum so stehen wie die 23 Figur weiset.

1) Stehet bey A die Cubiczahl 27 des ersten Theils der Wurzel 3.

2) Bey B stehet ein Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel 3, durch den zweyten Theil 2. Dieses siehet man, wenn man das Factum B erstlich auf seiner linken Seite betrachtet, da das Quadrat zum Vorschein kommt, so dann aber oben oder forne, da erhellet, wie dasselbe durch den zweyten Theil der Wurzel multiplicieret worden.

3) Bey C stehet noch ein dergleichen Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel durch den zweyten Theil derselben. Man siehet dieses, wenn man das Factum bey C erstlich von forne, so dann auf der Seite oder oben betrachtet. Denn das Quadrat stehet forne aufrecht, und ist in unserm Exempel zwey mal hinter einander gesetzt, oder durch den zweyten Theil der Wurzel 2 multiplicieret.

4) Endlich stehet bey D ein Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils der Wurzel in dem ersten Theil derselben; und dieses einzusehen, darf man nur dieses Factum erstlich oben betrachten, da das Quadrat stehet, und so dann die Seiten ansehen, da es sich weiset, wie dieses Quadrat multiplicieret worden.

§. 69. Wir verstehen aber hier eine Betrachtung, nicht die bloß mit den Augen geschiehet, denn diese kan uns aufs höchste zeigen, daß in dem vorliegenden Fall die Sache richtig sey; sondern wir wollen daß man sich besinne, wie diese Theile alle aus der Multiplication entstanden sind, und die Figur sol uns dieses Nachdenken bloß einigermassen erleichtern. Thun wir dieses, so werden wir bald sehen, daß dasjenige, so die Figur nur bey einer Zahl weisen kan, von allen überhaupt seine Richtigkeit habe.

§. 70. Nun müssen wir in der Zusammensetzung unserer Cubiczahl fortfahren. Wir haben III, 68. das Quadrat der Wurzel durch den ersten Theil derselben multiplicieret, wir müssen es noch durch ihren

ren zweyten Theil multipliciren, und was hier kommt zu dem vorigen setzen, damit wir die ganze Cubiczahl, welche wir machen sollen, erlangen. Wenn diese Multiplication mit unsern Einheiten verrichtet wird, stehet das Factum wie in der 24 Figur, und bestehet dasselbe wieder aus vier Theilen, welche zu den bereits oben gefundenen gesetzt werden müssen. Es stehet nemlich

III. Abschnitt.

5) Bey E ein Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel durch den zweyten Theil derselben. Man sehe dieses Factum erst oben an, da das Quadrat stehet, so dann an den Seiten, da sich zeiget, wie oft dieses Quadrat genommen worden.

6) Bey F stehet ein Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils durch den ersten Theil der Wurzel, welches klar erhellet, wenn man dieses Factum erstlich von forne, und so dann von oben und von der Seite betrachtet.

7) Stehet bey G noch ein dergleichen Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils, welches zur linken stehet, durch den erstern Theil, welche Multiplication oben und von forne sichtlich ist: und endlich

8) Ist bey H die Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel anzutreffen.

§. 71. Nach diesem Satz lässet sich nunmehro aus einer jeden Zahl, welche aus Zehnern und Einheiten, von welcher Ordnung diese auch seyn mögen, bestehet, eine Cubiczahl zusammen setzen. Nur das einzige kan darzu noch angemerket werden, damit uns hernach gar nichts mehr aufhalte, daß wenn eine Ziffer am Ende eine 0 hat, und man aus derselben eine Cubiczahl machen will, der Cubiczahl der Ziffer am Ende drey 000 angehänget werden müssen, daß wenn die Wurzel am Ende zwo 00 hat, in die Cubiczahl derselben am Ende sechs 00 kommen, und daß überhaupt der Cubiczahl einer Ziffer drey mal so viele 00 hinten nach stehen, als viele derselben in der Wurzel anzutreffen sind. Die Cubiczahl von 2 ist 8, die Cubiczahl von 20 ist 8000, die Cubiczahl von 200 ist 8000000, und so weiter. Dieses erhellet aus der Multiplication so deutlich, daß wir nicht nöthig finden, uns länger dabey aufzuhalten.

§. 72. Es sey nunmehro die Cubiczahl von 57, oder von 50 + 7 zu machen, so nehme man nach der Regul:

III. Abschnitt.

1) Die Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel 50, welche ist	125000
2) Das Factum aus dem Quadrat 2500, des ersten Theils 50 drey mal, durch den zweyten Theil 7	52500
3) Das Factum aus dem Quadrat 49, des zweyten Theils 7 drey mal, durch den ersten Theil 50	7350
4) Die Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel 7	343
Die Summe hiervon	185193

ist die gesuchte Cubiczahl.

§. 73. Man siehet auch hieraus, wie sich die angegebene Theile einer Cubiczahl, welche aus Zehnern und Einheiten bestehet in dieselbe verwickeln. Die Cubiczahl der ersten Ziffer, welche Zehner bedeutet, nemlich 125, bedeutet tausende, oder hat drey 000 hinter sich stehen, und kommt also die letzte Ziffer davon 5, an die vierte Stelle von dem Orte der einfachen Einheiten nach der linken zu, da sie sich mit andern Ziffern, die ebenfals an diesen Ort herüber kommen, in der Addition vermischet: und von dannen stehet der Cubus 125 weiter nach der linken, aber nicht über drey Ziffern, weil keine Cubiczahl einer einzeln Ziffer aus mehr als drey Ziffern bestehet. III, 60. So dann endiget sich das Factum aus dem Quadrat des ersten Theils drey mal genommen in die folgende 7 multipliciret, in der nächsten Stelle zur rechten, und stehet von dannen weiter nach der linken zu. Daß es sich daselbst endiget, siehet man daraus, weil das besagte Quadrat der ersten Ziffer, zwo 00 haben muß, indem diese erste Ziffer Zehner bedeutet, und diese zwo 00 bleiben in allen nachfolgenden Multiplicationen, welche gemacht werden müssen, unverändert. Ferner endiget sich das Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils drey mal genommen, und durch den ersten Theil der Wurzel multipliciret, mit der folgenden Stelle, weil es Zehner bedeutet. Denn dieses Quadrat enthält einfache Einheiten, welche von der Art bleiben wenn sie durch 3 multipliciret werden, aber zu Zehnern erwachsen, oder eine 0 bekommen, so bald sie durch die erste Ziffer der Wurzel multipliciret werden, als welche Zehner enthält. Endlich endiget sich die Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel an dem Ort der einfachen Einheiten, und gehet niemals über denselben weiter nach der rechten zu, wie dieses leicht einzusehen ist.

§. 74. Läßt man die letzte Ziffer der Wurzel 7, nicht einfache Ein-

Einheiten, sondern Einheiten von der ersten höhern Ordnung oder Zehner bedeuten, so kommt noch alles wie vorhin, nur müssen am Ende drey 000 der auf die Art gefundenen Cubiczahl angehänget werden. Denn vor jede 0 die der Wurzel angefüget wird, bekommt die Cubiczahl am Ende drey 000, wie III, 71. gezeiget worden. Demnach da die Cubiczahl von 57 ist 185193, so ist die Cubiczahl von 570 folgende: 185193000, die von 5700 die nachstehende 185193000000, und so weiter.

III. Abschnitt.

Wie die Cubiczahl einer Wurzel zusammen gesetzet wird, die mehr als zween Theile hat.

§. 75. Vermittelst dieser Regul kan man nunmehro weiter gehen, und einsehen, daß wenn von einer jeden gegebenen Wurzel als 75328 eine Cubiczahl zu machen ist, man nehmen müsse:

1) Die Cubiczahl der ersten Ziffer 7, . . . A

2) Das Factum aus dem Quadrat dieser Ziffer 7, drey mal, durch die nächste 5. . . . B

3) Das Factum aus dem Quadrat der zweyten Ziffer 5, drey mal genommen, durch die erste 7. . . . C

4) Die Cubiczahl der zweyten Ziffer 5. . . D

5) Das Factum aus dem Quadrat der ersten und zweyten Ziffer 75 drey mal, durch die dritte Ziffer 3. . . E

6) Das Factum aus dem Quadrat der dritten Ziffer 3 drey mal genommen durch die ersten zwey 75. . . F

7) Die Cubiczahl der dritten Ziffer 3. . . G

8) Das Factum aus dem Quadrat der ersten, zweyten und dritten Ziffer 753 drey mal genommen durch die vierte 2. . H

9) Das Factum aus dem Quadrat der vierten Ziffer 2 drey mal genommen, durch die ersten drey, 753. . . I

10) Die Cubiczahl der vierten Ziffer 2. . K

11) Das Factum aus dem Quadrat der ersten, zweyten, dritten und vierten Ziffer 7532 drey mal genommen in die fünfte 8. . L

12) Das Factum aus dem Quadrat der fünften Ziffer 8, drey mal genommen durch die erstern viere 7532. . . M

13) Die Cubiczahl der fünften Ziffer 8. . . N

Und so immer fort nach eben den Gesetzen, wenn die Wurzel aus mehr als fünf Ziffern bestehet.

III. Abschnitt.

§. 76. Wir wollen diese Zahlen alle in der Ordnung hieher setzen, und mit eben den Buchstaben bezeichnen, mit welchen wir sie erst benennet haben, damit man, nach Anweisung desjenigen so eben gesagt worden, nachrechnen, und sich überzeugen könne, daß man die Weise wie diese Producte zu machen, richtig eingesehen habe.

A	343	.			
B	73	5.			
C	5	25.			
D		125	.		
E	5	062	5.		
F		20	25.		
G		- -	27.		
H		340	205	4.	
I		-	90	36.	
K		-	-	8	.
L		136	154	457	6.
M		-	14	461	44.
N		-	-	-	512
Die Summe hievon	427	434	241	687	552

ist nunmehro die Cubiczahl der gegebenen Wurzel 75328, welche man machen solte; welche auch durch eine, zweyfache Multiplication, da man nemlich erstlich 75328 in sich selbst multipliciret, und also ihr Quadrat machet, und dieses Quadrat ferner durch eben die Zahl 75328 multipliciret, erhalten werden kan.

§. 77. Daß aber auf die Art jederzeit der richtige Cubus einer aus vielen Ziffern bestehenden Zahl gefunden werde, wird man einsehen, wenn man nur alles was zu machen angewiesen worden, nach der oben gegebenen Regul, nach welcher die Cubiczahl von einer zweytheilichen Wurzel zu machen gelehret worden, III, 64. prüfet. Die Zahl bey A, das ist die Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel 7, mit dem Product bey B, dem bey C, und der Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel 5 bey D, machen zusammen die Cubiczahl dieser zwey Ziffern 75 aus, das ist: $A+B+C+D$ ist die Cubiczahl von 75.

Diese Cubiczahl aber von 75, das Factum bey E, das ist das Quadrat von 75 drey mal durch die nächste Ziffer 3, und das Factum bey F, oder das Quadrat von dieser 3, dreymal, durch 75, und endlich die Cubiczahl bey G von dieser Ziffer 3, machen die Cubiczahl

von

von 750+3, oder 753. Demnach da die erste Cubiczahl von 75, denen Zahlen A+B+C+D gleich war, so bestehet diese Cubiczahl von 753, aus der Summe der Zahlen A+B+C+D+E+F+G.

Wiederum giebt diese Cubiczahl von 753 zusamt der Zahl bey H, als welche das Factum ist aus dem Quadrat von 753 drey mal genommen durch 2, und dem Producte bey I, aus dem Quadrat der Zahl 2 drey mal genommen in 753, mit der Cubiczahl von dieser 2 bey K, die Cubiczahl von 7532. Da nun also die Cubiczahl von 753 denen Zahlen A+B+C+D+E+F+G gleich war; so wird die Cubiczahl von 7532 aus eben den Zahlen A+B+C+D+E+F+G, und ferner aus H+I+K bestehen.

Endlich macht die erst besagte Cubiczahl von 7532, mit dem Product bey L, dem bey M, und der Cubiczahl bey N die ganze Cubiczahl von 75328 aus, wie auf eben die Art einzusehen ist, wenn man überleget wie diese Producte entstanden. Demnach ist nunmehro die Cubiczahl von der ganzen 75328, die Summe der Zahlen A+B+C+D+E+F+G+H+I+K und der übrigen L+M+N, und demnach nach der gegebenen Anweisung richtig gefunden worden. Und man siehet leicht ein, daß sich diese Anweisung auf alle und jede Cubiczahlen erstrecket; ingleichen, daß die Producte und Cubiczahlen der Theile der Wurzel, wie in der vorgesetzten Rechnung geschehen, und nicht anders müssen geschrieben werden, damit die Ordnungen ihre Einheiten richtig beybehalten werden.

§. 78. Hieraus aber erhellet ferner, daß wenn man die also gefundene Cubiczahl in Classen theilet, deren jede drey Ziffern enthält, so daß man diese Abtheilung von der rechten Hand anfänget, und von dannen nach der linken zu fortsetzet, sich mit einer jeden Ziffer, die vor einem Theilungszeichen nach der linken Hand zu stehet, eine der Cubiczahlen der Theile der Wurzel endigen werde, welche Cubiczahl von dannen weiter nach der linken Hand zu sich erstrecken kan. Also endiget sich in unserm Exempel bey der letzten Ziffer 2 die Cubiczahl der letzten 8 der Wurzel, und stehet von dannen weiter nach der linken; bey der 7 der nächsten Classe endiget sich 8, welches die Cubiczahl der Ziffer der Wurzel 2 ist, welche Cubiczahl hier nur aus einer Ziffer bestehet; und über der 1 der dritten Classe endiget sich 27, die Cubiczahl von 3.

§. 79. In der Mitte aber einer jeden Classe endiget sich jederzeit

III. Abschnitt.

das Factum so durch die Multiplication des Quadrats der nachfolgenden Ziffern der Wurzel drey mal genommen, durch alle vorhergehende Ziffern derselben, entstehet. Und endlich im Anfang der Classen endigen sich die Producte, welche aus den Quadraten der vorhergehenden Ziffer drey mal genommen, durch die nächstfolgende entstanden sind. Beyde stehen von dannen nach der linken Hand, wenn sie mehr als eine Ziffer haben. Also endiget sich unter der ersten Ziffer zur rechten der zweyten Classe, welche hier 4 ist, das Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel drey mal genommen, durch den nächstfolgenden Theil, welches in unserer Cubiczahl 735 ist. In der mittlern Zahl dieser Classe 3 endiget sich das Factum aus dem Quadrat der zweyten Ziffer der Wurzel drey mal genommen, durch den ersten Theil multipliciret, denn also ist das Factum 525 heraus gekommen. Beyde stehen von dannen nach der linken zurück, weil sie aus mehr als einer Ziffer bestehen. In der ersten Classe zur linken aber ist ausser dem so von den nächstfolgenden Factis hierüber gegangen, nichts als nur die Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel enthalten.

Ausziehung der Cubicwurzel.

§. 80. Nachdem wir also deutlich eingesehen, wie eine Cubiczahl aus einer jeden Wurzel entstehe, und wie die Ziffer der Wurzel in diejenige, aus welchen die Cubiczahl bestehet, nach und nach hinein gebracht werden, so können wir auch begreiffen wie hinwiederum die Ziffer der Wurzel nach und nach aus den Ziffern der Cubiczahl heraus gebracht, und gleichsam ausgewickelt werden können. Wir müssen zu dem Ende die gegebene Cubiczahl in die Theile zergliedern, aus welchen wir gesehen, daß sie bestehe. Ist dieses geschehen, so finden sich die Theile der Wurzel leicht, oder vielmehr, es kan diese Zergliederung der Cubiczahl nicht angehen, wenn man nicht nach und nach die Theile der Wurzel heraus bringt. Die Methode dieses zu thun, kommt mit der, welcher man sich bey der Quadratwurzel bedienet, überein, und ist nur von jener in den Stücken unterschieden, welche aus der besondern Art, nach welcher eine Cubiczahl gemacht wird, herfliessen, in so ferne dieselbe von der Art, nach welcher die Quadratzahlen aus ihren Wurzeln entspringen, unterschieden ist.

§. 81. Es

III. Abschnitt.

§. 81. Es sey die Cubicwurzel der Cubiczahl, welche wir ohnlängst III, 76. zusammen gesetzet haben 427434241687552 zu schaffen. Man machet hier eben eine dergleichen Vorbereitung als bey den Quadratzahlen gewiesen worden. Man theilet die Zahl in Classen von der rechten nach der linken Hand, aber man giebt jeder Classe drey Ziffern, es müste sich dann fügen, daß die Zahl aller Ziffern der Cubiczahl sich nicht genau durch drey theilen liesse, in welchem Fall die erste Classe zur linken Hand, auch zwey oder nur eine Ziffer haben kan, so viele nemlich übrig bleiben, nachdem die übrigen Classen alle voll gemacht worden. Aus dem III, 78. bereits gesagten ist klar, was wir durch diese Eintheilung der Cubiczahl in solche Classen suchen und erhalten. Wir bestimmen die Ziffer, unter welchen die verschiedene Producte und Cubiczahlen, aus welchen die vorgegebene Cubiczahl zusammen gesetzt worden, sich endigen, nachdem sie ihren Anfang entweder unter eben den Ziffern, oder weiter forne nach der linken Hand genommen. Nach dieser Vorbereitung fängt man das Ausziehen der Wurzel selbst an:

```
             427:434:241:687:552 | 75328 Q
             343:---:---:---:--- | A
             ___________
    147)      84 434:   :   :    :
              73 5..:---:---:--- : B
               5 25.:---:---:--- : C
                 125:---:---:--- : D
               _________________
  16875)       5 559241     :    :
               5 0625  ---:---   : E
                  2025 ---:---   : F
                    27 ---:---   : G
                 ______________
 1701027)        476464687  :    :
                 3402054..-:---  : H
                     9036.-:---  : I
                        8-:---   : K
                 _______________
170193072)       1361689195 52   :
                 1361544576..    : L
                     1446144.    : M
                          512    : N
                 _______________
                        0
```

1) Weil

III. Abschnitt.

1) Weil in der ersten Classe zur linken Hand nichts als die Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel enthalten, zusamt einigen Ziffern, welche von den nächsten Producten hierüber gegangen sind, III, 79. so suchet man eine Cubiczahl von einer einzeln Ziffer, welche unmittelbar kleiner ist, als die Ziffer dieser Classe. Diese Cubiczahl ist hier 343. III, 60. Die Cubicwurzel davon 7 ist nun die erste Ziffer der Wurzel, welche wir suchen, und an einen beliebigen Ort anzumerken. Wir haben diese 7, wie man gemeiniglich zu thun pflegt, eben dahin gesetzt, wo wir vor dem die Ziffer der Quadratwurzel, wie sie nach und nach kamen, gesetzt haben.

2) Die also gefundene Cubiczahl der ersten Ziffer der Wurzel 343 wird von den Ziffern der ersten Classe abgezogen, damit man die Ziffer, welche von den folgenden Classen in diese übergegangen, alleine behalte. Die Cubiczahl 343 hat ihre Dienste gethan, und kan uns ferner bey der Ausziehung der folgenden Ziffer der Wurzel nichts nützen.

3) In demjenigen so von dieser Subtraction übrig geblieben, ist das Factum aus dem Quadrat der bereits gefundenen Ziffer der Wurzel 7 dreymal genommen, und in die nächstfolgende Ziffer der Wurzel multipliciret, zum Theil enthalten, und dieses Factum endiget sich mit der ersten Ziffer der zweyten Classe 4. Man ziehe derowegen diese erste Ziffer der zweyten Classe 4 zu dem Ueberbleibsel der ersten 84 herunter, wodurch 844 kommt, und dividire diese 844 durch das Quadrat des an der Wurzel bereits gefundenen Theils 7 drey mal genommen; das ist, man dividire durch 3×49 oder 147, der Quotient dieser Division 5 ist die zweyte Ziffer der Wurzel.

Wir können noch nicht fortgehen den dritten Theil oder die dritte Ziffer der Wurzel zu suchen. In der zweyten Classe der Ziffer der Cubiczahl, welche uns die zweyte Ziffer der Wurzel gegeben, enden sich verschiedene Producte, welche zur Erfindung der nunmehro in der Wurzel folgenden dritten Ziffer nichts beytragen können, und damit das folgende desto weniger verwirret bleibe, von der Cubiczahl weggenommen werden müssen. Man setze demnach

4) Diese Producte bey B, C und D ordentlich, und so wie sie in die Cubiczahl gebracht worden; bey B nemlich das bereits erwehnte Factum aus dem Quadrat des ersten Theils 7 drey mal, in den zweyten und nunmehro gefundenen Theil 5, multipliciret, oder welches eben das ist, das Factum aus dieser itzt gefundenen Ziffer der Wurzel 5

durch

durch den Theiler 147, multipliciret. Dieses Factum endiget sich mit der ersten Ziffer der Classe.

III. Abschnitt.

Man schreibe ferner bey C das Factum aus dem Quadrat dieser zweyten Ziffer 5 drey mal genommen durch die vorhergehende 7 multipliciret, welches Factum sich mit der mittelsten Ziffer der Classe endigen muß, und endlich setze man bey D die Cubiczahl dieser letzten Ziffer, so daß sie sich unter der letzten Ziffer der Classe endige. Diese drey Zahlen, B, C und D, welche man nur in Gedanken addiren kan, ziehe man von den Ziffern der zweyten Classe, und denjenigen, so von der ersten Classe übrig geblieben, ab, das Ueberbleibsel ist hier 5559; alle diese Ziffern sind, indem die Cubiczahl gemacht worden, von den nächstfolgenden Producten hierüber gegangen. III, 76.

5) Nun setze man diesem Ueberbleibsel die erste Ziffer der folgenden dritten Classe zu, so stehet die Zahl 55592 bereit, durch deren Division die nächste Ziffer der Wurzel erhalten wird. Der Theiler, welcher sie heraus bringt, ist das Quadrat alle desjenigen, so an der Wurzel bereits gefunden worden, drey mal genommen, und demnach hier das Quadrat von 75 durch 3 multipliciret, wodurch die Zahl 16875 kommt, welche der zu dividirenden Zahl an die Seite gesetzt ist. Man dividire würklich, so kommt der Quotient 3, welches der dritte Theil der Wurzel ist. Denn weil bis an die erste Ziffer der dritten Classe das Factum aus dem Quadrat der ersten zwey Ziffern der Wurzel drey mal genommen, durch den dritten Theil der Wurzel multipliciret, enthalten ist, zusamt einigen Ziffern, welche sich von den folgenden Producten mit diesen vermischet, so kan es nicht anders seyn, es muß, wenn man mit dem ersten Factor dividiret, der andere, welcher die dritte Ziffer der Wurzel ist, zum Quotienten kommen: nur hat man einiger massen auf die gedachte Vermehrung fremder Ziffern Acht zu haben, und den Quotienten nicht gar zu groß anzunehmen, welches sich aber von selbst giebt. Denn man siehet es aus der Subtraction, welche gemacht werden muß, leicht, wenn man ihn zu groß angenommen hat.

6) Nun hat man von den Ziffern der dritten Classe mit dem vorigen Ueberbleibsel zusammen gesetzt, das ist, von 5559241, eben dergleichen Producte abzuziehen als vorhero N°. 3. geschehen. Nemlich das Factum bey E aus dem Quadrat der ersten Ziffern der Wurzel 75, drey mal, durch die dritte 3 multipliciret, oder das Factum aus dem Divisor durch den Quotienten: das Factum bey F, aus dem Quadrat der dritten Ziffer 3, drey mal, durch die ersten zwo 75 multipliciret

III. Abschnitt.

tipliciret, und dann die Cubiczahl dieser dritten Ziffer der Wurzel bey G, nachdem man sie, wie vorher bey dergleichen Producten geschehen, und aus der Rechnung sichtlich ist, in Ordnung gesetzt.

7) Man hat bey der vierten und folgenden Classe nichts anders zu thun, als was bey der zweyten und dritten bereits gewiesen worden. Man setzet zu dem Ueberbleibsel der vorigen Classe die erste Ziffer der vierten herab, so hat man die Zahl, durch deren Division der folgende Theil der Wurzel erhalten wird, welches hier 4764646 ist. Von alle denjenigen Ziffern, welche an der Wurzel bereits gefunden worden, hier 753, mache man das Quadrat, und nehme dieses drey mal, dieses ist der Theiler, durch welchen aus der besagten Zahl der Quotient 2, als die vierte Ziffer der Wurzel gebracht wird. Nachdem dieser gefunden, werden zu der dividirenden Zahl hier ebenfals die zwey letztern Ziffern dieser Classe 87 gesetzt, und so dann werden die Producte H, I, und die Cubiczahl K abgezogen. H ist wieder das Factum aus dem Theiler durch den Quotienten 2: I das Factum aus dem Quadrat dieses Quotienten drey mal durch die vorhergehende Ziffer der Wurzel 753.

8) Nun ist noch eben die Arbeit mit der letzten Classe vorzunehmen, deren erste Ziffer 5 zu dem Ueberbleibsel der eben gesagten Subtraction herunter gesetzt, die Zahl giebt, aus welcher vermittelst der Division durch den beygesetzten Theiler, die letzte Ziffer der Wurzel 8 gefunden wird. Dieser Theiler ist wieder das Quadrat aller Ziffern, die an der Wurzel durch die vorhergehende Arbeit bereits gefunden worden, das ist in unserm Exempel das Quadrat von 7532, drey mal genommen. Da hier die Producte L, M und die Cubiczahl N von alle demjenigen, so an der Cubiczahl noch übrig ist, abgezogen, nichts übrig lassen, so ist dieses ein Zeichen, daß die gefundene Zahl 75328 die genaue Cubicwurzel der gegebenen Cubiczahl sey, und daß durch die Multiplication derselben in ihre Quadratzahl diese Cubiczahl würklich heraus komme.

§. 82. Und dieses ist zwar aus demjenigen, so wir eben gesagt haben, klar genug, man kan es aber auch kürzer einsehen. Die Buchstaben, welche wir den Producten und Cubiczahlen, die von unserer gegebenen Cubiczahl nach und nach abgezogen worden sind, beygesetzt, A, B, C, D, &c. sind eben diejenige, welche wir oben III, 76. zu den Theilen dieser Cubiczahl, als wir sie verfertiget, geschrieben, und beziehen sich hier auf die Theile der bey Q gefundenen Zahl 75328.

Nem-

Nemlich A ist die Cubiczahl des ersten Theils derselben 7. B das Factum aus dem Quadrat des ersten Theils drey mal durch den zweyten 5 multipliciret. C, das Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils 5 drey mal durch den ersten Theil 7 multipliciret. D die Cubiczahl des zweyten Theils, und so beständig fort nach der III, 75. gegebenen Regul. Es ist demnach richtig, daß die Summe aller Zahlen A, B, C - - - M, N, wie sie stehen, die eigentliche Cubiczahl der Wurzel 75328 seyn müsse. Nun ist aber die Summe aller dieser Zahlen A, B, C - - - M, N keine andere als die gegebene Cubiczahl, aus welcher die Wurzel zu ziehen war. Denn die Zahlen A, B, C - - - M, N, nach und nach von dieser Zahl abgezogen, lassen nichts übrig, welches ohnmöglich seyn könte, wenn die Cubiczahl mehr oder weniger wäre, als die Summe aller dieser Zahlen. Demnach ist die Cubiczahl eben diejenige, welche aus der Wurzel 75328 entstehet, und es ist demnach hinwiederum diese Zahl Q die eigentliche Wurzel der gegebenen Cubiczahl, welche wir finden solten. Und dieses erachten wir zur Erfindung aller Wurzeln würklicher Cubiczahlen, wenn derselben Wurzeln ganze Zahlen sind, genug zu seyn.

Cubicwurzeln der Brüche.

§. 83. Ist die Wurzel ein Bruch, so bekommt man die Cubiczahl desselben, wenn man so wohl von dem Nenner als von dem Zehler die Cubiczahl nimt, und aus der ersten den Nenner, aus der zweyten den Zehler des Cubicbruchs machet. Die Cubiczahl von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{8}{27}$, da der Zehler des Cubicbruchs die Cubiczahl ist von dem Zehler der Wurzel 2, und der Nenner 27, die Cubiczahl des Nenners der Wurzel 3. Die Sache ist leicht eingesehen. Will man die Cubiczahl eines Bruchs schaffen, als eben desjenigen, dessen wir uns zum Exempel bedienet, $\frac{2}{3}$, so muß man erstlich das Quadrat desselben machen, indem man nemlich so wohl von dem Zehler als von dem Nenner die Quadratzahlen nimt. III, 42. Dieses Quadrat ist $\frac{4}{9}$, und dieses muß wieder in die Wurzel $\frac{2}{3}$ multipliciret werden, III, 58. welches geschiehet, wenn man den Zehler 4 durch den Zehler 2, und den Nenner 9 durch den Nenner 3 multipliciret, wodurch allerdings die Cubiczahlen so wohl des Zehlers als Nenners der Wurzel $\frac{2}{3}$ in dem Cubicbruch $\frac{8}{27}$ kommen.

§. 84. Man wird also hinwiederum die Cubicwurzel so wohl des Zehlers als auch des Nenners nehmen müssen, wenn man aus ei-

III. Abschnitt.

nem Bruche die Cubicwurzel ziehen will: gleichwie man aus dem Bruch $\frac{8}{27}$ den Bruch $\frac{2}{3}$, welcher jenes seine Cubicwurzel ist, durch diese Ausziehung der Cubicwurzeln, aus den beyden Gliedern des Bruches, wieder erhält. Hat man eine Zahl, so aus einer ganzen und einem Bruch zusammen gesetzt ist, und man soll derselben Cubicwurzel schaffen, so thut man auch hier am besten, wenn, bevor man die Arbeit angreift, man die Zahl gar in einen Bruch verwandelt. So findet man die Cubicwurzel von $20\frac{51}{64}$, wenn man an die Stelle dieser Zahl den Bruch setzet, welcher ihr gleich ist $\frac{1331}{64}$. Von diesem ist die Cubicwurzel $\frac{11}{4}$ oder $2\frac{3}{4}$, und diese ist auch die Cubicwurzel der Zahl $20\frac{51}{64}$.

§. 85. Gleichwie wir von den Quadratzahlen solcher Brüche, die sich nicht auf kleinere Benennungen bringen lassen III, 45. gezeigt, daß sie sich ebenfals nicht mit kleinern Zahlen ausdrücken lassen, als diejenige sind, mit welchen man sie gleich Anfangs ausgedrückt, als man sie aus ihren Wurzeln gemacht hat: eben so läst sich dieses auch von den Cubiczahlen dieser Art Brüche darthun. Der Bruch $\frac{2}{3}$ kan ohnmöglich mit kleinern Zahlen geschrieben werden, aber die Cubiczahl davon $\frac{8}{27}$ läst sich eben so wenig zu kleinern Benennungen bringen. So ist es mit dem Bruch $\frac{3}{4}$, und seiner Cubiczahl $\frac{27}{64}$, und mit allen übrigen dergleichen Brüchen. Dieses einzusehen hat man nur der Weise zu folgen, der wir uns bedienet, diesen Satz von den Quadratbrüchen darzuthun. Man nehme zum Exempel den eben gesetzten Cubicbruch $\frac{27}{64}$ dessen Wurzel $\frac{3}{4}$ ist. Der Zehler des erstern kommt aus dem Zehler des zweyten, wenn man 3 mal 3 noch durch 3 multipliciret, und ist demnach $3 \times 3 \times 3$, und eben so ist der Nenner $= 4 \times 4 \times 4$, und demnach $\frac{27}{64} = \frac{3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4}$. Solte sich nun dieser Bruch auf kleinere Benennungen bringen lassen, so müste in dem Zehler eine einfache Zahl enthalten seyn, welche zugleich in dem Nenner vorkommt. Sonst kan die Verkleinerung beyder Glieder des Bruches, die hier erfordert wird, nicht angehen. Da aber alle Factore des Zehlers des Cubicbruchs in dem Zehler der Wurzel vorkommen, und alle Factore des Nenners eben des Cubicbruchs in dem Nenner der Wurzel, so müste, wenn ein gemeinschaftlicher Theiler in dem Zehler und Nenner des Cubicbruchs enthalten wäre, eben derselbige Theiler sich auch so wohl zu dem Zehler als dem Nenner der Wurzel schicken, welches nicht seyn kan; weil man setzet, daß sich die Wurzel nicht zu kleinern Benennungen bringen lasse. II, 94.

§. 86. Ist

§. 86. Ist aber dieses, so muß die Cubiczahl eines unächten Bruchs nothwendig wieder ein unächter Bruch seyn, und kan keine ganze Zahl werden. Denn es wird ein unächter Bruch eine ganze Zahl, wenn man den Zehler durch den Nenner dividiret, und wenn man will, kan man auch den Nenner durch sich selbst dividiren, denn dadurch kommt zum Quotienten 1, und die Bedeutung ist eben die vorige. Gehet diese Division nicht an, so kan auch aus dem unächten Bruch keine ganze Zahl werden, das ist, wie wir schon öfters erinnert, wenn aus einem unächten Bruch eine ganze Zahl werden soll, so muß sich derselbe zu einer kleinern Benennung bringen lassen, ja zu der allerkleinsten die möglich ist, daß nemlich der Nenner 1 werde. II, 15. Schreibet man aber einen unächten Bruch mit den kleinsten Zahlen, mit welchen er ausgedrücket werden kan, als $\frac{3}{2}$, so ist erwiesen worden, daß die Cubiczahl davon $\frac{27}{8}$ auch nicht zu kleinern Benennungen könne gebracht werden, III, 85. also kan man noch vielweniger den Bruch $\frac{27}{8}$ auf die kleinste Benennung 1 bringen, und also einer ganzen Zahl gleich machen.

III. Abschnitt.

Ganze Zahlen, deren Cubicwurzeln keine ganze Zahlen sind.

§. 87. Dieses kan uns dienen, dasjenige so von den Quadratzahlen gezeiget worden ist, daß nemlich, wenn eine ganze Zahl keine Quadratwurzel unter den ganzen Zahlen hat, auch kein Bruch könne gefunden werden, welcher in sich selbst multipliciret, dieselbe Zahl heraus bringen, und demnach die genaue Wurzel derselben abgeben könte; auch von den Cubiczahlen zu zeigen. Die Cubiczahl von 1 ist wieder 1, die Cubiczahl aber von 2 ist 8. Zwischen 1 und 8 fallen verschiedene Zahlen, 2, 3, 4, 5, 6, 7, welche ohnmöglich Cubicwurzeln haben können die ganze Zahlen wären. Denn es müsten dieselben grösser seyn als 1 und kleiner als 2, welches bey ganzen Zahlen ohnmöglich ist. Da aber zwischen 1 und 2 eine Menge von gebrochenen Zahlen fallen, als $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{7}$ und unendlich viele andere, so kan man durch eben die Schlüsse, welche bey der Quadratrechnung III, 41. gebraucht worden sind, darthun, daß keiner dieser Brüche die wahre Cubicwurzel einer ganzen Zahl zwischen 1 und 8, als zum Beyspiel 4, seyn könne.

§. 88. Denn wenn man annimmet, daß einer unter diesen Brüchen, was man vor einen nehmen will, als $\frac{9}{7}$ die wahre Cubicwurzel von 4 sey, so wird man folgender massen schliessen, und zeigen kön-

III. Abschnitt.

können, daß derselbe die gedachte Wurzel nicht sey: Der angegebene Bruch $\frac{9}{5}$ ist mit den kleinsten Zahlen geschrieben, welche ihn ausdrücken konten, und läst sich demnach nicht in eine ganze Zahl verwandeln, denn von solchen Brüchen ist hier allein die Rede. Bedeutete $\frac{9}{5}$ eine ganze Zahl, so wäre an sich klar, daß er die Wurzel von 4 nicht seyn könte, III, 87. wäre er aber sonst nicht mit den kleinsten Zahlen ausgedrückt, so könte man ihn vorher II, 8. auf die kleinste Benennung bringen, welche er haben kan, und eben das beweisen. Und muß also oder kan wenigstens jederzeit gesetzt werden, daß ein dergleichen Bruch, welcher als die Wurzel angegeben wird, sich nicht auf kleinere Benennungen bringen lasse. Man mache die Cubiczahl des angegebenen Bruchs, $\frac{729}{125}$, so ist III, 86. bewiesen, daß dieselbe ohnmöglich eine ganze Zahl seyn könne. Da nun die angegebene Zahl 4 eine ganze Zahl ist; so kan die Cubiczahl des angegebenen Bruchs $\frac{9}{5}$ ohnmöglich der 4 gleich seyn. Also kan auch derselbe Bruch $\frac{9}{5}$ ohnmöglich die wahre Cubicwurzel von 4 seyn. Eben so kan man bey einem jeden andern Bruch, so nur angegeben werden kan, schliessen, und daraus ist klar, daß keiner angegeben werden könne, von welchem nicht zu zeigen wäre daß er die Wurzel nicht sey. Demnach ist kein Bruch, von was Grösse und Beschaffenheit er auch seyn mag, die Cubicwurzel von der Zahl 4, oder von einer jeden ganzen Zahl, deren Cubicwurzel nicht wieder eine ganze Zahl ist.

§. 89. Es ist also wieder keine Hofnung eine solche Wurzel genau zu finden. Denn wie wil ich das finden, so nicht angegeben, und demnach auch nicht gefunden werden kan, oder etwas schreiben, so doch weder zu schreiben noch auszusprechen ist? Aber man kan sich auch hier einer dergleichen Wurzel nähern, und ob zwar, daß wir bey unserm Exempel bleiben, keine Zahl kan gefunden werden, welche in ihr Quadrat multiplicirt, genau und ohne dem geringsten Abgang 4 brächte, so kan doch ein solcher Bruch angegeben werden, welcher in sein Quadrat multiplicirt, eine Cubiczahl giebt, welche von 4 sehr wenig unterschieden ist, und diesen Unterscheid kan man nach Belieben kleiner machen, und sich also der wahren Wurzel der gegebenen Zahl so sehr nähern, als nur in einem jeden vorkommenden Fall mag erfordert werden.

Wie man sich den Cubicwurzeln nähert, wenn sie nicht genau zu haben sind.

§. 90. Die Weise dieses zu verrichten ist einerley mit derjenigen, wel-

welche oben bey der Quadrat-Wurzel ist gezeigt worden. III, 50. Es muß zum voraus gesetzet werden, daß, wenn man die Cubiczahl von einem zehentheilichten Bruch machet, in dieser Cubiczahl von der letzten Ziffer bis an dem Ort der Einheiten drey mal so viele Ziffer vorkommen, als in der Wurzel. Also ist von 0,2 die Cubiczahl 0,008, denn die Quadratzahl davon ist 0,04, wie oben III, 5. gewiesen worden, und aus der Multiplication leicht erhellet, und diese durch 0,2 multiplicirет, giebt 0,008. Eben so wird gefunden, daß die Cubiczahl von 0,02, die Zahl von 0,000008 sey, die von 0,003 aber 0,000000027, und so ferner, daß also jederzeit die Zahl der Ziffer die in der Wurzel nach dem Ort der Einheiten oder dem (,) stehen müssen, gefunden werden, wenn man die Zahl der Ziffer, die in der Cubiczahl hinter dem Ort der Einheiten vorkommen, durch drey theilet.

III. Abschnitt.

§. 91. Nun kan das folgende alles nicht viele Schwierigkeit haben. Wir wollen zuerst eine Zahl suchen, welche der Cubicwurzel von 4 nahe kommt. Man hänget nur an die 4, nach welcher man das (,) gesetzt, so viele Classen, jede von drey 000 an, als man nöthig erachtet. Jede von diesen Classen giebt eine Ziffer vor die Einheiten der untern Ordnungen, und demnach die erste Classe, Zehentheil, die zweyte Hunderttheil, die dritte Tausendtheil, und so ferner. Oder man kan auch diese Classen nach und nach an die Ueberbleibseln anhängen, indem man in Ausziehung der Wurzel fortfähret:

```
       4,|000|000|1,58
       1 |   |   |
     ------
  3)   3 000
       1 5..
        75
       125
     ----------
675)   625 000
      540 0..
       28 89.
          512
     ----------
       55 688
        &c.
```

Es

III. Abschnitt.

Es ist demnach die gefundene Zahl 1,58 welche der Wurzel gar nahe kommt; denn ihre Cubiczahl ist 3,944312, welches genau genug ist. Denn wegen der zweyfachen Multiplication bringt ein sehr geringer Fehler in der Wurzel einen grossen Unterschied in der Cubiczahl selbst. Wie zum Beyspiel; wenn man an statt 4, die Zahl 3 vor die Cubicwurzel annimt, man an statt 64 die Cubiczahl 27 bekommet, welche von der ersten um ganze 37 Einheiten verschieden ist. Doch kan man die Wurzel noch näher haben, wenn man noch eine Classe von 000 zu dem Ueberbleibsel setzet, und so dann die Rechnung fortführet.

§. 92. Fast eben so machet man es mit den zehentheilichten Brüchen, wenn von denselben die Cubicwurzeln auszuziehen sind. Es muß aber alles hier wieder angewandt werden, so oben III, 54. bey den Quadratzahlen von eben dergleichen Brüchen gelehret worden ist: insonderheit muß man nicht vergessen am Ende jederzeit so-viele einzelne 00 anzuhängen, als erfordert werden, damit ein Theilungszeichen, durch welches man die gegebene Zahl in Classen abtheilet, eben nach der Ziffer zu stehen komme, welche ganze Einheiten bedeutet. Es sey die Cubicwurzel auszuziehen aus 0,0359. Ich setze vor diese Zahl 0,|035|900, und fange so dann die Arbeit bey der zweyten Classe an:

```
           0,|035|900|0,329
             | 27|   |
         ------------
  27)        8 900
             5 4
              36
                8
         ------------
3072)      3 132|000
                &c.
```

Die Wurzel ist demnach 0,329, deren Cubiczahl ist 0,035611289, so von unserer gegebenen Zahl nur um etwas weniges verschieden ist.

§. 93. Man kan sich die Arbeit bey Ausziehung so wohl der Quadrat- als auch der Cubicwurzel ungemein erleichtern, wenn man eine Tafel bey der Hand hat, in welcher die Quadrat- und Cubiczahlen von allen Wurzeln bis auf 1000, oder noch weiter verzeichnet sind.

An

III. Abschnitt.

An statt daß wir, indem wir uns unserer kurzen Tafel bey Ausziehung einer Cubicwurzel bedienet, die erste Classe zur linken höchstens nur von drey Ziffern annehmen dürften, kan man in diesem Fall in derselben viel mehrere stehen lassen, nemlich sieben, achte oder neune, wenn man eine Tafel hat in welcher die Wurzeln bis auf tausend gehen, dergleichen wir hier annehmen wollen. Denn ginge die Tafel bis auf 10000, so könten bis zwölf Ziffer in der ersten Classe bleiben. Die übrige Arbeit geschiehet vollkommen, wie gewiesen worden ist. Aber man bekommt, indem man aus dieser ersten Classe die Wurzel vermittelst der Tafel ausziehet, oder aus derselben die Cubiczahl nimt, welche unmittelbar kleiner ist als die Ziffer dieser ersten Classe: Man bekommt, sage ich, auf die Art so gleich die drey ersten Ziffer der Cubicwurzel, welches eine sehr grosse Erleichterung ist. Wir wollen die Sache mit einem Exempel erläutern:

```
            532798752|354|810 B
          A 531441000|
  1968300)  1357752 3
```

Die erste Classe hat hier neun Ziffern, von denselben hat man die Cubiczahl A, welche aus der Tafel genommen worden, abgezogen, und die Wurzel davon 810 bey B hingesetzt. Die Cubiczahl A, von den Ziffern der ersten Classe abgezogen, läst das unter derselben verzeichnete übrig, mit welchen man ferner fortfähret, wie sonst: nemlich man setzt demselben die erste Ziffer der folgenden Classe 3 zu, so hat man die Zahl aus welcher durch die Division die nächste Ziffer der Wurzel gebracht werden muß, und der Theiler ist auch hier das Quadrat desjenigen, so an der Wurzel bereits gefunden worden, drey mal genommen: welches wir grösserer Deutlichkeit halben der zu dividirenden Zahl an die Seite gesetzt. Wir hoffen daß dieses nicht allein von den Cubiczahlen begreiflich seyn, sondern auch eine hinlängliche Anweisung geben werde, eben dergleichen bey Ausziehung der Quadratwurzeln ohne Schwierigkeit anzuwenden.

IV.
Abschnitt.

Vierter Abschnitt.
Von geraden Linien und Winkeln.

Allgemeine Begriffe von dem ausgedehnten Wesen.

§. 1.

In der Geometrie betrachtet man dasjenige, was man im eigentlichen Verstand bey einigen Dingen eine Grösse nennet, und aus welchen man sie groß oder klein zu seyn urtheilet. Diese eigentlich so genante Grösse einiger Dinge ist die Ausdehnung derselben nach allen Seiten. Dergleichen ist bey allen Cörpern anzutreffen: denn es haben alle Cörper Theile, welche neben und über einander liegen, und hieraus entstehet diese Grösse der Cörper, und die Ausdehnung derselben nach allen Seiten. Nemlich weil die Theile in einem fort nach einander liegen, so erstrecket sich der Cörper in die Länge; da neben den vorigen Theilen zur Seite noch andere dergleichen Theile liegen, so erstrecket sich der Cörper auch in die Breite, und daraus, daß wieder solche Theile über einander gesetzt sind, entstehet auch die Ausdehnung des Cörpers in die Höhe oder in die Tiefe.

§. 2. Wenn man sich einen Begrif davon machen wil, von was Art die Ausdehnung bey einem jeden Cörper sey, das ist, wie die Theile zusammen geordnet worden, daß diese oder jene Art der Ausdehnung bey einem Cörper entstanden, hat man nur auf die Gränzen derselben Acht zu haben, oder auf dasjenige, so bey einer jeden Ausdehnung das äusserste ist. Wenn man die Theile so ein ausgedehntes Wesen, von was Art es auch seyn mag, wie in der 25 Zeichnung, zusammen ordnet, so bekommet man ein ausgedehntes Wesen von einer gewissen Gestalt oder Figur ABC, welche Gestalt man deutlich begreift, wenn man sich nur die äussersten Theilchen, und in was Ordnung dieselbe neben einander gesetzt sind, vorstellet. Denn an dem inwendigen ist hier nichts gelegen. Nachdem die äussersten Theile geordnet sind, können die innern nur auf einerley Art gesetzet werden,

F. 25.

nem-

nemlich so, daß alles voll werde. Denn man stellet sich vor, daß die Ausdehnung in einem fortgehe ohne Zwischenraum oder Absatz. Und dieses ist den gemeinen Begriffen gemäß; wie man merken wird, wenn man nur darauf Acht hat, wie man sich die Grösse eines Schwammes vorstellet. Ob zwar in demselben viele Löcher sind, welche zu der hölzichten, oder wenn man wil, steinichten Materie, so den Schwamm ausmacht, nicht gehören, so rechnet man diese Löcher doch mit zu der Grösse des Schwammes, und wenn man dessen Länge haben wil, so misset man von einem Ende nach dem andern in einem fort, ohne vor die Löcher etwas abzurechnen, welches doch geschehen müste, wenn man diese Löcher nicht als zu der ganzen Ausdehnung des Schwammes gehörig, annähme.

§. 3. Ob zwar nicht nothwendig ein jedes ausgedehntes Wesen ein Cörper ist, und es gar nicht folget, daß indem ich mir etwas ausgedehntes vorstelle, ich mir einen Cörper vorstelle: so pflegt man doch in der Geometrie ein jedes dergestalt nach allen Seiten ausgedehntes Wesen einen Cörper zu nennen. Wir sagen: nicht alle Dinge die wir uns als ausgedehnt vorstellen, seyn derowegen nothwendig Cörper, und man kan sich davon leicht überführen. Was hindert, daß ich mir nicht etwas ausgedehntes vorstellen sol, in dessen inwendiges ich ohne Mühe und Widerstand einzudringen vermögend bin? In der Geometrie machet man dergleichen Begriffe beständig, wie auch in dem gemeinen Leben; wenn wir uns zum Exempel den Raum in einem Zimmer vorstellen als einen blossen Raum, nicht in so ferne in demselben andere Cörper, wenigstens Luft, enthalten sind. Denn einen solchen Raum stellen wir uns allzeit so vor, daß er uns gar nicht verhindere in das Zimmer zu kommen, und in dasselbe etwas hineinzusetzen. Allerdings aber stellen wir uns diesen Raum groß und ausgedehnt vor. Nun ist dieses eine Eigenschaft, welche von einem Cörper nicht kan abgesondert werden, daß er seiner Natur nach verhindere, daß man nicht in sein inwendiges hinein kommen könne. Es müssen erstlich die Theile Raum machen, welche in dem inwendigen der Cörper sind, ehe etwas an ihre Stelle kommen kan, welches bey dem leeren Raum nicht so ist, da alle Theile, die wir uns in demselben vorstellen, in ihrer Ordnung bleiben, man mag in denselben bringen was man wil. Demnach kan der leere Raum ohnmöglich ein Cörper seyn, ob wir ihn zwar uns eben als wie die Cörper ausgedehnet, und aus Theilen, welche ausser einander liegen, zusammen gesetzt, vorstel-

IV. Abschnitt.

len. Dennoch nennet ein Geometra diesen leeren Raum doch öfters einen Cörper; fragt man warum? so ist die Antwort, weil man in dieser Wissenschaft bey den Cörpern nichts mehr als die Ausdehnung betrachtet, und ihn nur auf dieser Seite ansiehet, ohne auf die übrigen Eigenschaften desselben Acht zu haben, so kan man alle dasjenige, so nur eine Ausdehnung haben mag, vor einen Cörper halten, es mag nun dasselbe die übrige Eigenschaften der Cörper, welche hier nicht betrachtet werden, haben oder nicht, ohne sich bey der Sache im geringsten zu verwirren, und was von der Ausdehnung der Cörper gewiesen wird, ist von einer jeden andern Ausdehnung richtig.

§. 4. Die Ausdehnung eines jeden besondern Cörpers muß sich nothwendig irgendwo endigen. Es gehet derselbe niemals beständig fort, sondern seine Ausdehnung höret irgendwo auf. Und dieses zwar auf einmal, nicht mit einem langsamen abnehmen. Ich gehe in dem Raum eines Zimmers nach einander fort. Auf einmal höret der Raum des Zimmers auf, und fänget der Raum eines Saals an, ohne daß etwas dazwischen wäre, welches weder zu dem Zimmer noch zu dem Saal gehörete. Wo sich die Ausdehnung eines Cörpers endiget, da sind die Gränzen seiner Ausdehnung. Diese Gränzen haben keine Dicke. Es gehet mit denselben eben so, als mit der Abtheilung welche die Gränzen zweyer Aecker die neben einander liegen, feste stellet, wenn diese Abtheilung nicht durch einen Graben, einen Weg, eine Wand, oder was dergleichen gemacht, sondern bloß durch eine ausgedehnte Schnur oder auf eine andere dergleichen Art bezeichnet worden. Dadurch gehet weder dem einen noch dem andern Acker etwas ab, welches nicht geschehen könte, wenn die Gränze an sich einige Breite hätte: eben so ist es mit den Gränzen der Cörper beschaffen, welche keine Dicke haben.

§. 5. Demnach sind diese Gränzen der Cörper in die Länge und Breite ausgedehnet, denn der Cörper endiget sich an vielen Orten, die an und neben einander liegen, und ich kan in der Gränze desselben in die Länge und in die Quere fortkommen. Sie haben aber keine Ausdehnung in die Tiefe, wie diese Ausdehnung ausser den vorigen zwoen, die Cörper haben. Eine dergestalt in die Länge und Breite, aber nicht in die Tiefe ausgedehntes Wesen pflegt man eine Oberfläche zu nennen.

§. 6. Ich sehe nicht was bey dieser Erklärung nicht leicht und natür-

natürlich könte genennet werden: und doch haben sich einige Klüglinge gefunden, welche sich bey derselben und andern dergleichen aufgehalten haben. Es ist kein Ding, sagen sie, welches bloß in die Länge und Breite ausgedehnet wäre, und also ist es widersinnisch sich eine Oberfläche als bloß in die Länge und Breite ausgedehnt, vorzustellen. Wie? sind denn die Gränzen der Ausdehnung der Cörper kein Ding? Sind sie nichts, das ist, hat ein Cörper keine Gränzen seiner Ausdehnung, über welche er sich nicht erstreckte, und gehet er beständig in einem fort? Von diesen Gränzen aber ist gezeiget worden, daß sie zwar lang und breit, aber nicht tief oder dick seyn. Wahr ist es, daß keine Gränzen der Ausdehnung eines Cörpers vorhanden, wo kein Cörper ist, und daß in so ferne, wo eine Länge und Breite anzutreffen ist, auch nothwendig eine Tiefe mit verknüpft sey. Aber was hindert mich eines ohne das andere zu betrachten? kan ich nicht die Weisse des Zuckers mir allein vorstellen, ohne auf dessen Süssigkeit Acht zu haben, und geschiehet dieses nicht alle Tage? Oder habe ich nöthig, wenn ich die Figur eines Zuckerhuts beschreiben wil, dabey zu sagen, daß der Zucker weiß und süß sey? würde es nicht vielmehr ungereimt seyn, wenn man auf die Frage was ein Zuckerhut eigentlich vor eine Figur hat, vieles von der Süssigkeit dieser Materie, von ihrer Nutzbarkeit, und dergleichen Dingen sagen wolte?

IV. Abschnitt.

§. 7. Was von den Cörpern gesagt worden, ist auch auf die Oberflächen anzuwenden. Sie haben meistentheils Gränzen ihrer Ausdehnung, wo diese sich anfängt, und wo sie sich endiget. Ich sage meistentheils, denn es haben nicht alle Oberflächen dergleichen Gränzen. Einige derselben fangen eigentlich nirgends an, und endigen sich auch nirgends. Dergleichen sind die Oberflächen einer Kugel, eines eyförmigten Cörpers, und tausend dergleichen mehr. Man nehme aber nur einen Theil von einer dergleichen, oder jeden andern Oberfläche, so hat man sogleich Gränzen der Ausdehnung derselben. Grösserer Deutlichkeit halber kan man die Oberfläche eines Blatt Papiers nehmen. Denn es ist nichts daran gelegen, was vor eine Oberfläche man sich hier vorstelle. Man kan die Begriffe welche wir beyzubringen suchen, aus der Betrachtung der einen so wohl bekommen, als aus der Betrachtung einer andern. Man thut demnach am besten, daß man sich an etwas dergleichen halte, so man sich am allerleichtesten vorstellen kan.

§. 8. Diese Gränzen der Ausdehnung einer Oberfläche haben

IV. Abschnitt.

keine Dicke; denn wie könten sie eine haben, da die Oberfläche selbst keine hat, aber sie haben auch keine Breite. Man führe die Spitze der subtilesten Nadel, welche Spitze man sich so zart vorstellen kan, als man nur will, nach und nach auf einer dergleichen Oberfläche, als wir betrachten, fort, endlich kommt man ans Ende oder an die Gränze. Fähret man um das geringste fort, so kommt man ausser dieselbe. Ich muß entweder die Spitze meiner Nadel innerhalb meiner Oberfläche haben, oder ausser derselben, es ist kein Mittel zwischen beyden. So bald sie aufgehöret innerhalb derselben zu seyn, so ist sie ausserhalb. Es kan die Spitze der Nadel, indem man sie von innen nach aussen zu fortführet, in der Gränze selbst sich nicht noch weiter auswärts bewegen. Dieses alles würde nicht so seyn, wenn die Gränze einige Breite hätte. Wohl aber hat eine dergleichen Gränze eine Länge. Denn man kan in derselben fortgehen, und wenn man will um die Oberfläche, von welchen sie die Gränze ist, um und um herum kommen. Es sind demnach die Gränzen der Oberflächen Längen, welche weder Breiten noch Dicken oder Tiefen haben.

§. 9. Man pflegt diese Längen ohne Breiten und Tiefen, **Linien** zu nennen, welche man sich wieder vor sich vorstellen kan, ohne an die Oberflächen zu gedenken, von welchen sie die Gränzen sind. Dieses thut man in dem gemeinen Leben, wenn man nach der Entfernung zweyer Oerter von einander, oder nach der Länge des Weges von einem Orte zu dem andern fraget. Man ist in diesem Fall nicht vergnügt, wenn man etwas von der Breite der Landstrassen zur Antwort bekommet, welche man zu reisen hat, da man eigentlich die Zahl der Meilen von dem einen Ort zum andern wissen wolte, und saget man uns diese Zahl der Meilen, und machet uns auf die Art die Entfernung des einen Orts von dem andern bekannt, so siehet man alles übrige, so etwa von der Breite der Strassen, von ihrer Güte, Sicherheit, und dergleichen, hinzugethan worden, als etwas fremdes an, welches eigentlich zur Antwort auf die Frage nicht gehöret. Indem man dieses thut, und die Länge allein wissen will, ohne sich um die Breite und übrige Umstände, die mit einem Weg nothwendig verknüpft sind, zu bekümmern, so sondert man ja allerdings dieses alles in Gedanken von der Länge desselben ab, und man muß es thun, wenn man alle Verwirrungen vermeiden will.

§. 10. Man stelle sich also nunmehro eine Linie vor, was man vor eine will, als die Gränze von einer Fläche, oder auch ehe darauf

Acht

Acht zu haben, daß sie eben würklich eine dergleichen Gränze abgebe, weil in der That an diesem Umstand hier nichts gelegen ist. Man kan in einer solchen Linie fortgehen wie gesaget worden, aber man kommt endlich ans Ende derselben. So bald man am Ende ist, und weiter fortgehet, so kommt man ausser derselben: Es ist nicht möglich, den Weg um das geringste fortzusetzen, und doch weder in der Linie zu bleiben noch ausser dieselbe zu kommen. Es endiget sich wieder die Linie auf einmal, und ihr Ende hat keine Länge. Man pflegt diese Gränzen der Linien Puncte zu nennen, welche man sich also nicht nur wie die Linien, welche sie endigen, ohne Breite und Tiefe, sondern auch ohne Länge vorstellet, und hierin ist eben ein Punct von einer Linie unterschieden.

IV. Abschnitt.

§. 11. Man siehet leicht aus diesem allen, daß man die Begriffe vom Punct der Linie und Oberfläche nothwendig so annehmen müsse, wie sie angenommen worden, wenn man sich in diesen Dingen nicht verwirren will. Die Sache leidet es nicht anders: wir müsten ganz was anders einen Cörper nennen, als wir thun, und uns ganz einen andern Begrif von einem ausgedehnten Wesen machen, als wir würklich haben, wenn wir diese Begriffe, welche aus jenen nothwendig herfliessen, verändern wolten.

Begriffe der Puncte und Linien.

§. 12. Um aber nunmehro die besondern Arten von diesen Dingen, die besondern Arten nemlich der Linien, der Flächen, der Cörper zu erklären, thut man am besten, wenn man, wie auch gemeiniglich geschiehet, von dem Puncte anfängt. Man kan sich dasselbe auch vorstellen, ohne dasjenige, so bisher gesaget worden, zum Grunde zu legen.

§. 13. Wir stellen uns im gemeinen Leben zum öftern Dinge als Puncte ohne einige Theile, und ohne Länge, Breite und Dicke vor. Man nehme zum Exempel, ein einziges Stäubchen Mehls. Niemand sagt, daß sein Kasten völler geworden, wenn man ein einziges Stäubchen Mehl mehr in denselben gethan; oder leerer, wenn man eines aus demselben weggenommen: daß er reicher geworden, sich mehr satt essen könne, auf längere Zeit Vorrath habe, wenn man ihm ein Präsent von einem solchen Stäubchen gemacht, oder daß er Mangel werde leiden müssen, wenn man ihm eines entwendet. Dieses

IV. Abschnitt.

ses alles würde man nicht sagen können, wenn man sich ein dergleichen Stäubchen Mehls nur von einiger Grösse, so gering sie auch seyn möchte, vorstellte. Denn in der That müste ein Hauffen Mehls in diesem Fall durch desselben Zusatz vermehret, und durch dessen Abgang vermindert werden. Ob zwar also in der That ein solches Stäubchen eine Grösse hat, und man dieselbe mit einem Vergrösserungs-Glaß deutlich genug bemerken kan, so stellet man sich dasselbe doch ohne alle Grösse vor, welches nicht geschehen könte, wenn wir nicht Begriffe hätten von solchen Dingen, die ganz und gar keine Grösse haben. Wie kan jemand sagen, ein Stäubchen Mehls hat gar keine Grösse, oder wenn man will, es hat in Ansehung auf einen ganzen Sack Mehls keine Grösse, oder aber, welches eben das ist, ein Stäubchen Mehls mehr oder weniger, machet einen weder reicher noch ärmer, wie könte, sage ich, jemand dieses sagen, der keinen Begrif von einem solchen Dinge hätte, daß ganz und gar ohne Grösse ist?

§. 14. Wir haben also den Begrif des Puncts alle, und können ohne demselben im gemeinen Leben nicht seyn, und was soll uns demnach hindern, daß wir ihn nicht in die Wissenschaften mit einbringen. Die Anwendung desselben und dergleichen Begriffe, wird am besten weisen, daß es damit gar keine Schwierigkeit hat. Doch solte es jemanden schwer scheinen, sich etwas ganz und gar ohne Grösse und Theile vorzustellen, so mag er sich an die Stelle eines Puncts etwas so kleines vorstellen, daß es in Vergleichung mit einem andern vor nichts zu halten ist. Er mag es annehmen als ein Stäubchen Mehls, und sagen, daß dasselbe zwar eine Länge, Breite und Tiefe habe, aber eine solche, welche nicht in Betrachtung gezogen zu werden verdienet. Thut man dieses, so wird man in der That nicht so vollkommen richtig denken, als ein erfahrner Geometra, doch wird dieser Begrif einen auch in keinen Hauptfehler verleiten, und nach und nach wird man sich angewöhnen, von diesem auf den wahren Begrif eines Puncts über zu gehen, wenn man nemlich denselben zum öftern anwendet.

§. 15. Ein Punct ist nicht nothwendig in der Stelle, in welche es gesetzt worden. Es kan dasselbe auch in einer jeden andern Stelle seyn; es kan sich demnach auch aus einem Ort in den andern bewegen, oder aus einem Ort in dem andern fortfliessen. Diese Bewegung geschiehet allezeit nach einer gewissen Strecke, und indem dieselbe

selbe geschiehet, entstehet eine Linie. Der Begrif des fliessenden Puncts erläutert am besten, wie eine Linie erzeuget wird. IV. Abschnitt.

§. 16. Man stelle sich einen Tropfen Wassers vor, welcher auf einer Oberfläche liegt, und mache durch die Veränderung der Lage dieser Fläche, daß der Tropfen fortzufliessen anfange. Er wird einige Nässe zurück lassen, welche den Ort bemerken wird, wo er erst gewesen, und durch eben dergleichen Nässe wird er nach und nach alle übrige Oerter bezeichnen, in welche er gekommen, bis auf denjenigen, welchen er zuletzt eingenommen, und in welchem er stehen geblieben. So ist es mit der Dinte, welche in der Feder hänget, deren Spitze wir auf dem Papiere von einem Orte zu einem andern fortführen; und eben so lassen Kreide, Wasserbley und andere solche Cörper einige Theile hinter sich an der Fläche kleben, auf welcher man sie angerieben hat, welche den Weg bezeichnen, den diese Cörper auf derselben Fläche genommen. Auf eben die Art muß man sich ein Punct in seiner Bewegung vorstellen. Es muß, indem es sich bewegt, alle Oerter bezeichnen, in welche es nach und nach gekommen ist. Dadurch entstehet eine Länge, ohne Breite und Tiefe, mit einem Wort, eine Linie. IV, 8.

§. 17. Eine solche Bewegung kan nicht anders geschehen, als daß das Punct nach einer gewissen Richtung oder Strecke, das ist, da oder dorthin, nach dieser oder jener Seite, gehe. Die Strecke, welche das Punct in einem Augenblick seiner Bewegung gehalten, kan es in den nachfolgenden entweder ebenfals folgen, oder dieselbe mit einer andern verwechseln. Es ist eben so mit den Bewegungen aller andern Cörper. Wir gehen entweder von einem Ort zu dem andern gerade zu, oder wir verändern unsern Weg nach Belleben, und dieses können wir alle Augenblick thun, wie diejenigen, welche beym Spatzieren gehen zuweilen ihren eigenen Schatten folgen, welcher alle Augenblick nach verschiedenen Strecken fället.

§. 18. Verändert das fliessende Punct, indem es so fortfliesset, seine Strecke nicht, sondern folget derjenigen, die es Anfangs gehalten, beständig, so lange die Bewegung dauret, so beschreibt es eine gerade Linie. Dergleichen ist diejenige, deren Anfang und Ende wir mit A, B bezeichnet. Oder vielmehr haben wir eine gerade Linie zwischen A, B nur unvollkommen vorgestellet, denn es ist eben so wenig möglich eine vollkommen gerade Linie zu ziehen, als wenig man die-

Fig. 26.

IV. Abschnitt.

dieselbe, wie sie doch seyn solte, ohne alle Breite machen kan. Doch ist daran nicht viel gelegen. Die Figuren dienen entweder nur die Begriffe, welche mit Worten beygebracht werden, desto deutlicher und lebhafter zu machen, oder sie dienen zur Erfindung dieser oder jenen neuen Grösse aus einigen gegebenen, fast wie in der Rechenkunst aus einigen gegebenen Zahlen andere gefunden werden. In beyden Fällen sind cörperliche Linien, welche man nemlich auf Papier, Holz oder Metall gezeichnet hat, hinlänglich. Denn man kan diese so zart und so gerade machen, daß niemand weder einige Dicke, noch einige Krümme bey denselben bemerken kan. Dadurch müssen auch die Fehler, welche aus ihrer würklichen Dicke oder Krümme herrühren, in der Anwendung unmerklich werden: um unmerkliche Fehler aber hat man sich nicht zu bekümmern, denn wenn sie nicht zu merken sind, so kan man sie auch nicht verbessern: und gar kein Fehler und ein unmerklicher Fehler ist in der Ausübung einerley, weil man doch dasjenige, so gar nicht fehlet, von dem, so nur um etwas unmerkliches fehlet, nicht unterscheiden kan. Ja es können die cörperliche gerade Linien, welche wir ziehen, öfters eine ziemliche Breite und Krümmung haben, ohne daß daraus Fehler entstünden, nach welchen wir sonderlich zu fragen hätten, denn es wird nicht allezeit erfordert, daß man so gar genau verfahre, und man kan sich öfters mit etwas solchen, so dem wahren nur ziemlich nahe kommt, begnügen lassen.

§. 19. Indessen ist es selbst bey den Betrachtungen der Figuren und übrigen Eigenschaften der Grössen nöthig, daß man eine gerade Linie ziehen könne, welche richtig genug sey. Dieses weiß jederman, und es darf nicht gezeiget werden. Ja es kan nicht einmal in der Geometrie gelehret werden. Denn es kommet alles auf Handgriffe an. Man muß ein gutes Linial haben, und an demselben einen Stift oder eine Reißfeder hinführen; So lange man bey der puren Betrachtung stehen bleibt, schicket sich Wasserbley am besten dazu, in der Ausübung bedienet man sich anderer Vortheile, welche hieher nicht gehören. Dieses und dergleichen ist alles, so wir hier sagen können. Man siehet, daß dieses nichts Geometrisches sey, so nemlich zur Betrachtung der Grössen eigentlich gehörete, sondern daß diese Handgriffe von den übrigen, welche die Künstler und Handwerker im Anfang ihrer Lehrjahre sich bekannt zu machen haben, nicht unterschieden seyn.

§. 20. Eine gerade Linie kan zwischen jeden zwey Puncten, wo

man

man diese auch annehmen will, gezogen werden. Will man dieselbe cörperlich machen, so kan man nur einen starken ausgedehnten Faden, an die gegebene Puncte anhalten. Die Länge dieses Fadens ohne seine Dicke betrachtet, ist die gerade Linie, welche zwischen denselben zweyen Puncten gezogen werden kan, im Geometrischen Verstande, und der angegebene Handgrif zeiget uns also die Möglichkeit einer geraden Linie zwischen jeden gegebenen zweyen Puncten augenscheinlich.

§. 21. Es ist aber die gerade Linie die kürzeste unter allen Linien, welche zwischen denselben zweyen Puncten können gezogen werden. Dieser Satz ist wie der vorige an sich klar, ohne daß wir etwas anbringen könten, so uns von der Wahrheit desselben mehr überzeugen könte, als wir es gegenwärtig sind. Zum deutlichern Verstand desselben können wir dieses sagen. Man zeichne die Puncte A und B, lege so dann einen Faden durch A und B, und lasse ihn im übrigen nach einer beliebigen Krümmung durch C oder D gehen. So bald man ihn verkürzet, wird man finden, daß einige Theile desselben sich der geraden Linie AB, die zwischen den gedachten zweyen Puncten gezogen ist, nähere, und machet man den Faden so kurz als man kan, so wird sich derselbe in gerader Linie von A nach B erstrecken.

F. 27.

§. 22. Man siehet hieraus auch deutlich, daß zwischen zweyen Puncten nicht mehr als eine gerade Linie könne gezogen werden. Es ist nur ein Weg der kürzeste von A nach B, die Umwege sind mannigfaltig. Diesen kürzesten Weg hält die gerade Linie. Will man es sichtlich machen, so zeichne man erstlich eine gerade Linie durch A, B, und lege so dann die Schärfe eines Linials oder eines ausgespannten Fadens an dieselbe. Diese Schärfe oder dieser Faden wird mit der geraden Linie AB zusammen fallen. Wenn aber zwey gerade Linien zusammen fallen, so giebt es nur eine Linie; doch was halten wir uns bey diesen leichten Sachen länger auf.

§. 23. Eine gerade Linie kan nach Belieben verlängert werden: es ist nichts, welches uns zwingen könte, ein Punct, welches wir in der Bewegung zu seyn uns vorstellen, uns als ruhend vorzustellen. Wir können, wie lang und wie weit sich auch ein solches Punct beweget haben mag, noch immer eine fernere Bewegung bey demselben begreiffen, dadurch verlängert es die Linie, welche es zu beschreiben angefangen, wenn es nur nicht in eben dem Weg zurücke kehret. Denn sonst wird dieser Weg eigentlich nicht verlängert, wie die Pferde, welche auf der Schule im Kreyß getrieben werden, indem sie sich dergestalt

IV. Abschnitt.

abmatten, eben keine weite Reise thun. Dieses ist aber bey einer geraden Linie nicht. Ein Punct, welches einerley Strecke in seiner Bewegung hält, entfernet sich beständig von einem jeden Ort, in welchem es gewesen ist, und nähert sich andern Oertern, in welchen es noch nicht gewesen, und kan also niemals wieder an einen solchen Ort kommen, welchen es einmal verlassen hat. Es hat also eine gerade Linie kein anderes Ende, als dasjenige, so man ihr mit Willen giebt. Es ist wahr, ich muß irgend wo aufhören, wenn ich eine gerade Linie ziehe, aber ich bin nicht nothwendig verbunden, hier oder da aufzuhören. Einige äusserliche Umstände können mich bey cörperlichen Linien dazu zwingen, als die Grösse des Papiers, oder etwas dergleichen, aber niemals zwingt mich die Natur, oder die Beschaffenheit der Linie selbst dazu.

§. 24. Die Theile einer geraden Linie liegen alle nach einerley Strecke, und wie kan dieses anders seyn, da ein jeder derselben Theile durch die Bewegung des Puncts nach einerley Strecke beschrieben worden ist? AB mag eine gerade Linie bedeuten, die wir nach Belieben bey C, D, und E getheilet haben. Weil nun, indem ein Punct den Theil der Linie AC beschrieben, es sich nach eben der Strecke beweget hat, nach welcher es fortgangen ist, indem es durch eine fernere Bewegung den Theil CD erzeuget, und weil es nach eben der Strecke durch D, E, und so ferner bis B fortgegangen, so ist klar genug, daß diese Theile der Linie AB nicht nach verschiedenen Strecken liegen können, wie zum Exempel die Theile FG, GH, HI, IK, nach gar verschiedenen Strecken liegen, die zusammen die gebrochene Linie FK ausmachen. Wenn man demnach die Strecke eines einzigen Theils CD einer geraden Linie AB weiß, wie klein dieser auch seyn mag, so weiß man die Strecken aller übrigen Theile derselben AC, CD, DE, EB, und die Strecke der ganzen Linie AB, wie weit dieselbe auch fortgezogen seyn mag.

F. 28.

§. 25. Und man kan demnach eine gerade Linie nur auf einerley Art verlängern. Dieses ist so zu verstehen. Wenn AB eine gerade Linie ist, und ich will sie verlängern, so ist es mir nicht frey das Punct, welches AB verlängern soll, entweder nach C oder nach einem andern Punct D fortzuführen, und nach Belieben entweder BC oder BD zu beschreiben. Ist eines von diesen zwey Stücken BC die wahre Verlängerung der geraden Linie AB, so ist es das andere BD gewiß nicht, man mag dasselbe gezogen haben wie man will. Liegt BC mit AB nach

F. 29.

nach einerley Strecke, so liegen AB und BD nach verschiedenen Strecken, und kan also ABD ohnmöglich eine gerade Linie seyn. IV. Abschnitt.

§. 26. Aus diesem allen ist klar, daß durch jede zwey Puncte A, B, die Lage einer geraden Linie bestimmet und fest gestellet werde. Denn wenn man durch diese zwey gegebene Puncte die gerade Linie AB ziehet, und nach Belieben in C verlängert, so müssen alle gerade Linien, die ebenfalls durch A, B gezogen werden, in diese AC fallen, und wenn man sie gehörig verlängert, durch alle Puncte gehen, welche in der zuerst gezogenen AC liegen; alle übrige Puncte, so ausser dieser AC auf der Seite liegen, sind auch ausser einer jeden andern geraden Linie, die durch AB gehet. Dieses aber ist es, was man dadurch anzeigen will, wenn man spricht, es werde die Lage einer geraden Linie, durch jede zwey Puncte derselben bestimmet.

§. 27. Wenn man von einem Punct A, zwo verschiedene gerade Linien AB, und AC ziehet, so entfernen sich die Puncte, welche diese gerade Linien beschreiben, je mehr und mehr von einander. Denn sie entfernen sich von einander, indem sie von A ausgehen, und eines derselben nimt seinen Weg, zum Exempel, aufwärts und beschreibt AB, das andere gehet mehr unterwärts nach AC. Derowegen entfernen sich auch die geraden Linien AB, AC je mehr und mehr von einander, je weiter sie von A nach der Seite B, C fortgezogen werden, und können also von dieser Seite niemals wieder zusammen kommen. F. 30.
IV. 24. Im Gegentheil, wenn man sich vorstellt, daß die Puncte B und C beyde von ihren Oertern in gerader Linie nach A fliessen, so nähern sie sich einander beständig, und eines derselben B gehet zum Exempel nach der linken und unterwärts, das andere C fliesset nach der linken aufwärts. Dieser Bewegung folgen sie, nachdem sie in A zusammen kommen ferner, und es kommt dadurch das Punct, welches von C ausgeflossen über dasjenige, so in B war, und gehet in dieser Strecke beständig schief aufwärts nach D zu, indem das andere Punct seinen Weg schief unterwärts nach E verfolget. Demnach kommen die Puncte und die geraden Linien AD, AE auch auf dieser Seite nicht wieder zusammen: Und es können also zwo gerade Linien EB, DC einander in einem Punct A schneiden, aber es ist ohnmöglich, daß sie einander in mehr als einem Punct schneiden, oder daß sie mehr als ein Punct gemeinschaftlich haben solten. Wenn zwo gerade Linien zwey Puncte gemeinschaftlich hätten, so gingen sie alle beyde

IV. Abschnitt.

de durch die besagte zwey Puncte, also fielen sie zwischen denselben Puncten in eine gerade Linie zusammen, und gingen in einem fort, wenn man sie von beyden Seiten verlängerte, und demnach wären sie nicht zwo, sondern eine gerade Linie.

§. 28. Dieses sind die Haupteigenschaften der geraden Linien, welche alle bekannt genug sind, oder doch leicht eingesehen werden, wenn man nur auf den Begrif Acht hat, welchen wir von den geraden Linien haben. Denn wenn man die Wahrheit gestehen will, so ist es nicht möglich, jemanden einen Begrif von einer geraden Linie, durch eine Erklärung beyzubringen, so künstlich man auch dieselbe verfassen mag: und alle Erklärungen der geraden Linie setzen würklich zum Grunde, daß man bereits wisse, was eine gerade Linie sey. Was ist die Strecke anders als eine gerade Linie, welche von einem Puncte so oder so gezogen ist? Saget man also, eine gerade Linie entstehe, indem ein Punct sich immer nach einerley Strecke beweget, so saget man in der That nichts anders, als eine gerade Linie entstehe, indem ein Punct sich nach einer geraden Linie beweget. Es sind also die Anmerkungen, welche wir von den geraden Linien beygebracht, nicht anders als blosse Erläuterungen eines an sich bekannten und gemeinen Begriffes anzusehen. Wir wenden uns nunmehro zu den krummen Linien.

§. 29. Man muß nicht sagen, daß alle die Linien krumm seyen, welche nicht gerade sind: denn man kan sich Linien vorstellen, welche weder gerade noch krumm sind. Wenn ein Punct von F nach G gehet, daselbst die Strecke ändert, nach welcher es sich beweget hatte, und von G nach H fliesset, von dannen nach I, und endlich aus I in K: so beschreibt es keine gerade Linie, aber auch keine krumme. Sein Weg ist aus verschiedenen geraden Linien zusammen gesetzt. Eine krumme Linie aber läst sich aus geraden Linien nicht zusammen setzen; sie ist von denselben ganz und gar verschieden, so daß in einer krummen Linie, kein Theil angegeben werden kan, welcher eine gerade Linie wäre. (F. 28.)

§. 30. Es wird nemlich eine krumme Linie dergestalt erzeuget. Ein Punct fliesset, aber es ändert in jedem Augenblick die Strecke nach welcher es fliesset, oder es gehet nicht in zweyen der kleinsten Theilchen der Zeit nach einerley Strecke fort. Indem zum Exempel die Spitze der Feder die krumme Linie ABCD beschrieben hat, ist sie im Anfang (F. 31.)

fang nach der Strecke AE geführet worden, und würde die gerade Linie AE beschrieben haben, wenn sie dieser Strecke gefolget wäre, allein kaum hat sie angefangen sich nach AE zu bewegen, so hat sie schon aufgehöret diese Strecke zu verfolgen, und angefangen nach einer andern zu gehen, welche sie wieder so gleich mit einer neuen verwechselt, so daß in B sie nunmehro nach einer gar merklich andern Strecke BF gegangen. Von dannen bis in C sind wieder dergleichen beständige Veränderungen der Strecken in jedem Augenblick der Bewegung vorgegangen, bis daß die Spitze der Feder in C angelanget, allwo sie sich nach CG zu bewegen angefangen, aber auch nach dieser Strecke hat sie sich nicht länger als einen undenklich kleinen Augenblick beweget, und auf die Art ist sie endlich mit beständig veränderter Bewegung in D gekommen.

§. 31. Auf die Art werden alle krumme Linien beschrieben, und das Exempel eines Menschen, welcher beym Spatzierengehen seinem eigenen Schatten folget, welches wir oben angebracht, machet dieses gar deutlich. Man siehet hieraus, daß unendlich viele Arten von unendlich vielen dergleichen Linien erdacht werden können, denn die verschiedene Gesetze, nach welchen ein Punct bey seiner Bewegung die Strecken nach welchen es gehet, verändern kan, sind ohnmöglich alle zu erzehlen, und es bleibt noch immer eine unbeschreibliche Menge derselben übrig, wenn man auch noch so viele angegeben, und noch so viele Arten von krummen Linien beschrieben hat.

§. 32. Sie gehören alle in die Geometrie, und müssen in dieser Wissenschaft betrachtet werden, aber sie gehören nicht alle in die Anfangsgründe derselben. Man hat sich einen gewissen Plan der Betrachtungen gemacht, welche man in diesen Anfangsgründen vorzutragen nöthig erachtet, und man hat gefunden, daß die Abhandlung aller krummen Linien zu dem Zweck, welchen man sich dabey vorgesetzt, ohnnöthig sey, bis auf eine einzige, deren Eigenschaften man in den Anfangsgründen in Erwegung zu ziehen hat, weil sie bey der Auflösung der allerersten Aufgaben unentbehrlich ist. Diese ist der Umcreiß eines Circuls. Wir werden sagen was man davon eigentlich vor einen Begrif haben müsse, wenn wir vorhero einige andere Begriffe werden beygebracht haben, ohne welche jener nicht vollständig werden kan.

IV. Abschnitt.

Oberflächen.

§. 33. Man kan sich vorstellen, daß die Oberflächen erzeuget werden, indem eine Linie, sie mag nun gerade oder krum seyn, fortfliesset; nur muß diese Linie, wenn sie gerade ist, nicht nach ihrer eigenen Strecke fortgehen, weil sie sonst nichts anders als eine gerade Linie, von welcher sie selbst einen Theil abgiebt, beschreiben würde: sondern sie muß sich seitwerts bewegen. Die gerade Linie AB zum Exempel thut nichts anderes, als daß sie sich selbst verlängert, wenn sie nach ihrer eigenen Strecke BC fortgehet, sie beschreibet aber eine Oberfläche, wenn das Punct B einen andern Weg als BC nimmet, und sich, zum Beyspiele, in der Linie BD beweget, es mag nun BD eine gerade oder eine krumme Linie seyn, und die übrigen Theile der Linie mögen sich bewegen wie sie wollen. Wie bereits erinnert worden, so kan eine krumme Linie ebenfals durch ihre Bewegung eine Oberfläche erzeugen; nur muß sie sich so bewegen, daß beständig einige Theile derselben ausser die Oerter kommen, in welchen vorhero andere Theile derselben krummen Linie gelegen. Was von der geraden Linie und deren Bewegung gesaget worden, kan die Sache zwar an sich klar machen: solte aber doch noch einiger Zweifel übrig bleiben, so wird die Anwendung denselben gewiß heben, und er kan nicht einmal einen grossen Einfluß in das folgende haben.

F. 32.

§. 34. Eine Oberfläche kan entweder eben oder uneben seyn. Jene nennen wir auch schlechterdings eine Ebene, oder eine Fläche. Man kan den Begrif von beyden auf diese Art feste setzen: Eine Ebene lässet sich durch gerade Linien in so viele gleiche Theile theilen als man wil, und wie man wil. Bey einer unebenen Fläche mag man wohl zuweilen eine solche Theilung auf eine oder die andere Art angehen, aber man kan sie doch nicht vollkommen nach Belieben und beständig fort verrichten.

F. 33.

§. 35. Man stelle sich bey ABC ein glatt abgehobeltes Brett vor. Wenn man an die zwey Puncte desselben A und B einen ausgespanneten Faden anhält, so fället derselbe ganz in die Oberfläche des Bretts, und bezeichnet auf derselben die gerade Linie AB, welche die Oberfläche in zwey Theile theilet. Man hätte aber dergleichen Puncte als A und B auch anderswo in dieser Oberfläche annehmen können; und eine gerade Linie, oder unser Faden, welchen man von einem derselben bis zu dem andern gezogen, würde die Fläche nach wie vor getheilet haben.

Und

Und eben dergleichen lässet sich bey allen Theilen thun, in welche die Oberfläche zerschnitten werden kan. Dieses ist das Merkmal, daß das Brett eben sey, und wenn man sich vorstellet, daß dasjenige was bey einem Brette mit dem Faden gethan werden kan, bey einer Oberfläche recht vollkommen genau eintrift, und daß sich dieselbe durch eine vollkommene gerade Linie so theilen lasse, wie unser Brett mit dem Faden getheilet worden, so ist dieselbe eine wahrhafte Ebene. Die Oberfläche eines gemeinen gläsernen Spiegels kommet einer wahrhaften Ebene ziemlich nahe.

IV. Abschnitt.

§. 36. Auf der andern Seite stelle man sich eine Oberfläche von der Art vor, dergleichen ohngefehr ein zusammen gerolletes Papier hat. Es ist wahr, man kan in einer solchen Oberfläche zwey Puncte A und B nehmen, und dieselbe mit einer geraden Linie zusammen hängen, welche ganz und gar in die Oberfläche fället, und dieselbe in zwey Theile theilet. Und zwar können in der Oberfläche gar viele Puncte seyn, bey welchen dieses zutrift; wie man dann würklich überall, nach der Länge einer solchen Rolle, in deren Oberfläche, eine gerade Linie ziehen kan: Aber auf eine andere Art gehet dieses nicht an. Man nehme die zwey Puncte C und D, und verknüpfe sie mit einer geraden Linie CD, welche man sich als einen von C nach D straf gezogenen Faden vorstellen kan, so fällt diese gerade Linie CD nicht in die Oberfläche. Oder wil man in der Oberfläche, welche wir betrachten, von C nach D eine Linie CED ziehen, so kan dieselbe ohnmöglich gerade werden. Durch die gerade Linie CD aber wird die Oberfläche keines weges getheilet. Denn eine Linie, welche nicht in einer Oberfläche, sondern ausser derselben gezogen wird, kan in der Oberfläche keine Gränzscheidung machen. Eine dergleichen Oberfläche ist nicht eben, sondern uneben oder gekrümmet.

F. 34.

§. 37. Es ist zu bemerken, daß wir unter die Merkmale einer ebenen Fläche nicht mitgesetzet, daß sie bloß durch gerade Linien umschlossen seyn müsse. Es kan dieses seyn, und in diesem Falle wird die Figur dieser Ebene Geradelinicht genennet: aber die Gränzen einer Ebene können auch krumme Linien seyn. Man kan in einer jeden Ebene tausend Arten von krummen Linien verzeichnen, und in eine oder etliche derselben einen Theil der Ebene einschliessen, da man denn die Figur dieser Ebene krummlinicht nennet. Dadurch wird das Wesen der Ebene nicht geändert, oder uneben gemacht was eben war: gleich wie ein Spiegel eben bleibt, man mag ihn in einen runden oder eckichten Rahmen fassen. Im Gegentheile kan auch nicht geschlossen wer-

IV. Abschnitt.

den, daß eine Oberfläche eben sey, wenn ihre Gränzen gerade Linien sind, denn dergleichen Gränzen können auch krumme Oberflächen haben. Man verzeichne auf einer Oberfläche ein Viereck, und setze auf dasselbe einen kleinen Berg von Wachs. Die Oberfläche dieses Berges kan, wie man wil, krum seyn, und doch wird sie von den vier geraden Linien, welche man in der Ebene gezogen hat, umschlossen.

§. 38. Wir werden die ebene Oberflächen, weil sie einfacher sind als die unebenen oder krummen, zuerst betrachten müssen, und alle Linien, sie mögen gerade oder krum seyn, welche wir von nun an ziehen oder betrachten werden, in dergleichen Oberflächen ziehen, oder voraus setzen, daß sie in ebenen Flächen gezogen sind, bis wir uns zur Betrachtung der Lage der Flächen selbst wenden werden. In der That können wir nicht wohl anders, denn wir können die Figuren nicht anders als auf die ebene Fläche des Papieres mahlen. Aber man könte sich doch unter den dergestalt gemahlten Figuren andere Linien vorstellen, welche nicht in der Fläche des Papiers liegen. Und dieses werden wir würklich thun müssen, wenn wir von den Cörpern handeln werden, deren Theile alle ohnmöglich in einer gegebenen Oberfläche liegen können. Allein zur Zeit ist dieses nicht nöthig. Die in einer Ebene gezeichnete Figuren solcher Dinge, deren Theile ebenfals alle in einer Ebene liegen, stellen den Augen alle dasjenige deutlich vor, so man von denselben gedenken muß, und das blosse Ansehen derselben ist öfters hinlänglich, einige Eigenschaften derselben heraus zu bringen, welches ohnstreitig bey dem Nachdenken eine besondere Erleichterung giebt.

Von den Winkeln, vor sich betrachtet.

F. 31. §. 39. Zwo gerade Linien, welche in einer ebenen Fläche liegen, können in einem Puncte zusammen stossen. Es sey A ein dergleichen Punct, von welchem die geraden Linien AB und AC nach verschiedenen Strecken gezogen sind. Es müssen diese gerade Linien sich gegen einander auf gewisse Art neigen. Man hätte nemlich, nachdem AB in der ebenen Fläche gezogen worden ist, die AC in eben der Fläche auch anders ziehen, oder an derselben Stelle AD nehmen können, wodurch die Linien AB, AC, oder AB, AD einander sich entweder mehr genähert oder weiter von einander entfernet hätten. Oder wenn man sich die beyden Linien AB, AC als die Längen zweer Stäbe vorstellet, welche bey A vermittelst eines Gewindes dergestalt an einander befesti-

get

get sind, daß sie sich, wie die Füsse eines Circulinstruments, öfnen oder zusammen drücken lassen, so haben diese Linien AB und AC, oder AB und AD, wie man sie auch gezogen haben mag, eine gewisse Neigung gegen einander, und diese Neigung wird so gleich verändert, so bald man eine dieser Linien AC um das Punct A gegen die andere AB beweget, oder von dieser AB nach AD, oder noch weiter, abziehet.

IV. Abschnitt.

§. 40. Diese Neigung der geraden Linien gegen einander hat mit der Grösse derselben nichts zu thun, und hänget von dieser nicht im geringesten ab. Die gerade Linie AC neiget sich gegen die gerade Linie AB eben so wie der Theil derselben AE sich gegen die AB neiget, wo man auch das Punct E hinsetzen wil. Es wird aber die Neigung zwoer geraden Linien AB und AC, oder AB und AD gegen einander ein Winkel genennet, und wird also durch dieses Wort bloß die Lage zwoer geraden Linien AB und AC, oder AB und AD gegen einander angezeiget, die Grösse dieser Linien aber keines weges bestimmet. Man verkürze die Linie AC und mache AE aus derselben, oder man verlängere AE wie man wil in C, so wird die Lage dieser Linie nicht verändert. Sie gehet noch immer durch die zwey Puncte A und E, durch welche sie Anfangs gegangen, und wir haben IV, 26. gesehen, daß dadurch die Lage einer geraden Linie bestimmet wird. Bleibt aber die Lage der AC nach dieser Verlängerung oder Verkürzung an sich einerley, so kan auch ihre Lage gegen AB dadurch nicht verändert werden, weil man diese Linie AB unverrücket liegen lassen.

§. 41. Wenn verschiedene Winkel in einer Figur vorkommen, auf deren einen oder den andern sich gewisse Worte des Textes beziehen, so würde man sich entweder sehr weitläuftiger und verdrießlicher Umschweife bedienen müssen, oder es würde sehr oft geschehen, daß man einen ganz andern Winkel der Figur den Augen und dem Verstande vorstelte, als man solte, wenn man nicht diese Winkel mit gewissen Zeichen bezeichnete, und diese sind gemeiniglich die Buchstaben des Alphabets, welcher man sich auch sonst zu dergleichen Endzweck bedienet. Und zwar kan man sich zuweilen an einem einigen Buchstaben begnügen lassen, welchen man an die Spitze des Winkels setzet, das ist, an das Punct, in welchem die zwo gerade Linien, welche ihn einschliessen, zusammen laufen. Zuweilen aber, wenn mehr als ein Winkel an einem dergleichen Punct vorkommen, würde dieses

IV. Abschnitt. Verwirrung machen, welche man vermeiden kan, indem man dem erstgesagten Buchstaben, als hier A noch zwey andere beysetzet, die man auch an die Seiten des Winkels, oder an die gerade Linien, welche ihn einschliessen, gesetzt, zwischen welchen letztern zwey Buchstaben der erstgedachte, welchen man in der Figur bey der Spitze geschrieben, in der Mitte stehen muß. Man wird also den Winkel, welchen die Linien CA und AB einschliessen, BAC, oder BAE, oder auch CAB, oder EAB nennen, nicht aber CBA, oder etwas dergleichen, welches deswegen zu vermeiden ist, weil bey B auch ein Winkel stehen könte, dessen eine Seite AB, und die andere die gerade Linie wäre, die man zwischen C, B ziehen kan, welchen man mit dem Winkel bey A verwechseln könte, wenn man C, B, A ohne Unterscheid nehmen wolte.

§. 42. Das gewisseste und natürlichste Zeichen das zwo gerade Linien einander gleich sind, ist, wenn sie auf einander können gepasset werden, das ist, wenn man sie so zusammen bringen kan, daß ihre äussersten Puncte beyderseits zusammen fallen, wie hier bey den geraden Linien zwischen A und B geschehen würde, wenn man sie einander nur noch etwas näherte: und alle Welt schliesset ohne einiger Anweisung aus dieser so genanten Congruenz die Gleichheit zwoer Längen, und hierauf gründen sich alle Messungen derselben, vermittelst der Ellen, oder einer andern beliebigen Masse.

F. 36.

§. 43. Aber aus eben dem Grunde muß man auch sagen, daß zwey Winkel einander gleich sind, welche man dergestalt auf einander bringen kan, daß ihre Spitzen in einem Puncte zusammen fallen, und zugleich die Seiten auf einander zu liegen kommen, oder nach einerley Strecke fortgehen. Bey A sind die Spitzen von zwey Winkeln, deren einen man nur etwas weniges fortschieben darf, um zu machen, daß die Spitzen derselben in ein Punct zusammen kommen, und daß die Seiten ebenfals auf einander fallen, und jede zwo derselben nur eine gerade Linie ausmachen. Man siehet leicht, daß dieses geschehen kan, ob zwar die geraden Linien, welche die Winkel einschliessen, ungleich sind, denn man verlanget nicht, daß auch die äussersten Puncte dieser Seiten auf einander fallen sollen, und dieses deswegen, weil wie IV. 40 gesagt worden, die Grösse der Seiten zu der Grösse der Winkel nichts beyträget.

F. 37.

§. 44. Und

§. 44. Und hieraus ist leicht zu erachten, woraus man schliesse, daß ein Winkel grösser oder kleiner sey als ein anderer. Es ist hier wieder wie bey den geraden Linien. Gesetzt, es passe die gerade Linie zwischen AB auf das Stück der Linie AC, welches zwischen eben den Buchstaben AB lieget, so ist eben dieses das Kennzeichen, aus welchem man schliesset, daß die erstere AB kleiner, und diese letztere AC grösser sey. Und eben so ist es mit den Winkeln. Wenn man einen Winkel CAB innerhalb eines andern DAB dergestalt gesetzt hat, daß so wohl ihre Spitzen zusammen fallen, als auch eine Seite des einen Winkels CAB, nemlich AB mit einer Seite des andern Winkels DAB, nemlich mit eben der AB, nach einer Strecke zugehet, es fällt aber die zweyte Seite AD des einen Winkels DAB, über die zweyte Seite AC des andern CAB hinaus; so schliesset man, daß der erstere Winkel DAB grösser sey als der zweyte CAB.

IV. Abschnitt.

F. 38.

F. 35.

§. 45. Man siehet auch leicht, daß diese Sätze sich umkehren lassen. Wenn nemlich zwo gerade Linien gleich sind, so müssen sie dergestalt auf einander passen, daß ihre äusserste Puncte so wohl, als die übrigen alle, zusammen fallen, und daß aus den zwoen Linien nur eine, von eben der Länge, wird. Und wenn zwey Winkel gleich seyn, so muß man den einen derselben dergestalt auf den andern bringen können, daß so wohl ihre Spitzen als ihre Seiten zusammen fallen; denn wenn sie nicht dergestalt auf einander passeten, sondern nach der Art, welche wir von ungleichen geraden Linien und Winkeln angemerket haben, und aus welchen ihre Ungleichheit geschlossen wird, so müssen sie ungleich seyn, welches demjenigen widerspricht, so erst gesetzet worden. Doch dieses sind Dinge, welche auch ein mittelmässiger Verstand einsehen kan, und wir erklären sie aus keiner andern Ursache, als daß man nicht was anders darunter verstehen möge als die allergemeinste Grundsätze aller Messungen.

§. 46. Uberhaupt also kan man daraus, daß zween Winkel nicht auf einander passen, schliessen, daß sie ungleich seyn. Dieses aber, daß zween Winkel nicht auf einander passen können, siehet man nicht nur, wenn man die Spitzen derselben auf einander gebracht, und eine Seite des einen Winkels auf eine Seite des andern geleget; wovon bereits Erwehnung geschehen: sondern es erhellet dasselbe auch sehr deutlich, wenn man einen derselben ABC auf den andern DEC dergestalt setzen kan, daß die Seite BC auf die Seite EC zu liegen kommt,

F. 39.

IV. Abschnitt.

kommt, die andere Seite AB aber des einen Winkels ABC, die andere Seite DE des andern, irgendwo in einem einzigen Punct A berühret, oder schneidet. Ist dieses, so siehet man leicht, daß der Winkel ABC niemals auf den Winkel DEC genau passen werde, man mag ihn auf der EC verschieben wie man wil. Es kan, wenn BC immer in EC fällt, ohnmöglich die andere Seite BA ganz auf ED zu liegen kommen, welches erfordert wird, wenn ABC in DEC passen sol.

§. 47. Und hieraus folget, daß wenn man von einem Puncte A ausserhalb einer geraden Linie EC zwo gerade Linien AE, AB an die gedachte EC ziehet, ohnmöglich die zween Winkel AEC und ABC gleich seyn können, welche die geraden Linien AE, AB mit der EC einschliessen, und welche beide mit ihren Oefnungen nach einer Seite zu stehen. Weil eben daraus, wenn die Winkel ABC, AEC so stehen, wie wir sie eben beschrieben, geschlossen wird, daß sie ungleich seyn.

§. 48. Und wenn demnach an einer geraden Linie EC zwo gerade Linien ED, BA dergestalt liegen, daß sie mit der EC die gleiche Winkel DEC, und ABC, deren Oefnungen nach einer Seite zu gekehret sind, einschliessen, so können diese Linien ED und BA nicht zusammen lauffen, man mag sie von E gegen D und von B gegen A verlängern wie man wil. Denn, wenn die Linien ED, BA irgendwo zusammen lauffen, wie die Linien ED, BA der vorigen 39 Figur in A zusammen kommen, so müssen die Winkel DEC und ABC ungleich seyn, welches demjenigen widerspricht, so von denselben angenommen worden. Wir reden von dem Fall, wenn die Winkel DEC, ABC gleich sind, und gleiche Winkel können ohnmöglich ungleich seyn. Wir werden hernach sehen, daß die Linien AB, DE auch nicht auf der andern Seite der EC zusammen lauffen können, wenn man sie an derselben verlängert; allein wir können dieses noch nicht beweisen, und wenn man in der Geometrie nicht beweisen kan, höret man billig auf zu reden.

F. 40.

§. 49. Die Winkel werden in dreyerley Arten eingetheilet. Man hat rechte oder gerade, spitzige und stumpfe Winkel, ihre Verschiedenheit von einander bestehet nur in ihrer Grösse. Die spitzigen Winkel sind die kleinesten, die rechten sind etwas grösser und die stumpfen die allergrösten. Doch dieses setzet die Begriffe nicht vollkommen fest, wir werden uns netter erklären müssen.

§. 50.

IV. Abschnitt. F. 41.

§. 50. Man stelle sich demnach eine gerade Linie auf einer beugsamen Fläche, zum Exempel auf einem Blatt Papier gezogen vor. Diese sey AB. Man falte das Papier zusammen, aber so, daß das eine Ende der geraden Linie B wieder in eben diese gerade Linie zu liegen komme. Wenn man nun das Papier bricht, und machet, daß seine zwey Theile dichte auf einander liegen, so muß auch der eine Theil der Linie AB ganz und gar auf dem andern zu liegen kommen. Die Meynung hievon ist diese. Gesetzt das Papier sey nun wieder aufgethan, die Biegung aber oder der Bruch, welcher in demselben durch das Zusammenhalten gemacht worden, sey CD, so will man sagen, daß, als das Papier noch dergestalt zusammen lage, daß das Punct B in AD fiele, auch die ganze DB auf der geraden Linie AB gelegen. Wer hiebey anstehen solte, bedenke nur, daß bey dem dergestalt zusammen gefallenen Papier alle beide Theile der Linie AB, nemlich AD und DB so wohl durch das Punct D, als auch durch dasjenige Punct des Theils AD gehen, auf welches das Punct B geleget worden ist. Zwo gerade Linien aber, welche durch zwey gegebene Puncte gehen, fallen allerdings zusammen, und machen nur eine gerade Linie aus.

§. 51. Es ist leicht einzusehen, daß indem die Linie DB dergestalt auf die AD gelegt worden, auch der Winkel CDB auf den Winkel CDA gepasset habe, weil man dieser Winkel ihre Spitzen und Seiten auf einander gebracht. Hieraus folget, daß der Winkel ADC dem Winkel CDB gleich seyn müsse. Man kan demnach auf eine jede gerade Linie AB eine andere gerade Linie so setzen, wie wir hier den Bruch des Papiers CD gesetzet zu seyn uns vorstellen, daß nemlich diese letztere Linie CD mit der erstern zween Winkel machet, welche einander gleich sind, nemlich CDA gleich dem Winkel CDB. Und die angegebene Art dieses zu verrichten kan uns indessen hinlänglich seyn, bis wir eine bessere und bequemere finden.

§. 52. Wenn aber eine gerade Linie CD auf einer andern AB so stehet, daß sie mit derselben zwey gleiche Winkel machet, ADC, CDB, welche beide an einander, und nach einer Seite der letztern Linie AB liegen, und nicht etwa übereck; so sagt man die erstere Linie CD sey auf die letztere perpendicular, und wir werden hernach sehen, daß in diesem Fall auch die Linie AB oder ein Stück derselben AD, oder DB auf CD perpendicular sey. Im gegentheil, wenn eine Linie auf eine andere dergestalt fället, daß die zween neben einander stehende Winkel ungleich

IV. Abschnitt. gleich werden; so saget man, daß sie auf dieser schief stehe. Auf eben der geraden Linie AB stehet DE dergestalt, daß sie mit derselben zwey ungleiche Winkel ADE, EDB machet. Dieses ist dasjenige, was man damit ausdrücken wil, wenn man saget die DE stehe schief auf der AB.

§. 53. Man kan auf eine jede gerade Linie AB eine andere CD perpendicular setzen. Dieses ist eben dasjenige, so ohnlängst mit andern Worten gesagt worden. Man kan machen, daß diese perpendicular-Linie durch ein jedes Punct gehe, es mag dasselbe liegen wo es wil, wenn es nur nicht ausser der Fläche lieget, in welcher die Linie AB gezogen ist. Man darf zu dem Ende nur das Papier nach der angegebenen Art falzen, daß der Bruch durch das gegebene Punct C oder D gehe. Dieses fliesset aus dem Begrif der perpendicular-Linie, welchen wir IV, 50. gegeben, eben so deutlich, als ob wir dergleichen Linien bereits auf eine bequemere und der Geometrie gemässe Art zu ziehen wüsten, welche erst künftig wird können gezeiget werden. Denn diejenige Anweisung, welche wir gegeben, ist bloß darzu, daß der Begrif derselben desto deutlicher werde, und von derjenigen Art, nach welcher die Geometrie etwas verfertigen oder heraus bringen lehret, gar weit entfernet.

§. 54. Der Winkel, welchen eine gerade Linie CD mit einer andern AB einschliesset, auf welcher sie perpendicular stehet, das ist der Winkel ADC, oder der Winkel CDB wird ein gerader oder rechter Winkel genennet. Alle übrige Winkel die keine gerade sind, heissen schiefe Winkel. Es sind nicht allein die beeden Winkel ADC und CDB, einander gleich, sondern auch alle übrige gerade Winkel welche man nur machen oder sich vorstellen kan, sind ebenfalls einem dieser beiden geraden Winkeln ADC, CDB, und einander selbst, gleich. Denn woher solte die Ungleichheit bey denselben herkommen? Sie entstehen alle vollkommen auf einerley Art, indem man nemlich auf gerade Linien, welche nicht anders als nach der Grösse von einander unterschieden seyn können, andere gerade Linien dergestalt setzet, daß diese mit jenen zu beyden Seiten gleiche Winkel machen. Die verschiedene Grösse der Seiten verändert in der Grösse der Winkel nichts, IV, 40. dieses aber ist das einzige, welches bey so gestalten Sachen bey geraden Winkeln verschieden werden kan.

§. 55. Wenn nemlich auf einer geraden Linie AB eine andere CD perpendicular stehet: so kan keine neue Linie gezogen werden, wel-

che

che auf eben der Linie AB perpendicular stehe, und durch eben das Punct D der Linie AB lauffe, durch welches CD gezogen worden. Solte man hiebey Schwürigkeiten finden, so werden sich dieselben bald verlieren, wenn man betrachtet, daß die Perpendicular-Linie CD die Gleichheit der Winkel ADC, CDB erfordere, welche ohnmöglich kan erhalten werden, wenn man CD im geringsten auf diese oder die andere Seite neiget. Ist CD auf AB perpendicular, und man ziehet noch eine andere Linie DE durch das Punct D; so ist der Winkel EDB ohnstreitig kleiner als CDB, und der neben stehende EDA ist grösser als CDA, und folgends auch grösser als CDB. Wie können denn also die Winkel EDA und EDB einander gleich seyn? Diese Gleichheit der Winkel EDA und EDB aber muß man annehmen, wenn man behauptet, es sey ED auf AB perpendicular.

IV. Abschnitt.

§. 56. Es kan aber auch durch das Punct C ausser der AB, durch welches bereits CD auf AB perpendicular gezogen worden ist, keine andere Linie gehen, welche ebenfalls auf AB perpendicular fiele. Denn wenn man sich ausser der Perpendicular-Linie CD eine andere Linie CF vorstellet, welche durch C an AB gehet, so siehet man leicht, daß der Winkel CFB dem Winkel CDB ohnmöglich gleich seyn könne: Weil die Linien FC, DC in den Punct C zusammen kommen, welches ein gewisses Zeichen der Ungleichheit zwoer Winkel ist IV, 46. Ist aber der Winkel CFB dem Winkel CDB nicht gleich, so ist er kein gerader Winkel, IV, 54. denn CDB ist ein gerader Winkel, folgends ist auch CF auf AB nicht perpendicular.

F. 42.

§. 57. Da man einen geraden Winkel leicht machen, und denselben sich nach seiner vollkommenen Grösse vorstellen kan, so pflegt man einen geraden Winkel zu dem Masse aller übrigen anzunehmen, nicht allein, wenn sie einzeln betrachtet werden, sondern auch dann, wann man die Summa von zweyen, dreyen oder mehrern Winkeln anzeigen wil. Man begreift aber die Summe zweyer, dreyer, oder mehrerer Winkel gar leicht. Dieselbige zu erhalten, muß man die Winkel, deren Summe man verlangt, bey ihren Spitzen zusammen setzen, dergestalt, daß diese zusammen fallen, und eine Seite des einen auf einer Seite des andern, die Winkel aber selbst ausser einander liegen, wie in der 35. Figur mit den beiden Winkeln BAC, CAD geschehen: so ist der Winkel DAB, welcher von den beiden äussersten Seiten eingeschlossen wird, die Summe so gesucht worden.

IV. Abschnitt.

F. 40.

§. 58. Wenn man auf die Art zwey gerade Winkel zusammen setzet, so machen allezeit ihre äussersten Seiten mit einander eine gerade Linie aus. Denn man stelle sich die gerade Linie AB als bereits gezogen vor, und setze an dieselbige den geraden Winkel CDB: so wird CD auf AB perpendiculär, und CDA ebenfalls ein gerader Winkel seyn. Und wenn man demnach an diese CD einen andern geraden Winkel dergestalt setzet, daß seine Spitze in D falle, und seine Oefnung nach A gekehret sey, so kan die andere Seite desselben nicht ausser AD fallen, weil sonst zwey gerade Winkel einander nicht decken würden, und folgends einer derselben grösser wäre als der andere. IV, 54. Man kan sich demnach eine jede gerade Linie AB vorstellen, als ob sie aus zweyen Theilen, AD und DB zusammen gesetzet wäre, welche mit einander einen Winkel ADB einschliessen, der zween rechten Winkeln gleich ist.

§. 59. Aus der erwehnten Ursache, weil man einen geraden Winkel so leicht haben kan, wird er auch darzu angenommen, daß man die besondern Arten der übrigen Winkel bestimme. Die Winkel können nichts anders als nach ihrer Grösse von einander verschieden seyn. Hätte man kein gewisses Maaß, an welchem man ihre Grösse beurtheilen könte so wäre ohnmöglich diese verschiedene Grösse genau und verständlich anzugeben, und die besondern Arten der Winkel fest zu setzen. Da wir aber die geraden Winkel haben, können wir bey dieser Eintheilung nachfolgender massen verfahren.

F. 41.

§. 60. Wenn ADC und CDB gerade Winkel sind, und man hat durch D eine andere gerade Linie DE gezogen, welche auf der AB nicht perpendicular sondern schief stehen wird, so ist der Winkel EDB, wie wir bereits gesehen haben, kleiner, und EDA grösser als ein gerader Winkel CDB, oder CDA. Ein jeder Winkel der wie EDB kleiner ist als ein gerader Winkel, heisset ein spitziger Winkel, und ein jeder Winkel, der grösser ist als ein gerader Winkel, als EDA, wird ein stumpfer Winkel genennet. Die rechten Winkel, die spitzigen, und die stumpfen sind die drey Arten der Winkel, welche man von einander insonderheit zu unterscheiden hat. So wohl die spitzigen als die stumpfen werden schiefe Winkel genennet. IV, 54.

§. 61. Ziehet man, wie eben geschehen, von der Spitze eines geraden Winkels CDB, eine gerade Linie DE innerhalb desselben, so bekommt man zwey Winkel BDE, und EDC, welche zusammen einen

nen geraden Winkel ausmachen. Einer derselben, welchen man nehmen will, heisset die Ergänzung des andern zu einem rechten Winkel, oder auch schlecht weg, seine Ergänzung. Denn da man einen rechten Winkel als eine ganze Einheit ansiehet, nach welcher man die übrigen Winkel misset IV, 57. so hat man allerdings einen spitzigen Winkel EDB nicht anders, als einen Theil, welcher durch den Zusatz eines andern Theils CDE, ein Ganzes wird, zu betrachten.

§. 62. Hat man wiederum auf eine gerade Linie AB eine andere CD perpendicular gestellet, und demnach zwey rechte Winkel ADC und CDB neben einander gesetzt, und man ziehet so dann von D eine andere Linie DE, nach welcher Seite man wil, so machen die zwey Winkel CDE + EDB zusammen einen rechten Winkel CDB aus. Da nun ADC auch ein rechter Winkel ist: so müssen die drey Winkel ADC + CDE + EDB zween rechten Winkeln gleich seyn. Setzet man die zween erstern Winkel zusammen, und machet aus ADC + CDE den einzigen Winkel ADE, so ist dieser Winkel ADE mit dem Winkel EDB zusammen ebenfalls zween rechten Winkeln gleich. Und so ist es mit jeden zween Winkeln, welche eine gerade Linie ED machet, indem sie schief auf eine andere gerade Linie AB fället. Sie sind allezeit zusammen zween rechten Winkeln gleich. Denn wenn die Perpendicular-Linie CD noch nicht gezogen ist, so kan man doch allezeit eine ziehen, oder sich eine als gezogen vorstellen, und so dann eben den Beweiß führen, welchen wir eben geführet. Und es ist derowegen überhaupt richtig, daß wenn eine gerade Linie auf eine andere fället, sie mit dieser entweder würklich zween rechte Winkel mache, oder doch zween solche, die zween rechten Winkeln gleich sind. Auf die gerade Linie AB fallen CD und ED die erste machet mit derselben zween rechte Winkel; die andere zween schiefe, die aber zusammen zween rechten gleich sind.

§. 63. Man kan diesen Beweiß etwas kürzer verfassen. Die Summe der Winkel ADE + EDB gibt den Winkel ADB. Nun ist ADB eine gerade Linie, und folgends der Winkel ADB, welchen die Theile derselben AD und DB mit einander machen, zween rechten Winkeln gleich IV, 58. Demnach beträget auch die Summe der Winkel ADE und EDB zwey rechte Winkel.

§. 64. Ein Winkel wie EDB, welcher mit einem andern EDA eine Summe giebt, die zween geraden Winkeln gleich ist, heisset des

IV. Abschnitt.

erstern seine Ergänzung zu zweyen geraden Winkeln. Den Grund dieser Benennung haben wir IV, 59. berühret.

F. 43.

§. 65. Wenn man aus dem Punct D noch mehrere gerade Linien ziehet, welche die Winkel ADE und EDB noch weiter theilen, als DF und DG so kan die Summe der Winkel, die auf die Art kommen, ADF, FDE, EDG und GDB nicht mehr und nicht weniger betragen, als die Summe der zween vorigen ADE und EDB. Da nun also die beyden Winkel ADE und EDB zween rechten Winkeln gleich sind, so müssen auch alle die besagten Winkel, deren Spitzen in dem Punct D zusammen fallen, zusammen gesetzt zween rechten Winkeln gleich seyn. Und wenn man überhaupt einen Punct, als hier D, in einer geraden Linie AB annimmt, und von demselben so viele gerade Linien ziehet als man wil DF, DE, DG, alle an einer Seite in Ansehung der angenommenen geraden Linie AB, so werden die Winkel die auf die Art heraus kommen, zusammen genommen, allezeit zween geraden Winkeln gleich.

§. 66. Und das Kennzeichen, daß verschiedene Winkel zusammen genommen zween gerade Winkel ausmachen, ist, wenn sie sich neben einander auf eine gerade Linie setzen lassen, oder wenn, indem man sie zusammen setzet, ihre Summe zu finden, wie die Winkel BDG, GDE, EDF, FDA, neben einander stehen, die beiden äussersten Seiten DA, DB keinen eigentlichen Winkel einschliessen, oder sich nicht gegen einander neigen, sondern mit einander eine gerade Linie ADB ausmachen. Geschiehet dieses nicht, und machen die beiden äussersten Seiten der dergestalt zusammen gesetzten Winkel nicht eine gerade Linie, so beträgt die Summe der Winkel, welche man zusammen gesetzt hat, entweder weniger oder mehr als zween rechte Winkel. Nemlich in der 43 Figur beträgt die Summe der Winkel BDG + GDE + EDF, deren äusserste Seiten DB und DF den Winkel FDB einschliessen, weniger als zween rechte Winkel, und in der 44 Figur macht die Summe der Winkel BDG + GDE + EDF mehr als zween rechte Winkel aus, und es ist leicht zu sehen, in welchem Fall das erstere oder das letztere statt habe: wenn man sich nur daran hält, so man annehmen kan, daß die Theile AD, DB der geraden Linie AB mit einander einen Winkel machen, der zween rechten gleich ist.

§. 67.

§. 67. Und wenn demnach die Summe verschiedener Winkel zween rechten Winkeln gleich ist, und man setzt sie, wie eben gesagt worden, zusammen, so müssen die äussersten Seiten DB, DA mit einander eine gerade Linie ausmachen. Wäre dieses nicht, so betrügen die zusammengesetzte Winkel weniger oder mehr als zween gerade, und könte demnach ihre Summe nicht zween geraden Winkeln gleich seyn, welches demjenigen widerspricht, so man angenommen.

IV. Abschnitt.

§. 68. In der letzten Figur machet DF mit der DB wieder einen Winkel BDF, welchen, wenn man ihn zu den vorigen BDG, GDE, EDF hinzu setzet, die Summe aller dieser Winkeln BDG + GDE + EDF + FDB leicht anzugeben ist. Sie beträgt genau vier gerade Winkel. Denn wenn man überhaupt in einer geraden Linie AB ein Punct D annimt, und ziehet nicht allein nach der einen Seite dieser geraden Linie verschiedene andere, DG, DE, sondern man thut dieses auch auf der andern Seiten, indem man DF, und wenn man will, noch andere gerade Linien ziehet, so beträgt die Summe aller Winkel, welche disseits der geraden Linie AB stehen, BDF + FDA, so wohl zween gerade Winkel, als die Summe aller Winkel jenseits BDG + GDE + EDA zween gerade Winkel beträgt. Und demnach macht die Summe aller Winkel disseits, wenn man sie zu der Summe aller Winkel jenseits hinzu setzet, zwey mal zween, oder vier gerade Winkel aus. Das ist, die Summe aller Winkel, die rings herum um das Punct D stehen, beträgt vier gerade Winkel. Löschet man eine oder die andere von besagten geraden Linien weg, oder ziehet eine neue von dem Punct D nach welcher Seite man will, so wird die Summe der Winkel weder vermehret noch verringert, und bleibt demnach ebenfals noch vier rechten Winkeln gleich. Und ist demnach die angegebene Grösse der Summe von allen Winkeln, die um einen Punct stehen, richtig, ob zwar keine derselben Linien, wie in unserer Zeichnung ADB, in einem gerade durchgehet. Denn man kan sich allezeit vorstellen, daß der Theil AB der Linie, welche gerade durchgegangen, nur weggelöschet sey, wodurch in der Summe aller Winkel nichts geändert wird. Und es beträgt demnach allerdings die Summe aller Winkel BDG + GDE + EDF + FDB vier rechte Winkel.

F. 44.

§. 69. Dieser Satz brauchet noch eine kleine Erläuterung; denn es hat bey demselben ein Zweifel statt. Wenn man so viele der aus dem Puncte D gezogenen Linien weglöschen kan als man will, ohne daß dadurch in der Summe aller Winkel, die um das Punct D

 stehen,

IV. Abschnitt.

stehen, eine Veränderung vorgehe: so müssen auch jede zwo Linien, welche bey D zusammen stossen, als ED, DB um dieses Punct Winkel machen, deren Summe vier geraden Winkeln gleich ist. Nun scheinet es, daß die Linien ED, DB keinen andern als den Winkel EDB mit einander einschliessen, und dieser ist in unserer Zeichnung nicht einmal so groß als zween rechte Winkel. Die Antwort auf diesen Einwurf ist: die Linien ED, DB machen würklich zween Winkel mit einander. Der erste ist derjenige, so aus den zween Winkeln EDG, GDB zusammen gesetzet ist, und dieser ist würklich in der gegenwärtigen Zeichnung kleiner als zween rechte Winkel. Der zweyte aber bestehet in dieser Zeichnung aus den dreyen Winkeln EDA, ADF, FDB, und ist grösser als zween gerade Winkel. Man ist nicht nur in diesem Satz gezwungen, dergleichen Winkel anzunehmen, die grösser sind als zween gerade, sondern auch in verschiedenen andern: Und wenn man sie nicht annehmen wolte, würden verschiedene Sätze, wie man sie gemeiniglich ausdrücket, falsch und unrichtig seyn.

§. 70. Dieses sind Sätze, welche wir so gleich einsehen konten, so bald wir begriffen, was eigentlich ein Winkel sey, und wornach man seine Grösse bestimme, welche wir demnach hier nicht vorbey gehen konten, weil sie sich so natürlich von selbst angaben. Noch etwas ist bey dieser Sache übrig, welches sich nicht viel schwerer, ja fast einiger Massen noch leichter einsehen lässet. Wenn zwo gerade Linien einander schneiden, und mit einander vier Winkel machen, so sind diejenige, welche einander entgegen gesetzet sind, und von welchen bloß die Spitzen einander berühren, die Seiten aber von einander abgesondert sind, einander beständig gleich. Die 30 Zeichnung erkläret die Sache deutlich. Um das Punct A stehen vier Winkel, welche entstanden sind, indem die geraden Linien EB, DC einander geschnitten. Zween dieser Winkel DAE, BAC liegen nirgends an einander, als an ihren Spitzen; eben so ist es mit den DAB und EAC. Und von diesen wird gesaget, daß sie einander gleich sind, nemlich DAE = BAC, und DAB = EAC, nicht aber DAE = DAB, oder BAC = CAE, denn diese haben die angezeigete Lage nicht, und es ist auch bloß aus der Zeichnung sichtlich, daß sie ungleich seyn können.

F. 30.

§. 71. Wir sagen, dieses sey noch einiger Massen leichter einzusehen als das vorige, denn der blosse natürliche Verstand giebt es.

Man

Man stelle sich vor, daß man die gerade Linien EB, DC nach Belieben gezogen; denn sonst wird zu dieser Zeichnung nichts erfordert; und frage sich selbst, auf welcher Seite der grössere Winkel liege? ob BAC grösser sey als DAE, oder ob umgekehrt DAE der grössere und BAC der kleinere Winkel sey? Man wird nichts finden so einen vermögen könte, das eine vielmehr als das andere zu sagen; denn es ist würklich nichts, wodurch diese Winkel verschieden werden könten.

§. 72. Dergleichen Beweise sind gar gut, aber in der Geometrie erfordert man ein mehreres. Man ist in dieser Wissenschaft nicht mit jeden Beweisen zu frieden, sondern erfordert solche, welche die vollkommenste Ueberzeugung geben, ohne den geringsten Zweifel übrig zu lassen. Man wird aber finden, daß der gegebene Beweiß von der Art nicht sey. Man kan noch allezeit die Furcht hegen, daß vielleicht dennoch bey dem Winkel BAC etwas seyn möchte, so bey dem DAE nicht anzutreffen, welches man aber wegen Mangel genugsamer Einsicht in diese Dinge, nicht bemerken können. Zu dem ist es in dieser Wissenschaft um einen beständigen Zusammenhang zu thun. Man suchet beständig Satz mit Satz, das nachfolgende mit dem vorhergehenden zu verknüpfen. Diesem Zweck gemäß aber müssen wir, was wir eben gesaget, auf eine ganz andere Art beweisen. Wobey und ins künftige beständig R, allezeit einen rechten Winkel bedeuten soll, und folgends 2 R, zwey rechte Winkel, 3 R, drey rechte Winkel, und so fort.

§. 73. Auf der geraden Linie EB stehet die gerade Linie AD, und ist aus einem Punct der EB nemlich aus A fortgezogen. Demnach muß die Summe der beyden Winkel DAE und DAB zween rechten Winkeln gleich seyn, oder kurz, DAE+DAB = 2R. IV, 62. Eben so stehet auf der geraden Linie DC die Linie AB, und ist demnach hier wie vorher DAB+BAC = 2R. Das ist, DAE+DAB = 2R, und DAB+BAC = 2R. Ein gerader Winkel ist so groß als ein anderer, und zween gerade Winkel sind ebenfals von einer bestimmten Grösse, welche beständig einerley ist: demnach sind die vorgesetzten zwo Summen der Winkel DAE+DAB, und DAB+BAC deren jede zween rechten Winkeln gleich ist, einerley dritten Grösse gleich, nemlich eben den besagten 2R, also müssen sie auch einander gleich seyn, EAD+DAB = DAB+BAC. Wenn man aber auf diese Summen Acht hat, so findet man, daß so wohl in der einen derselben als in der andern der Winkel DAB vorkommt, und daß

der-

IV. Abschnitt.

derselbe in der einen durch den Zusatz des Winkels EAD so groß geworden, als in der andern durch den Zusatz des Winkels BAC. Diese zween Winkel demnach DAE und BAC, welche zu einerley Winkel DAB hinzugesetzt, gleiche Summen heraus bringen können, ohnmöglich ungleich seyn.

§. 74. Oder will man etwas anders verfahren, so nehme man von der einen der erst gesetzten Summen EAD + DAB = DAB + BAC so wohl als von der andern den Winkel DAB hinweg. Da die Summen gleich sind, kan es nicht anders seyn, es muß nach diesem Abzug wieder beyderseits gleiches übrig bleiben. Nimt man aber von der ersten Summe EAD + DAB den Winkel DAB hinweg, so bleibt der Winkel DAE allein übrig, und bey der letztern Summe DAB + BAC bleibt nach ebenmässigem Abzug der Winkel BAC. Es muß also nothwendig der Winkel DAE dem Winkel BAC gleich seyn.

§. 75. Schneiden demnach, wie in der Zeichnung, die wir eben betrachtet, zwo gerade Linien einander, und es ist einer der vier Winkel, welche sie machen, gegeben oder bekannt, so sind die übrigen drey auch bekannt. Denn gesetzt, es wäre uns der Winkel DAE bekannt oder gegeben, wir wüsten seine Grösse, und könten sie anzeigen, oder nach Belieben einen Winkel machen der so groß ist, als DAE, so wäre uns eben dadurch der Winkel BAC auch bekannt, denn er ist jenem gleich. Der Winkel DAB aber ist die Ergänzung des erstern DAE zu zween geraden Winkeln, weil diese Winkel EAD und DAB neben einander auf der geraden Linie EAB stehen: und demnach ist DAB leicht zu haben, und kan vor bekannt angenommen werden, und so auch EAC, welcher dem DAB gleich ist. Auch siehet man leicht, daß wenn einer dieser vier Winkel gerade ist, die übrigen dreye ebenfals gerade seyn müssen.

§. 76. Und diese sind die Eigenschaften derer Winkeln, wenn man sie vor sich betrachtet, und wir haben die erste Verknüpfung gerader Linien gemacht, welche zu machen war, da wir sie nemlich so an einander gesetzt, daß sie in einem Punct zusammen kamen und einen Winkel machten, von dessen Seiten wir entweder nur eine oder alle beyde weiter fortgezogen: wir müssen nunmehro zu den übrigen Lagen, welche zwo gerade Linien haben können, welche nicht zusammen stossen, oder einander nicht berühren, übergehen.

Parallellinien.

F. 45.

§. 77. Wir haben IV, 48. gesehen, daß zwo gerade Linien AB und DE, welche beyde mit einer dritten EC, gleiche Winkel ABC und DEC machen, nicht zusammen laufen können, wenn man sie nach der Seite ED und BA, verlängert. Man verlängere sie aber nach der andern Seite, AB in F, und DE in G, und ziehe auch EC in H fort, so ist der Winkel ABC dem Winkel HBF gleich, und der Winkel DEC = HEG. IV, 70. Da nun die Winkel ABC und DEC einander gleich sind, so können die andern zween, HBF und HEG unmöglich ungleich seyn. Es ist also HEG = HBF, und auf der geraden Linie HC stehen zwo gerade Linien EG und BF, welche mit derselben zween gleiche Winkel HEG, HBF einschliessen, so beyde nach einer Seite gerichtet sind. Also lauffen die geraden Linien BF und EG auch nicht zusammen, wenn man sie beyde nach EG, BF verlängert. IV, 48. Folgends liegen diese geraden Linien AF, DG so, daß sie gar nicht zusammen kommen können, man mag sie auf dieser oder jener Seite der HC fortziehen, und alle gerade Linien, welche mit einer dritten gleiche Winkel einschliessen, die nach einer Seite gekehret sind, haben diese Eigenschaft.

§. 78. Diejenige geraden Linien aber welche nicht zusammen lauffen, man mag sie auch verlängern wie man will, heissen Parallel-Linien, oder, man pfleget die Lage einer derselben in Ansehung der andern dadurch anzuzeigen, daß man saget, sie sey dieser parallel. So ist DG der AF parallel, und AF der DG. Wir haben schon gesagt, daß wir hier alle Linien, welche wir betrachten, in einerley Ebene annehmen, und dieses ist bey den Parallellinien am wenigsten zu vergessen. Denn liegen zwo Linien nicht in einer Ebene, so sind sie deswegen nicht parallel, ob sie zwar niemals zusammen lauffen, und ist auf dieselbe dasjenige, so von den Parallellinien zu sagen ist, keinesweges anzuwenden. Zwo gerade Linien, deren eine auf dem Tisch, die andern aber auf dem Boden des Zimmers nach verschiedenen Strecken gezogen sind, eine ohngefehr von Mittag nach Mitternacht, und die andern von Morgen gegen Abend, geben ein Exempel von solchen Linien, welche einander niemals antreffen, und doch keine Parallellinien sind. Sie sind nemlich nicht in einer einigen Fläche gezogen, oder man kan sich keine ebene Fläche vorstellen, in welcher diese Linien beyde befindlich wären.

IV. Abschnitt.

§. 79. Man siehet leicht, daß eben diese Lage der geraden Linien AF und DG auch daraus könne geschlossen werden, wenn der Winkel DEB, dem Winkel EBF gleich ist; und daß jede zwo gerade Linien AF, DG parallel sind, welche von einer dritten HC dergestalt geschnitten werden können, daß die eben genannten Winkel DEB, EBF einander gleich sind, welche beyde zwischen den zwo Linien DG und AF, und an verschiedenen Seiten der Linie HC liegen, der eine zum Exempel wie hier DEB über dieser Linie, und der andern EBF unter derselben. Denn der Winkel EBF ist dem Winkel ABC nothwendig gleich, weil diese beyde Winkel entstanden sind, indem die geraden Linien AF und HC einander in B geschnitten, und weil sie einander entgegen stehen. IV, 70. Ist nun also der Winkel EBF dem Winkel DEB gleich, so muß nothwendig auch ABC (= EBF) eben dem Winkel DEB gleich seyn. Ist aber ABC = DEB, oder DEC, so sind die geraden Linien DG und AF parallel. IV, 77. Demnach sind sie auch parallel, wenn die Winkel DEB und EBF gleich sind.

§. 80. Auch hier kan man sich einer gar natürlichen Art zu schliessen bedienen, um dasjenige zu erweisen, so wir eben gezeiget haben. Die geraden Linien AF und DG werden von einer dritten geraden Linie EB beyde geschnitten, und es sind die Winkel DEB und EBF einander gleich. Dieses ist angenommen worden, und man siehet leicht ein, daß auch die übrigen Winkel ABE, BEG, als jener ihre Ergänzungen zu zweyen geraden Winkeln, gleich seyn müssen. Ist aber dieses, so ist alles zu beyden Seiten der Linie EB einerley. Die Theile der geraden Linien AB, DE, welche zur rechten an EB fallen, machen eben solche Winkel mit derselben, als diejenigen Theile, die zur linken liegen EG und BF. Sind nun die Linien AB und DG nicht parallel, so müssen sie, wenn man sie verlängert, zusammen lauffen, entweder auf einer Seite der Linie EB, oder auf der andern, denn wenn sie weder da noch dort zusammen kommen, so sind sie parallel. Aber warum sollen sie mehr auf dieser als auf jener Seite zusammen kommen? warum zur rechten und nicht zur linken? denn zu beyden Seiten können sie einander nicht erreichen, weil es nicht möglich ist, daß zwo gerade Linien mehr als ein gemeinschaftliches Punct haben. IV, 27.

§. 81. Es kan eben dieses, daß nemlich AF und DG einander parallel seyen, auch daraus geschlossen werden, wenn man findet, daß

daß die Winkel ABC und HEG, welche beyde ausserhalb den besagten Linien AF und DG liegen, und deren Oefnungen nach verschiedenen Seiten gekehret sind, einander gleich sind. Denn weil ABC dem Winkel EBF gleich ist, und HEG dem Winkel DEB, IV. 70. so müssen nothwendig auch die Winkel EBF und DEB gleich werden, so bald ABC und HEG einerley Grösse bekommen. Also sind wir wieder auf den Gründen, aus welchen wir eben IV, 79. geschlossen haben, daß AF und DG parallel seyn.

§. 82. Ferner können wir noch eben dieses schliessen, wenn wir finden, daß die beyden Winkel DEB und EBA, welche zwischen den zwey gegebenen, und von der HC geschnittenen, Linien AF und DG enthalten sind, und nach einerley Seite gerichtet stehen, zusammen gesetzet zween geraden Winkeln gleich sind. Denn wenn dieses angenommen wird, so kan man daraus die Gleichheit der Winkel ABC und DEC folgendergestalt schliessen. Die Winkel DEB und EBA sind zween rechten Winkeln gleich. Dieses wird angenommen. Nun sind auch die Winkel EBA und ABC zween rechten Winkeln gleich, weil sie neben einander auf der geraden Linie HC stehen, auf welche AB gefallen. IV, 62. Derowegen ist die Summe der Winkel DEB +EBA (=2R=) der Summe der Winkel EBA+ABC gleich, und wenn man von diesen Summen gleiches wegnimmet, so muß gleiches übrig bleiben. Man nehme beyderseits den Winkel EBA weg, denn der ist nothwendig sich selber gleich, so bleibt auf einer Seite DEB, und auf der andern ABC übrig. Diese Winkel sind demnach gleich. Aus der Gleichheit dieser Winkel DEB, ABC aber, haben wir die parallellage der geraden Linien DG und AF gleich Anfangs IV, 77. schliessen können.

Von dem Umkreis der Figuren überhaupt.

§. 83. Zwo gerade Linien können einer ebenen Fläche, in welcher sie gezogen sind, keine Figur geben. Darzu wird erfordert, daß die Gränzen der Ebene von allen Seiten fest gesetzet und bestimmet werden. Denn aus den Gränzen allein bekommt man den Begrif einer Figur, wie gleich Anfangs IV, 2. ist gesaget worden. Daß aber zwo gerade Linien eine Ebene von allen Seiten einschränken sollen, ist gar nicht zu gedenken. Sie können in nicht mehrere als in einem Puncte zusammen stossen, sie können aber auch so liegen, daß sie gar nicht zusammen kommen. In dem ersten Falle, da sie nemlich einen

IV. Abschnitt. Winkel machen, lassen sie die Fläche von einer Seite offen und unbeschränkt, in dem andern Falle aber von beyden Seiten. Man muß demnach einer Ebene eine Figur zu geben, wenigstens drey gerade Linien nehmen, und dieselbe so zusammen setzen, daß immer eine mit der nächsten in einem Puncte zusammen laufe. Eine solche Figur nennet man ein Dreyeck: dergleichen ist ABC. F. 46.

§. 84. Man kan aber einer Figur mehr als drey Seiten geben, und die Zahl der Seiten ohne einziges Ende vermehren wie man will. Bekommt die Figur vier Seiten, so heisset sie ein Viereck als ABD, und eine fünfseitige Figur heisset ein Fünfeck ABE. Eine Figur die sechs Seiten hat ein Sechseck ABF, und so fort. Es ist nemlich sichtlich, daß eine jede Figur so viele Winkel hat, als viele ihrer Seiten sind, und daß man also die Zahl der Seiten angiebt, indem man die Zahl der Winkel nennet. Denn es wird eine jede von den geraden Linien, welche eine Figur einschliessen, eine Seite derselben Figur genennet. F. 47. F. 48. F. 49.

§. 85. Man siehet leicht ein, daß bey einer jeden geradelinichten Figur eine jede Seite, was man vor eine annehmen will, kleiner sey als die Summe aller übrigen, weil jene eine gerade Linie ist, so von der Spitze eines der Winkel der Figur an eine andere gehet, und der übrige Theil des Umkreises der Figur, indem er sich ebenfals von einem dieser Puncte nach dem andern erstrecket, sich von dieser geraden Linie entfernet. IV, 21. Die gerade Linie AB ist in allen Figuren, welche wir eben angezeiget, die kleinste unter allen, die von A nach B kan gezogen werden, und folgends kleiner als der übrige Umkreis ACB bey dem Dreyeck, ADB bey dem Viereck, AEB bey dem Fünfeck, und AFB bey dem Sechseck. Denn man kan diese Theile des Umkreises sich als gebrochene Linien vorstellen, welche von A nach B gezogen sind.

§. 86. Wir fallen demnach eben dadurch, indem wir in der Zusammensetzung der geraden Linien fortfahren, in die Betrachtung des Umkreises der Figuren, unter welchen auch krumme Linien sind, und insbesondere diejenige, von welcher gesaget worden, daß sie von der leichtesten Betrachtung nicht ausgeschlossen werden könne. IV, 32. Es heisset eine jede Figur, deren Umkreiß ganz oder zum Theil eine krumme Linie ist, eine krumlinichte Figur. Diejenige krumlinichte Figur aber, um deren Umkreiß es uns hier zu thun ist, ist nachfolgende.

§. 87. Es

§. 87. Es lieget auf einer Ebene ein Punct A, und um dasselbe herum gehet eine krumme Linie BCD dergestalt, daß alle die geraden Linien, welche man von dem Punct A bis an dieselbige ziehet, einander gleich sind. Diese krumme Linie BCD ist diejenige, von welcher wir reden, und welche auch bey Betrachtung der geradelinichten Figuren, und bey den Auflösungen der Aufgaben, so bey denselben vorkommen, überall gebrauchet wird.

IV. Abschnitt. F. 50.

§. 88. Man siehet leicht ein, wie dieselbe entstehe, und wie sie zu zeichnen sey. Man nimmet eine beständige Länge AB nach Belieben, und trägt dieselbe Länge von A in der Ebene nach allen Seiten, oder damit dieses geschehen könne, läst man das eine Ende der gedachten Länge oder Linie AB in A ruhen, die ganze Länge aber sich im Kreise herum bewegen; so beschreibt das äusserste Punct derselben B, indem es dergestalt herum fliesset, die verlangte krumme Linie BCD.

§. 89. Hieraus folgert man ohne Schwierigkeit, daß sich die Linie BCD endlich schliessen werde, und daß, so bald das fliessende Punct wieder in B gekommen, allwo es seine Bewegung angefangen, dasselbe, wenn man die Linie AB noch weiter herum drehet, wieder in seinen vorigen Weg fortgehen werde. Ist dieses geschehen, daß man die Linie ABC an ihren Anfang angeschlossen, so heisset sie der Umkreis eines Cirkels, oder auch nur schlechterdings ein Umkreis. Denn die krumlinichte Figur BCD selbst wird ein Cirkel oder eine Scheibe genennet. Ist aber die Linie BC nur bis auf einige Weite fortgeführet, und noch nicht völlig geschlossen, oder nimmet man von einem ganzen Umkreis ein Stück von beliebiger Grösse, als BC, so wird dasselbe ein Bogen genennet. Das Punct A aber von welchem der Umkreis überall gleich weit entfernet ist, heisset der Mittelpunct des Cirkels; und die gerade Linie, welche von diesem Mittelpunct bis an den Umkreis gezogen ist, AB, oder eine jede andere dergleichen, wird der Radius, oder Halbmesser genennet.

§. 90. Einerley Radius kan nicht verschiedene Umkreise beschreiben: und wenn demnach das Mittelpunct einerley bleibet, und man wolte mit eben dem Halbmesser verschiedene Umkreise beschreiben, würden sie zusammen fallen; nimmet man aber verschiedene Mittelpuncte, so werden doch die Cirkel selbst so wohl, als ihre Umkreise von einerley Grösse, die Halbmesser aber alle, die man in dergleichen Cirkeln ziehen kan, haben einerley Länge, wie man sie auch mit einander ver-

IV. Abschnitt. gleichen mag. Daß man um einen jeden gegebenen Mittelpunct in einer Ebene einen Cirkelkreis beschreiben könne, ist bereits IV, 88. mit andern Worten gesaget, und wie dieses vermittelst des bekanten Werkzeuges zu verrichten ist, ist niemanden unbewust: aufs höchste ist dasselbe ein Handgrif, welcher hier nicht darf gezeiget werden.

§. 91. Man kan vermittelst eines Cirkelkreises, welchen man beschrieben eine gerade Linie von einer gegebenen Länge nach einer jeden beliebigen Strecke, an ein gegebenes Punct legen. Denn gesetzt, es sey die gerade Linie AB gegeben, welche man aus dem Punct C auf die gerade Linie DE legen sol, so nehme man die Linie AB vor den Halbmesser, oder man fasse sie mit dem Cirkelinstrument, und beschreibe um den Mittelpunct C einen Kreis, welcher von DE das Stück CF oder CG abschneiden wird, welches der gegebenen geraden Linie AB gleich ist. Oder man beschreibe zuerst mit dem Radius AB einen Umkreis an das Punct C, an welches eine gerade Linie von der Grösse AB geleget werden sol, so kan man von C eine gerade Linie nach beliebiger Strecke bis an den Umkreis dieses Cirkels ziehen, welche allzeit der gegebenen AB gleich seyn wird. F. 51.

§. 92. Weil CF so groß ist als AB, so ist die Linie DF die Summe der beyden Linien DC und AB, und FE ist der Unterschied der beyden Linien CE und AB, und es beruhet die Addition zwoer geraden Linien, oder die Subtraction der kleinern derselben von der grössern, bloß auf demjenigen so eben gewiesen worden, wie man auf eine gerade Linie eine andere von gegebener Länge legen müsse. Man siehet aber auch hieraus, daß wenn man von dem Mittelpunct eines Cirkels an, nach den Umkreis desselben eine gerade Linie ziehet, nach welcher Strecke man wil, welche kleiner ist als der Radius, das äusserste Punct dieser geraden Linie innerhalb des Cirkels fallen müsse, und ausserhalb desselben, wenn man die also gezogene gerade Linie grösser machet als der Radius ist.

§. 93. Und diese Bestimmung der Längen solcher geraden Linien, welche von einem gegebenen Punct anfangen, ist das einzige, worzu der Umkreis des Cirkels im Anfang wird gebraucht werden, daß also hier nicht nöthig ist seine übrigen Eigenschaften zu betrachten. Doch können wir noch etwas anmerken, welches derselbe mit dem Umkreiß einer jeden andern Figur gemeinschaftlich hat, daß nemlich, wenn wir eine gerade Linie durch irgend ein Punct innerhalb des Cirkels ziehen, und

und dieselbe nach Belieben verlängern, sie den Umkreiß desselben nothwendig in zweyen Puncten schneiden müsse, denn weil sie in einem fortgehet, muß sie endlich nothwendig den Umkreis des Cirkels, wenn sie fortgezogen wird, erreichen, und denselben schneiden, und dieses zwar so wohl auf der einen als auf der andern Seite, wie dieses auch bey einer jeden andern Figur, aus eben der Ursache erfolget.

IV. Abschnitt.

§. 94. Wir setzen, daß die gerade Linie den Umkreis nothwendig zwey mal schneiden müsse, und bekümmern uns hier nicht, ob sie denselben auch noch öfter schneide oder nicht, dieses kan bey verschiedenen Figuren geschehen, und die 52 Zeichnung stellet eine Figur vor, deren Umkreis die gerade Linie A B viermal schneidet. Der Augenschein giebt es, daß dieses bey dem Cirkel nicht angehe, aber uns ist hier daran nichts gelegen: wir gebrauchen zur Zeit nichts mehr, als was wir eben gesaget, und sind um die übrigen Eigenschaften der Cirkelkreise, bis wir sie insbesondere zu betrachten anfangen, unbekümmert.

F. 52.

§. 95. Was aber die geradelinichten Figuren anlanget, so folget hieraus, daß eine gerade Linie, welche wie A B durch ein Punct innerhalb derselben gehet, wenigstens zwo Seiten derselben schneiden müsse. Denn sie muß den Umkreis zwey mal schneiden: diese Schnitte aber können nicht beyde in eine Seite fallen, weil sonst zwo gerade Linien einander zwey mal schneiden müssen: sie fallen also wenigstens in zwo Seiten.

§. 96. Zween Cirkelkreise schneiden einander nicht nothwendig. Sie haben alle beyde ihre bestimte Gränzen, über welche sie nicht kommen können. Sie können alle beyde aus einander fallen, es kan aber auch der eine ganz innerhalb des andern enthalten seyn. Aber so bald der Umkreis eines Cirkels zum Theil ausser den Umkreis eines andern fället, zum Theil aber innerhalb desselben, oder so bald der Umkreis eines Cirkels durch zween Puncte gehet, deren einer innerhalb eines andern Cirkels befindlich ist, der andere aber ausserhalb desselben, so kan es nicht anders seyn, diese Umkreise müssen einander in mehr als einem Punct schneiden. Der Cirkelkreis dessen Mittelpunct A ist, gehet durch die zween Puncte B und C, deren einer B innerhalb des andern Cirkels lieget, welcher um den Mittelpunct D beschrieben worden, der andere C aber ausserhalb desselben. Wenn man den kleinern Kreis von B anfängt, und nach C fortziehet, so muß er den grössern noth-

F. 53.

wen-

IV. Abschnitt.

wendig schneiden, weil er von innen nach aussen gehet; fähret man weiter fort ihn zu beschreiben, so gehet er wieder von dem Punct C nach B inwendig zu, damit er aber hinein kommen könne, ist es nothwendig, daß er die Gränzen des grössern Cirkels oder seinen Umkreis noch einmal durchkreutze. Es ist nichts leichter als dieses, auf die Umkreise aller Figuren anzuwenden: wovon wir aber keinen Nutzen sehen.

§. 97. Uebrigens ist bey dieser Anmerkung eben das zu sagen, so wir unlängst angeführet. Wir haben uns nicht darum zu bekümmern, ob dergleichen Umkreise einander in mehr als zween Puncten schneiden können, wie dieses bey andern Figuren geschehen kan. Denn die Umkreise der beyden Dreyecke ABC und DEF schneiden einander in sechs Puncten. Genug daß wir deutlich sehen, daß in den angezeigten Umständen wenigstens zween Schnitte nothwendig erfolgen müssen. Die übrigen alle, wenn auch die Umkreise zweer Cirkel einander in mehr als zween Puncten schneiden könten, können uns zu unserm gegenwärtigen Vorhaben nichts nützen.

F. 54.

Wie der Umkreis eines Dreyecks durch zwo Seiten bestimmet wird, die einen Winkel umschliessen.

§. 98. Nunmehro können wir uns ohne von etwas aufgehalten zu werden zur genauen Betrachtung des Umkreises der geradelinichten Figuren, und insbesondere der Dreiecke wenden, und die Aufgaben, welche bey denselben vorkommen nach und nach auflösen. Das natürlichste ist, daß wir da wieder anfangen, wo wir bey der Betrachtung der geraden Linien stehen geblieben. Die zwo geraden Linien AB und BC machen einen Winkel ABC. Man ziehe mit einer neuen geraden Linie AC, die äussersten Puncte dieser Linien zusammen, so bekommet man ein dreyeck ABC. Und, ist uns ein Winkel vorgeleget, zusamt zwoen Seiten, welche denselben Winkel in einem Dreyeck einschliessen sollen, so ist nichts leichter, als ein dergleichen Dreyeck auszumachen. Es sey dieser gegebene Winkel ABC, und die Seiten D und E. Man setze eine der gegebenen Seiten auf die Linie BA von der Spitze B nach A. Wir haben dieses mit der Linie D gethan, deren äusserstes Punct in F gefallen. Eben dieses thue man mit der zweyten Linie E, welche man ebenfals von B aus auf BC bringet, da denn ihr äusserstes Punct in G fället, und man hat die Linie BC verlängern müssen,

F. 55.

F. 56.

müssen, um die E auf selbe zu bringen. Ist dieses geschehen, so hat man nunmehro nur noch die Puncte F und G vermittelst einer geraden Linie FG zusammen zu hängen, so ist das Dreyeck FBG an dem gegebenen Winkel ABC, und aus den Seiten DE verfertiget.

IV. Abschnitt.

§. 99. Man siehet leicht, daß man mit dem gegebenen Winkel und Seiten nicht anders verfahren können, um aus denselben ein Dreyeck zu machen, als wir gethan. Die einzige Veränderung, welche zu machen wäre, ist, daß man die erstere Linie D nicht auf BA sondern auf BC, und hingegen die andere E auf BA gebracht hätte. Es ist aber sichtlich, daß dadurch kein anderes Dreyeck heraus gebracht worden wäre, als, welches wir eben gemacht, nur wäre dasselbe verkehrt zu liegen kommen. Sonst aber kan man nichts verändern, IV, 22. und es werden also die Dreyecke die man nach dieser Art verfertiget, alle einerley, nur können sie verkehrt zu liegen kommen, das ist, die gerade Linie FG wird beständig so groß als in unserer Figur, und es behalten auch die Winkel bey F und G ihre Grösse, so lang der Winkel bey B, und die Seiten BF, BG einerley bleiben, ob zwar, wenn man BG der D, und BF der E gleich genommen hätte, der Winkel F unten an statt G, und G an statt F oben gefallen wäre. Hievon werden wir uns nach diesem noch deutlicher überzeugen.

§. 100. Der Winkel bey B kan so groß oder so klein seyn als er will, und die Seiten D und E können ebenfals von nur beliebiger Länge gegeben werden, ohne daß zu befürchten wäre, daß man hernach aus demselben Winkel und Seiten das Dreyeck nicht ausmachen können solte. Denn es wird, so bald als die Linien BF, BG richtig gesetzet worden, hernach zur gänzlichen Verfertigung des Dreyeckes nichts anders erfordert, als daß man die gerade Linie FG ziehe. Eine gerade Linie aber kan zwischen jeden zwey Puncten gezogen werden, wie sie auch liegen mögen.

§. 101. Ist es aber erlaubt den Winkel bey B anzunehmen von was vor Grösse man wil, so kan man ihn gerade, spitzig und stumpf nehmen. Thut man das erste, und nimt vor B einen geraden Winkel an, so bekommet man ein Dreyeck, in welchem ein gerader Winkel enthalten ist, dergleichen FBG in der 57 Figur ist. Nimmet man aber vor B einen stumpfen Winkel, so erhält man ein Dreyeck in welchem ein stumpfer Winkel vorkommt, als FBG in der 58 Figur.

F. 57.

F. 58.

IV. Abschnitt.

§. 102. Die erste Art der Dreyecke, in welchen nemlich ein gerader Winkel vorkommt, die übrigen Winkel mögen beschaffen seyn wie sie wollen, heissen rechtwinklichte Dreyecke, und die andere Art, in welchen ein stumpfer Winkel befindlich ist, werden stumpfwinklicht genennet, ohne daß man sich auch hier um die Grösse der übrigen Winkel zu bekümmern nöthig habe.

§. 103. Wenn man aber vor den Winkel bey B einen spitzigen Winkel nimt, so wird das Dreyeck, welches da heraus kommt, derowegen nicht spitzwinklicht müssen genennet werden; denn man pflegt nicht alle Dreyecke so zu nennen, welche einen spitzigen Winkel haben, sondern es müssen alle Winkel eines Dreyecks spitzig seyn, wenn es diesen Namen eines spitzwinklichten Dreyecks bekommen sol, oder es muß in einem spitzwinklichten Dreyeck weder ein gerader noch ein stumpfer Winkel vorkommen, weil man es sonst mit dem erst angezeigten Namen eines geradewinklichten oder stumpfwinklichten Dreyecks belegen würde. Nimmet man aber gleich den Winkel bey B spitzig, so folget daraus nicht nothwendig, daß die Winkel bey F und G auch spitzig fallen müssen. Und also kan es seyn, daß ein Dreyeck, dessen Winkel bey B spitzig genommen worden, bey F oder G einen geraden oder stumpfen Winkel bekommt, nachdem nemlich die Seiten BF und BG angenommen werden. Denn von der Grösse dieser Seiten hänget die Grösse derer Winkel bey F und G, in dem vorhabenden Fall, lediglich ab.

§. 104. Da aber auch die Seiten BF, BG in allen Arten der Dreyecke nach Belieben angenommen, und verlängeret werden können: so siehet man erstlich, daß man sie so weit verlängern könne, daß hernach die dritte Seite FG ein jedes Punct einschliesse, so innerhalb des Winkels ABC gegeben seyn mag, wo man wil. Es sey das Punct H, innerhalb des Winkels ABC aber ausserhalb des Dreyecks FBG gegeben. Man verlängere die Seiten BF, BG in Gedanken, und entferne mit den Puncten F und G auch die Seite FG immer weiter von der Spitze B. Da nun das Punct H seine Lage behält, FG aber immer weiter auswärts gebracht wird: so muß endlich diese Seite sich so weit von B entfernen, daß sie ausser H vorbey gehet, und also dieses Punct, wie in der 57, 58, 59 Zeichnung, in das Dreyeck einschliesset.

F. 56.

F. 57. 58. 59.

§. 105. Ist dieses geschehen, und man ziehet durch das dergestalt

eingeschlossene Punct H eine gerade Linie wie man wil; so muß dieselbe nothwendig zwo Seiten des Dreyecks FBG schneiden. IV, 93. Diese geschnittene Seiten können seyn FB und BG oder FB und FG, oder BG und FG; und also ist unter denselben allezeit wenigstens eine der zwo Seiten FB, BG, die den Winkel B einschliessen, in welchen man das Punct H gesetzt hatte. Eine gerade Linie also, welche man durch ein Punct H innerhalb eines Winkels FBG ziehet, nach welcher Seite man wil, schneidet allzeit wenigstens eine der Seiten dieses Winkels FB oder BG, wenn man nemlich beydes, so wol diese Seiten als auch die durch H gezogene gerade Linie, so weit als nöthig ist, verlängert.

IV. Abschnitt.

§. 106. Zweytens kan man auch die nach Belieben anzunehmende Seiten BF, BG einander gleich machen. In diesem Fall entstehet ein Dreyeck, welches gleichschenklicht genennet wird, dergleichen ist FBG in der 59 Figur, in welchem FB=BG. Der Winkel B kan hier ebenfals angenommen werden, wie man wil, und also spitzig, gerad oder stumpf, und kan also ein gleichschenklichtes Dreyeck zugleich geradewinklicht oder stumpfwinklicht seyn.

F. 59.

§. 107. Was aber die Grösse der Seite FG in einem gleichschenklichten Dreyecke anlanget, so wird diese Seite länger oder kürzer, nachdem man den Winkel B mehr oder weniger öfnet, welche Seite demnach von gar verschiedener Grösse seyn kan. Ist nemlich der Winkel B in einem gleichschenklichten Dreyeck erstlich sehr spitzig und ungemein klein, so ist die Seite FG fast von gar keiner Länge: öfnet sich der Winkel je mehr und mehr, so wird auch die Seite FG je grösser und grösser, bis, wenn der Winkel B so groß geworden, als er nur werden können, die Seite FG fast doppelt so groß ist, als einer von den Schenkeln BG oder BF. Grösser kan die Seite FG nicht werden. Man siehet leicht, da auf diese Art durch beständige Oefnung des Winkels B, die Seite FG fast von nichts, bis fast zu der Grösse erwachsen kan, daß sie zwey mal so groß wird, als BF oder BG, daß darunter auch eine Grösse des Winkels B seyn müsse, bey welcher FG der Seite BF=BG eben gleich ist. Die 61 Figur stellet ein dergleichen Dreyeck vor: und weil in demselben FG so groß ist als BF, diese BF aber gleich Anfangs so groß angenommen worden als BG, so sind in demselben alle Seiten einander gleich. Ein dergleichen Dreyeck aber in welchem alle Seiten einander gleich sind, heisset ein gleichseitiges Dreyeck.

F. 60.

F. 61.

IV. Abschnitt. F. 62.

§. 108. Um aber wieder auf die Dreyecke zu kommen, in welchen die zwo Seiten BF und BG ungleich gemacht worden sind; so wird in einem solchen Dreyeck, wenn man den Winkel bey B so klein annimmet als er nur seyn kan, die Seite FG fast der Unterschied der zwo Seiten BF und BG, oder FG ist gar nicht viel von dem Ueberschuß der grössern, der zuerst angenommenen Seite BG über die kleinern BF, unterschieden. Denn BFG ist in diesem Fall fast eine gerade Linie, welche auf die BG fället. Wäre aber dieses, und fiele BFG auf BG, so wäre FG der wahrhafte Ueberschuß der grössern Linie BG über die kleinern BF. Machet man so dann den Winkel B immer mehr und mehr auf, so wird auch FG grösser und grösser, bis endlich, nachdem man B so groß gemacht, als nur möglich ist, die Seite FG fast den beyden Seiten BF und BG zusammen gleich geworden, und wächset also durch diese Oefnung des Winkels B die ihm entgegen gesetzte Seite FG, von dem Unterscheide der beyden Seiten BF, BG, bis fast auf die Summe derselben.

§. 109. Dieses kan man sehr deutlich einsehen, wenn man sich vorstellet, daß an die gerade Linie BG die Linie BF = von beliebiger Länge dergestalt gesetzt sey, daß sie sich um das Punct B drehen lässet, wodurch der Winkel B nach und nach geöfnet oder vergrössert werden kan, und daß um G eine andere gerade Linie GH von genugsamer Länge auf eben die Art beweget werden könne. Man bringe BF erst fast ganz auf BG, und lege GH durch das Punct F derselben: So dann öfne man den Winkel B nach und nach, neige aber dabey die Linie GH dergestalt, daß sie beständig durch das Punct F der vorigen BF gehe, und mit derselben das Dreyeck FBG einschliesse.

§. 110. Es kan nicht anders seyn, es müssen unter diesen Oefnungen des Winkels B sehr viele, ja die allermeisten seyn, bey welchen FG weder der BF noch der BG gleich ist; und ist dieses, so sind in einem solchen Dreyeck alle Seiten ungleich, weil wir die beyden Seiten BF, BG gleich Anfangs ungleich angenommen haben. Ein dergleichen Dreyeck, welches keine einzige Seite hat, die einer andern Seite eben desselben Dreyecks gleich wäre, heisset ein **ungleichseitiges Dreyeck**.

F. 63.

§. 111. Wir haben bereits IV, 99. gesehen, daß wenn man zwey Dreyecke ABC, und abc nach der Art, die wir betrachten, aus einerley Winkel und Seiten zusammen setzet, dieselbe Dreyecke in keinem

nem Stück verschieden seyn können: und dieses daher erwiesen, weil man in dieser Art Dreyecke zusammen zu setzen nichts verändern kan. Wir haben aber auch einen deutlichern Beweiß davon versprochen, welchen wir nunmehro geben, und zu dem Ende unsern Satz etwas umständlicher ausdrücken wollen.

§. 112. Jede zwey Dreyecke ABC und abc, bey deren ersteren wir einen Winkel B antreffen, welcher einem Winkel des andern Dreyecks b gleich ist, und zwo Seiten BA, BC, welche den Winkel B einschliessen, die den Seiten ba, bc des Winkels b in dem zweyten Dreyecke gleich sind, AB nemlich = ab, und BC = bc, Jede zwey dergleichen Dreyecke, sage ich, sind von einander gar nicht unterschieden, weder in der Grösse der übrigen Seiten AC, ac noch in der Grösse der übrigen Winkel A, a und C, c wenn man nur in Acht nimmet, keine andere Winkel mit einander zu vergleichen, als, die zwischen gleichen Seiten liegen; noch sind die Dreyecke selbst von verschiedener Grösse, sondern es ist AC = ac, A = a, C = c und das Dreyeck ABC gleich dem Dreyecke abc.

§. 113. Der Grund, woraus wir dieses nunmehro schliessen wollen, ist die so gar gemeine und vollkommen überzeugende Art, ausgedehnte Dinge mit einander zu vergleichen, indem man sie auf einander passet, welcher IV, 42. bey geraden Linien und Winkeln bereits gebrauchet worden, und welcher sich nicht weniger auch auf die ebenen Flächen schicket. Denn wer wil zweifeln, daß diejenige ebene Figuren gleich seyn, welche dergestalt auf einander gelegt werden können, daß ihre Gränzen zusammen fallen. Sie fallen in diesen Umständen ganz und gar auf einander, und machen eine einzige Figur aus, eben wie zwo gleiche gerade Linien zusammen fallen, wenn man eine derselben zwischen die äusserste Puncte der andern leget. Um nun diesen Grundsatz anzuwenden, müssen wir unsere Dreyecke ABC und abc vergleichen und zeigen, daß wenn man eines derselben aus dem Papier ausschnitte, und würklich auf das andere brächte, allerdings seine Gränzen oder sein Umkreis in allen Stücken, mit dem Umkreis des andern überein kommen würde Denn man hat eben nicht nöthig würklich ein dergleichen Dreyeck auszuschneiden und auf das andere zu legen, wiewohl es eben nicht schaden könte, wenn es jemand, alles desto deutlicher einzusehen, thun wollte.

IV. Abschnitt. §. 114. Man stelle sich also vor, daß man das Dreyeck abc von seiner Stelle wegnehmen und auf das andere ABC bringen wolle, aber man verfahre darinnen ordentlich. Erstlich lege man die Spitze des Winkels b, von welchem man zum Grund gesetzet, daß er dem Winkel B gleich sey, auf die Spitze dieses Winkels B. Hernach schiebe man das Dreyeck bca so lang herum, bis daß die Linie bc auf die Linie BC zu liegen komme. So bald man dieses erhalten, wird sich auch c auf C, und ba auf BA befinden. Denn die Linie bc ist der Linie BC gleich. Wenn aber gerade Linien, die gleich seyn, auf einander geleget werden, und beide von einem Punct anfangen, so fallen dieselbe ganz zusammen, und endigen sich in einem Punct.

Ferner ist der Winkel b dem Winkel B gleich. Wenn gleiche Winkel mit ihren Spitzen zusammen fallen, und eine Seite des einen kommt mit einer Seite des andern überein. So fallen auch die übrigen Seiten zusammen. Das erste ist geschehen. Die Spitze c ist auf C, bc auf BC gebracht worden, also ist auch ba auf BA gefallen, das ist, das Punct a ist nicht ausser der Linie BA. Weil aber auch ba der BA gleich ist, und jene auf diese so geleget worden, daß sie beyde von dem Punct B anfangen, so endigen sie sich wieder in einem Puncte, und fällt also a auf A. Demnach fallen die Grenzen des Dreyecks abc von dem Punct c an durch b bis nach a, auf die Gränzen des Dreyecks ABC, die mit eben den Buchstaben bezeichnet sind, und bleibt nichts übrig als die gerade Linie ac, welche noch nicht betrachtet worden. Allein mit dieser hat es nunmehro wenige Schwierigkeit. Sie liegt zwischen den Puncten a und c, welche auf die Puncte A und C fallen, es kan also nicht anders seyn, sie muß nunmehro zwischen den Puncten A und C liegen, und also mit der geraden Linie AC zusammen fallen. Also sind die geraden Linien ac und AC einander gleich, denn ihre äusserste Puncte fallen zusammen. Also ist der Winkel A dem Winkel a gleich, denn die Seiten, welche diesen Winkel einschliessen, liegen ebenfalls auf einander, und eben so ist es mit den Winkeln C, c beschaffen. Und der ganze Umfang des Dreyecks abc, mit dem Umfang des Dreyecks ABC, zusammen gefallen, so müssen auch die Flächen der Dreyecke selbst gleich seyn.

§. 115. Dieser und einige folgende dergleichen Sätze, welche von der Gleichheit der Seiten und Winkel in verschiedenen Dreyecken handeln, sind von ungemeinem Nutzen. Fast alles, so in der Geometrie

zu zeigen ist, gründet sich darauf, ja wenn man die Wahrheit sagen sol, der rechte Verstand von diesen Kleinigkeiten und die Fertigkeit dieselbe überall geschickt anzuwenden, machen einen grossen Theil von demjenigen aus, welches ein Geometra einsehen muß, wenn er diesen Titul mit Recht verdienen wil. Wir müssen uns noch etwas bey diesem Satz aufhalten, und ihn auf eine besondere Art von Dreyecken anwenden.

IV. Abschnitt.

§. 116. Gesetzt es seyen zwey Dreyecke, wie wir sie eben betrachtet, gleichschenklicht, nemlich AB sey der Seite BC, und ab der bc gleich, das übrige aber bleibe, wie wir es eben gesetzet. Es sey nemlich der Winkel B dem Winkel b gleich, und BA der ba, denn mehr haben wir nicht nöthig zu setzen, weil aus diesem vor sich folget, daß auch BC der bc gleich sey. So müssen erstlich wie vorher die Winkel A und a, C und c, die Seiten AC und ac, und die Dreyecke selbst gleich seyn. Aber es folget hier auch etwas mehrers. Weil BA = ba, und ba = bc, das ist, weil jede der zwo Seiten BA und bc der Seite ba gleich ist, so ist auch BA der Seite bc gleich, und aus eben dem Grund ist auch BC = ba. Demnach da jederzeit in den Dreyecken unter den Umständen, welche wir gegenwärtig betrachten, die Winkel gleich sind, welche zwischen gleichen Seiten liegen, so muß auch der Winkel C dem Winkel a gleich seyn. Da nun also beständig A = a, hier aber auch C = a, so sind hier die Winkel A und C beide einem dritten gleich, und es müssen demnach diese Winkel A und C mit einander verglichen, ebenfalls gleich seyn, nemlich A = C.

F. 64.

§. 117. Dieses ist ein neuer Satz. Ein jedes geradschenklichtes Dreyeck kan man, wie hier mit zweyen geschehen, mit sich selber vergleichen: oder wenn man ja wil, so kan man sich vorstellen, daß abc ein Abdruck von dem Dreyeck ABC sey, und einen dergleichen Abdruck kan man in Gedanken von einem jeden Dreyecke machen. Die eben gebrauchte Schlüsse können demnach bey einem jeden gleichschenklichten Dreyeck angebracht werden, und es folget überall, daß die zween Winkel A und C, welche an den gleichen Seiten BA und BC (nicht zwischen denselben) liegen, einander gleich seyn. Oder da man die dritte Linie des Dreyecks AC, welche ausser den zwo gleichen Seiten BA und BC in demselben befindlich sind, insgemein die Grund-Linie des gleichschenklichten Dreyecks zu nennen pflegt; so kan man diesen allgemeinen Satz kurz also verfassen: In einem jeden gleich-

schenk-

IV. Abschnitt.

schenklichten Dreyeck sind die Winkel an der Grund-Linie einander gleich.

§. 118. Aber auch hier kan uns die natürliche Einsicht in einem Blick dazu führen, worzu wir durch gekünstelte Vernunfts-Schlüsse langsam gelanget. In einem gleichschenklichten Dreyeck ist alles auf einer Seite wie auf der andern. Die Seite AB ist der Seite BC eben so wohl gleich als BC der AB gleich ist, und AC liegt zwischen AB und CB auf einerley Art. Warum solte also der eine der beiden Winkel A und C grösser seyn als der andere. Man versuche es den einen grösser zu setzen, und wehle unter beiden zu welchem man gläubt Recht zu haben. Die Ohnmöglichkeit, welche man finden wird sich zu etwas zu entschliessen, wird den Satz gnugsam beweisen.

F. 61. §. 119. Ist demnach ein Dreyeck gleichseitig, oder sind in einem Dreyeck alle drey Seiten einander gleich, so müssen auch alle drey Winkel desselben gleich seyn. BGF sey ein dergleichen Dreyeck. Aus der Gleichheit der Seiten BF und FG folget das B = G. Weil aber ferner auch die Seite BF der Seite BG gleich ist, so muß auch der Winkel F dem Winkel G gleich seyn. Und eben so ist, wegen der Gleichheit der Seiten BG und FG, auch B = F: das ist jede zween Winkel, wie man sie auch mit einander vergleichen wil, sind einander gleich. Und warum solte auch der erste grösser seyn, als der zweite, oder der dritte, da die den Winkeln entgegen gesetzte Seiten, einander gleich sind. Man frage sich wieder, wenn man zweifelt, ob die Winkel gleich seyn, welcher wohl von allen der gröste sey? Die Ohnmöglichkeit der Antwort wird an statt eines Beweises seyn. Denn ist nichts, welches uns dahin bringen kan, daß wir einen oder den andern der Winkel vor den grösten halten, so ist auch nichts, welches verursachen könte, daß einer würklich grösser als der andere wäre.

Der Umkreis eines Dreiecks wird durch zween Winkel und der einen Seite bestimmet.

§. 120. Es lässt sich der Satz, welchen wir bisher betrachtet, und aus welchen wir verschiedene Eigenschaften der Dreyecke hergeleitet haben, umkehren. Wir haben gesetzet, daß in den Dreyecken ABC und abc, die Winkel B und b, wie auch die Seiten AB und ab, BC

F. 65. und bc einander gleich seyn, und daraus geschlossen, daß auch die Sei-

Seite AC der ac, der Winkel BAC den Winkel a, und der Winkel C dem Winkel c gleich seyn müsse. Es ist aber auch umgekehrt richtig, daß, wenn die Seite AC der Seite ac gleich ist, und der Winkel BAC dem Winkel a, wie auch C dem c, auch die übrigen Winkel B und b einander gleich seyn werden, wie auch AB = ab, und BC = bc. Das ist, wenn in zwey Dreyecken ABC und abc zween Winkel gleich sind, A dem a, und C dem c, und es sind auch die Seiten AC und ac gleich, die zwischen diesen Winkeln liegen, so sind auch die übrigen Winkel B und b gleich, und die Seiten die zwischen gleichen Winkeln liegen, woraus, wie vorher die Gleichheit der Dreyecke selbst erhellet.

§. 121. Der Beweiß hiervon lässt sich gar leicht geben. Es wird gesetzet, daß der Winkel c dem Winkel C gleich sey. Man bringe in Gedanken den Winkel c auf C, so nemlich, daß die Spitzen dieser Winkel in C zusammen fallen, und daß die Seiten ca auf CA und cb auf CB fallen, welches bey gleichen Winkeln allezeit geschehen kan: weil nun ca der CA gleich angenommen worden, so wird dadurch auch das Punct a auf A gebracht. Nun ist entweder cb der CB gleich oder nicht. Ist das erstere, wie es in dem Satz als richtig angegeben worden, so ist kein Zweifel übrig, daß das Dreyeck ABC dem Dreyeck abc in allen Stücken gleich sey. Denn in diesem Fall werden in diesen Dreyecken gleiche Winkel c und C von gleichen Seiten AC = ac, und BC = bc eingeschlossen. Alleine weil eben dieses zu beweisen ist, daß BC = bc, so kan man es so schlechterdings nicht annehmen. Wir wollen also setzen, bc sey nicht so groß als BC, sondern grösser oder kleiner, und sehen, ob dieses bestehen könne, und ob es nichts widersprechendes in sich hält. Denn ist dieses, so kan bc der BC ohnmöglich ungleich seyn.

§. 122. Ist aber bc der BC ungleich, so kan das Punct b, nachdem man den Winkel acb auf den Winkel ACB gebracht, ohnmöglich in B fallen, sondern muß irgendwo ausser B, in D, zum Exempel, zu liegen kommen. Man nehme dieses an, und ziehe AD. Weil nun in den Dreyecken ABC und abc, c = C, AC = ac, und über dieses gesetzt wird CD = bc, so muß man schliessen, daß auch der Winkel DAC dem Winkel bac gleich sey IV, 112. Es war aber auch BAC = bac, derowegen sind die Winkel DAC und BAC beide einem dritten Winkel bac gleich, und also ist DAC = BAC. Dieses ist widersin-

 sinnisch. Wenn D in der Linie BC ausser B fällt, so ist der Winkel DAC nothwendig entweder grösser oder kleiner als der Winkel BAC, und können also diese Winkel ohnmöglich gleich seyn. Also ist dasjenige falsch, woraus geschlossen worden, daß D ausser B falle, das ist, es ist falsch, daß bc der BC ungleich sey. Also sind diese Linien gleich, woraus, wie wir schon gesehen, die gänzliche Gleichheit der Dreyecke abc und ABC, bey welchen C = c und BC = bc, wie auch AC = ac, nach dem Satz folget, welchen wir jetzo verkehret haben.

§. 123. Es ist in dem Beweiß hoffentlich keine Schwierigkeit, und der Satz selbst desto leichter zuzugeben, weil er auch daraus erhellet, daß in einem Dreyecke sich keine Seite verändern lasse, wenn man nicht auch die ihm entgegen gesetzte Winkel ändert, welches wir oben IV, 108. angemerket. Sind nun also in dem Dreyecke BAC, die Seite AC und der Winkel C von bestimmter Grösse, wie wir dieses angenommen haben, indem wir gesetzet AC sey = ac, und C = c, so kan man zwar an statt der Seite AB, sich eine andere Seite AD vorstellen, welche machet, daß CD länger oder kürzer sey als CB: aber es wird damit auch der Winkel BAC verändert, und man bekommet an statt desselben DAC. Soll der Winkel BAC unverändert bleiben, so muß auch die Seite BC bleiben wie sie ist. Kan aber bey unveränderter Seite AC und bey unveränderten Winkeln C und BAC die Seite CB nicht grösser oder kleiner werden, so kan auch in dem Dreyecke abc bey den oft wiederholten Bedingungen cb nicht grösser oder kleiner seyn als CB.

§. 124. Auf eben die Art können wir auch schliessen, wenn zum Grunde gesetzet wird, daß in den Dreyecken ABC und abc die Seiten AC und ac, und die Winkel c und C einander gleich sind, wie auch der Winkel ABC, dem Winkel b, daß auch die übrigen Seiten AB und ab, wie auch BC und bc und die Winkel BAC und a gleich seyn werden. Es ist dieser Satz von dem letzten darinen unterschieden, daß wir hier nicht annehmen, daß die Seiten AC, ac von welchen als bekannt angenommen wird, daß sie gleich seyn, zwischen den beyden Winkeln liegen, deren Gleichheit in den beyden Dreyecken voraus gesetzet wird. Sondern es ist hier die Rede von solchen Winkeln b und c, oder C und ABC, deren einer der Seite ac oder AC entgegen stehet.

§. 125. Da der Beweiß dieses Satzes von dem Beweiß des vorigen

rigen wenig unterschieden ist, so kan er desto kürzer gefasset werden. Man bringe den Winkel c auf den Winkel C, welcher ihm gleich ist, und ac auf AC, so wird a in A fallen, und weil cb auf CB gebracht worden, so fällt b entweder in B, oder ausser dieses Puncts in D. Man nehme das letztere an, und ziehe AD. Weil nun in den Dreyecken ACD und acb die Winkel C, c gleich sind, und die Seiten die diese Winkel einschliessen AC = ac, und DC = bc, so müssen auch die Winkel ADC und b gleich seyn. IV, 112. Nun ist b = ABC, also auch ADC = ABC. Wir wissen aber, daß dieses falsch sey. Denn sind die Winkel ADC und ABC einander gleich, so sind die Linien DA und BA parallel, und laufen nicht zusammen: IV, 48. und es ist ohnmöglich, daß von einer geraden Linie BC zwo andere gerade Linien DA und BA nach einem Punct A solten können gezogen werden, welche mit der BC zween gleiche Winkel ABC und ADC machten, die beyde nach einer Seite gerichtet sind. IV, 47. Also ist es falsch, daß das Punct b ausser B in D fallen könne. Folgends fällt es in B, und es ist demnach die Seite cb der Seite CB gleich, weil jene auf diese passet. Und da also c = C, und AC = ac, aber auch cb = CB, so sind die Dreyecke ABC und abc wiederum in allen Stücken gleich. Der Winkel BAC nemlich dem Winkel a, und die Seite AB der Seite ab, wie auch BC = bc, und der Raum, welchen die Seiten AB, BC, AC beschliessen, dem Raum, welcher von ab, bc, ca, beschlossen wird.

IV. Abschnitt.

§. 126. Man kan diese zween Sätze in einen bringen, und überhaupt sagen, daß, wenn man zwey Dreyecke hat, ABC und abc, und es ist eine Seite des einen AC einer Seite des andern ac gleich, und von zween Winkeln, welche in dem ersten Dreyeck ABC in Ansehung der AC auf gewisse Art liegen, so ist ein jeder einem Winkel des Dreyecks abc gleich, welcher in Ansehung der Seite ac eben so lieget; so sind die Dreyecke selbst in allen Stücken, welche wir eben erzehlet haben, gleich. Man verstehet aber darunter, wenn man saget, daß die Winkel in Ansehung der AC auf gewisse Art liegen sollen, nichts anders, als daß sie entweder der AC entgegen gesetzet seyn, wie ABC, oder an derselben dergestalt liegen sollen, daß diese AC eine Seite derselben abgiebt. ABC lieget in Ansehung der AC wie b in Ansehung der ac lieget, und dieses ist auch von den Winkeln BAC, und a, wie auch von C und c richtig.

§. 127. Sehen wir auch hier besondere Arten von Dreyecken an,

IV. Abschnitt.

F. 64.

wie dieses bey dem Satze geschehen, da wir die Dreyecke, in welchen gleiche Winkel von gleichen Seiten beschlossen werden, verglichen, so können wir auf eben die Weise als daselbst IV, 116. geschehen, einige Eigenschaften dieser Dreyecke heraus bringen. Wir stellen uns zuerst zwey Dreyecke vor ABC und abc, in welchen nicht nur die Seiten AC und ac einander gleich sind, wie auch die Winkel A = a, und C = c, wie wir dieses bis anhero angenommen haben, sondern wir setzen auch, daß die Winkel A und C, wie auch a und c einander gleich sind. Dadurch werden die vier Winkel, A C, a c einander alle gleich gesetzt, und man kan auch sagen, es sey A = c, und C = a. Aus dem erstern nun, nemlich AC = ac, und A = a, wie auch C = c, folget, daß B = b, AB = ab, und daß die Seite BC der Seite bc gleich sey, weil diese Seiten zwischen den gleichen Winkeln liegen. Aus dem letztern aber AC = ac, und A = c, C = a folget ausser besagter Gleichheit der Winkel B und b, auch, daß AB = bc, und BC = ab, weil nunmehro dieses die Seiten sind, welche zwischen den gleichen Winkeln enthalten sind. Es sind demnach jede zwo der vier Seiten AB, BC, ab, bc, einander gleich, wie man sie auch mit einander vergleichen will, und demnach ist auch AB = BC. Oder etwas deutlicher, es ist AB = ab, als welches zuerst gewiesen worden, aber auch BC = ab, folgends sind die zwo Seiten AB, BC einer dritten Seite ab gleich, welches nicht seyn könte, wenn nicht AB der BC gleich wäre.

§. 128. Es folget demnach die Gleichheit der Seiten AB und BC in einem jeden Dreyecke, aus der Gleichheit der Winkel, welche an denselben Seiten liegen: denn man kan ein jedes dergleichen Dreyeck eben so mit sich selbst vergleichen, wie wir ABC mit abc verglichen haben, oder man kan sich vorstellen, daß abc ein Abdruck des Dreyecks ABC sey, welcher geblieben, nachdem erstlich ABC auf abc gelegen, und hernach von dannen hinweg in seinen vorigen Ort gebracht worden. Und in der That, da in dem Dreyeck ABC die Winkel A und C gleich zu seyn gesetzet werden, von der Grösse aber dieser Winkel die Grösse der gegen übergelegenen Seiten AB, und BC lediglich abhänget, nachdem einmal die Seite BC von bestimmter Grösse angenommen worden: wie ist es möglich, daß eine dieser Seiten AB, BC grösser oder kleiner seyn solte, als die andere? welche ist die grössere und welche ist die kleinere?

§. 129. Es sind demnach alle Dreyecke welche zween gleiche Win-

Winkel haben, gleichschenklichte Dreyecke, und die Linie AC, welche zwischen den zwey gleichen Winkeln A und C lieget, ist ihre Grundlinie. Sind aber in einem Dreyeck alle drey Winkel einander gleich, so muß dasselbe auch aus lauter gleichen Seiten bestehen, oder es muß gleichseitig seyn. Denn gesetzet, es sey in dem Dreyeck FBG der Winkel F = B, und B = G, woraus denn folget, daß auch F dem G gleich sey, so kan man aus dem erstern F = B schliessen, es sey FG = BG, aus dem zweyten B = G folget, daß FB = FG und aus dem dritten F = G, es sey auch BG = FB, welches zwar auch aus dem vorigen erhellet. Denn ist BG = FG und FG = FB, so ist auch nothwendig BG = FB.

F. 61.

Ein Dreyeck aus drey gegebenen Seiten zusammen zu setzen.

§. 130. Und also hätten wir die Dreyecke auf einer Seite angesehen, wie sie nemlich aus einem Winkel und zwo Seiten, die den Winkel einschliessen, erzeuget werden. Wir gehen weiter und sehen, wie ein Dreyeck aus drey gegebenen geraden Linien A, B und C, so seine Seiten abgeben sollen, zusammen zu setzen sey.

F. 66.

§. 131. Aus demjenigen, so bereits gesaget worden, IV, 85. 108. siehet man so gleich, daß dieses nicht mit jeden gegebenen drey Linien angehe. Es müssen jede zwo der gegebenen Seiten grösser seyn als die dritte. Das ist, A + B grösser als C; A + C grösser als B, und B + C grösser als A. Oder eine jede Seite, welche man nehmen will, muß kleiner seyn, als die Summe der beyden übrigen, und grösser als ihr Unterschied. Diese letztere Einschränkung scheinet uns bequemer als die erstere, und wir wollen uns also an dieselbe halten, ob man sich zwar gemeiniglich der erstern bedienet. Sie fliesset aus denselben, wie man leicht sehen wird, wenn man sich die Mühe geben will etwas nachzudenken.

§. 132. Fehlen die drey gegebenen Seiten wieder diese Bedingung nicht, und ist würklich eine derselben grösser als der Unterscheid der beyden übrigen, und kleiner als ihre Summe; so kan aus denselben allezeit ein Dreyeck zusammen gesetzet werden; und man darf nur auf die nachfolgende Anweisung Acht haben, wenn man sich davon überführen will. Wobey noch zu erinnern ist, daß die Dreyecke, von welchen die Rede seyn wird, zwar aus den Seiten A, B, C zu-

IV. Abschnitt.

sammen gesetzet sind, aber die Ordnung dieser Seiten auf alle mögliche Arten verändert worden, so daß wir bald A, bald B, bald C die erste Seite nennen, und so die zweyte und die dritte. Welches in der Anwendung selbst keine Schwierigkeit machen kan.

F. 67. 68. 69. 70.

§. 133. Man mache die gerade Linie AB der ersten der gegebenen Seiten gleich, und beschreibe um das Punct A einen Cirkelkreis, dessen Radius der zweyten der gegebenen Seiten gleich sey. Wenn man nun die AB, so oft dieses nöthig ist, zu beyden Seiten bis an diesen Umkreis in C und D verlängert, so ist allezeit BD = DA + AB die Summe der ersten und zweyten Seite; und CB = AB − AC oder AC − AB ist der Unterschied derselben. IV, 92. Man beschreibe um B ebenfals einen Cirkelkreis, dessen Radius die dritte der gegebenen Seiten sey. Weil nun diese dritte Seite kleiner ist als die Summe der beyden ersteren, das ist kleiner als DB, so schneidet dieser Umkreis die gerade Linie DB bey E innerhalb dem Puncte D, und also fället ein Theil des um B beschriebenen Umkreises innerhalb den vorigen, welcher um A beschrieben worden. Und weil eben diese dritte Seite, mit welcher der Cirkelkreis um B beschrieben worden, grösser ist als der Unterschied der beyden erstern Seiten AB − AC, oder AC − AB mit einem Worte BC, so siehet man, daß in allen Fällen ein Punct dieses Umkreises, nemlich F, in welchem derselbe die verlängerte AB nochmals schneidet, ausser den um A beschriebenen Umkreis fallen müsse. Demnach schneiden die beyden Umkreise einander irgendwo, als in G. Man bemerke dieses Punct, und ziehe von demselben die geraden Linien GA, GB nach A und B. Diese werden mit der zuerst angenommenen AB ein Dreyeck GAB machen, welches aus den drey gegebenen Seiten A, B, C zusammen gesetzet ist.

§. 134. Die Sache ist leicht einzusehen. Die Seite AB ist selbst die gegebene erste Seite. Die Seite AG aber ist ein Radius des um das Punct A beschriebenen Circulkreises, und folgends so groß als AC, welches ein Radius eben dieses Kreises ist. AC aber ist so groß als die zweyte der gegebenen Seiten, und demnach auch AG so groß als diese zweyte Seite. Und eben so ist es mit der BG welche ein Radius des andern Cirkels ist, welchen man um das Punct B mit dem Radius BE beschrieben, daß also nothwendig BG der dritten der gegebenen Seiten gleich ist, und man hat also würklich das Dreyeck ABG aus den drey Seiten gemacht, welche zu dessen Verfertigung gegeben worden.

§. 135. Wir

§. 135. Wir haben zu diesem Satz vier Figuren gezeichnet, um die verschiedenen Fälle deutlich vor Augen zu legen, welche bey der Zusammensetzung eines Dreyecks aus seinen Seiten vorkommen können, und welche aus der Grösse der gegebenen Seiten fliessen, und aus der Ordnung, in welcher man dieselbe zusammen setzet. Denn AB ist bald die grösseste der Seiten, bald eine von den kleinern, und so ist es auch mit den übrigen. Es fällt demnach das Punct E entweder zwischen A und B, oder zwischen A und D. Denn über D kan es niemals hinaus fallen, wie wir gesehen haben, und C fällt wieder entweder zwischen A und B, oder zwischen B und F, und kan niemals weiter als F nach dieser Seite liegen: weil eben dasjenige auf der einen Seite von dem Puncte C richtig seyn muß, was auf der andern von dem Puncte E statt hat. Diese verschiedene Lagen stellen die vier Zeichnungen vor, die zu diesem Satz gehören.

IV. Abschnitt.

§. 136. Man siehet übrigens leicht, daß wenn einem nur um die Verfertigung des Dreyecks zu thun ist, man eben nicht nöthig habe die Umkreise der Cirkel, welche zu beschreiben angewiesen worden sind, ganz auszumachen. Man siehet das Punct, wo diese Kreise einander schneiden werden, leicht ohngefehr zum voraus, und man darf also nur an statt der ganzen Umkreise, mit eben den Oefnungen, mit welchen diese zu beschreiben waren, Bogen machen ohngefehr an die Stelle, wo man glaubet, daß das Punct G hinfallen werde.

§. 137. Auf diese Art nun werden aus jeden drey Seiten Dreyecke beschrieben, und die gleichseitigen oder auch die gleichschenklichten Dreyecke sind davon nicht ausgenommen. Nur braucht man zu einem gleichseitigen Dreyeck nur eine einzige Linie anzugeben, weil, wenn man eine Seite bey einem gleichseitigen Dreyeck hat, dadurch die übrigen alle bekannt werden. IV, 107. Bey einem gleichschenklichten Dreyeck aber darf nur die Grundlinie und einer von den Schenkeln angegeben werden, denn der andere Schenkel ist nothwendig dem gegebenen gleich IV, 106. und wird also mit jenem zugleich bekannt. Es muß aber der gegebene Schenkel grösser seyn als die Helfte der Grundlinie, weil er sonst mit dem andern Schenkel zusammen gesetzt, das ist, zwey mal genommen, eine Summe brächte die kleiner wäre als die Grundlinie, so ohnmöglich statt haben kan. Bloß die Einsicht der Figuren kan im übrigen weisen, wie dergleichen Dreyecke aus ihren Seiten zusammen gesetzet werden, und man thut wohl, wenn man sich in der Zusammensetzung allerhand Dreyecke aus ihren Seiten etwas

F. 71. 72. 73.

IV. Abschnitt.

was übet. Denn ausser dem, daß wir hierinnen Fertigkeit haben müssen, so träget diese Uebung zu dem Verstand desjenigen, was gesaget worden, und noch hiebey zu sagen ist, sehr vieles bey.

§. 138. Da nun also aus jeden drey gegebenen Linien, welche die gehörige und zu wiederholten malen angezeigte Grösse haben, ein Dreyeck beschrieben wird, und man doch in Zusammensetzung dieser Dreyecke aus ihren gegebenen Seiten auf so verschiedene Art verfahren, und bald diese bald jene der drey gegebenen Linien vor AB, und wieder eine jede von den zwo übrigen vor AG setzen kan, auch die Cirkel, durch deren Durchschnitt man das Punct G findet, sich ausser G noch einmal schneiden, IV, 96. so fällt nunmehro die Frage vor, ob die auf diese Art beschriebene Dreyecke alle von einerley Grösse sind, oder ob ihre Grössen verschieden werden können? wie auch, ob ihre Winkel immer von einerley Grösse fallen, oder nicht?

F. 67. 68. 69. 70.

§. 139. Die Antwort auf diese Fragen ist: es können zwar die Dreyecke, wenn sie aus einerley Seiten nach der gegebenen Anweisung zusammen gesetzet worden, der Lage nach gar verschieden werden. Eine jede Seite derselben kan auf DF zu liegen kommen, eine jede der übrigen Seiten, kan entweder nach der rechten oder nach der linken stehen, und sie können beyde über oder unter der Linie DF liegen. Dieses alles kan seyn, und diese Verschiedenheit fliesset aus demjenigen, welches bey dieser Zusammensetzung willkührlich ist, und so oder anders gemacht werden kan. Aber es ist nicht möglich, daß dergleichen Dreyecke verschiedene Grössen haben, noch daß zwischen zwo gleichen Seiten derselben ungleiche Winkel enthalten seyn solten. Alle Dreyecke als ABC und abc, welche aus gleichen Seiten zusammen gesetzet sind, so nemlich, daß eine Seite des einen AB einer Seite des andern ab gleich ist, und so ferner BC der bc und AC der ac; sind auch ihren Flächen nach einander gleich, und es sind über dieses alle Winkel, welche zwischen gleichen Seiten liegen, von einerley Grösse, und demnach ist der Winkel A dem Winkel a gleich, der Winkel B dem Winkel b, und C dem c.

F. 63.

§. 140. Wer bloß dem natürlichen Verstande folgen will, ohne dasjenige, so nunmehro von den Linien, Winkeln und Dreyecken bekannt seyn muß, zum Grund zu legen, kan dieses auf nachfolgende Weise einsehen. Man stelle sich vor, daß die geraden Linien AB und DC dergestalt an die dritte gerade Linie BC befestiget sind, daß sie sich um die Puncte B, C, drehen lassen, wodurch die Winkel bey B und

F. 74.

und C grösser oder kleiner werden können, wie wir eben dieses bereits oben IV, 108. fast in eben der Absicht vorgestellet haben. Diese Linien AB und CD müssen die Länge haben, welche erfordert wird, daß aus denselben ein Dreyeck zusammen gesetzet werden könne, weiter ist nichts nöthig. Nun stelle man sich vor, daß die zwo Linien AB und CD so gesetzet seyn, wie die Figur weiset, daß nemlich das Ende der einen AB die andere CD berühre, so hat man ein Dreyeck ABC. Man kan, indem man den Winkel bey B nach und nach vergrössert, das äusserste Punct A der Linie BA in der Linie CD fortführen, und auf die Art das Dreyeck ABC verändern, aber es wird der Winkel B, mit der ihm entgegen gesetzten Seite AC, zugleich verändert, und weder der Winkel B kan vergrössert oder vermindert werden, wenn man die Seite AC behalten will, wie sie ist, noch kan die Seite AC grösser oder kleiner werden, wenn man nicht zugleich den Winkel bey B ändert. Behält man demnach die Seite AC von der Grösse, welche sie hat, und lässet auch die übrigen Seiten BC und AB unverändert, so muß auch der Winkel B bleiben wie er ist, und können demnach aus den drey Seiten BC, AB und AC, nicht andere und andere Dreyecke, mit verschiedenen Winkeln, gemacht werden, denn was hier von einer Seite gesaget worden ist, lässet sich von den übrigen allen sagen.

§. 141. Um aber die Sache in ein vollkommenes Licht zu setzen, und überhaupt zu zeigen, daß jede Dreyecke als ABC, abc, welche von gleichen Seiten beschlossen werden, einander gleich sind, und daß ihre Winkel, welche zwischen den gleichen Seiten liegen, ohnmöglich von verschiedener Grösse seyn können, so bringe man in Gedanken die Seite bc dergestalt an die Seite BC, daß die äussersten Puncte b und c dieser letzten Linie mit den äussersten Puncten der ersten B und C zusammen fallen, welches geschehen kan, weil diese Seiten bc und BC einander gleich sind. Man mache aber, daß auch die beyden gleichen Linien BA und ba von eben dem Punct B anfangen: und daß demnach auch CA und ca in dem Puncte C zusammen stossen. Uebrigens wende man das Dreyeck abc dergestalt, daß die Spitze desselben a unter die Seite BC zu liegen komme, wenn A über derselben lieget. Mit einem Wort, man füge die beyden Dreyecke dergestalt an einander wie in der 75 und 76 Figur die Dreyecke ABC und BCD an einander gefüget sind, bey welchen man sich vorzustellen hat, daß das Dreyeck BCD das Dreyeck bca sey, welches

F. 63.

F. 75. 76.

IV. Abschnitt. ches man dergestalt an ABC gefüget, daß BD=ba=BA, und CD =ca=CA, und ziehe von A nach D die gerade Linie AD.

§. 142. Man bekommet dadurch zwey gleichschenklichte Dreyecke, deren Grundlinien an einander gesetzt sind, nemlich ABD und ACD. Denn wir haben gesetzet, daß die geraden Linien BA, BD, wie auch CA, CD einander gleich seyn. Es ist aber sichtlich, daß die erstern zwo, die Seiten des Dreyecks ABD, und die zwo letztern die Seiten des Dreyecks ACB abgeben. Diese Dreyecke sind demnach gleichschenklicht. Und es sind in einem jeden dieser gleichschenklichten Dreyecke die Winkel, so an der Grundlinie desselben liegen, einander gleich. Das ist, in dem Dreyecke ABD ist der Winkel BAD dem Winkel BDA, und in dem Dreyeck ACD; der Winkel DAC, dem Winkel ADC gleich. IV, 113. Setzet man nun beyderseits diese gleiche Winkel in der 75 Figur zusammen, oder ziehet in der 76 Figur die kleinern von dem grössern ab, so müssen auch die Summen oder die Unterschiede derselben gleich seyn. Man siehet leicht, daß in der 75 Figur die Winkel BAC, BDC diese Summen, und in der 76, die Winkel BAC, BDC diese Unterschiede sind. Und es sind also diese Winkel einander gleich. Ist aber dieses, so sind auch die Dreyecke BAC und BDC einander gleich, und ihre übrige Winkel bey B und C. Denn es sind ausser diesen Winkeln BAC und BDC auch die Seiten gleich, die sie einschliessen, BA nemlich der BD, und AC der DC, und es ist IV, 112. gezeiget worden, daß alle Dreyecke, in in welchen gleiche Winkel von gleichen Seiten eingeschlossen werden, einander gleich sind, und daß ihre übrigen Winkel, welche von gleichen Seiten eingeschlossen werden, ebenfals keine verschiedene Grösse haben. Es ist demnach der Winkel ABC gleich dem Winkel DBC, der Winkel ACB dem Winkel DCB, und weil wir vorher gesehen, daß auch der Winkel BAC dem Winkel BDC, und das Dreyeck BAC, dem Dreyeck BDC gleich sey: so ist ohnstreitig von den zwey Dreyecken deren Seiten einander, auf die Art, die zum öftern deutlich bestimmet worden, gleich sind, dasjenige richtig, welches wir von ihnen angegeben und erweisen solten.

§. 143. Wolte man das Dreyeck BDC umwenden, daß es ebenfals oben auf die Linie BC zu stehen käme, so würde es ganz und gar auf das Dreyeck BAC fallen. Denn weil der Winkel DBC dem Winkel CBA gleich ist, so kan BD nicht anders als auf BA fallen, weil wenn BD nicht auf BA fiele, diese Winkel nicht gleich seyn würden.

den. Aus eben dem Grunde erhellet, daß durch dieses Umwenden des Dreyecks BCD auch die Seite CD auf die Seite CA gebracht werde: denn es sind die Winkel BCD, BCA einander ebenfals gleich. Und es folgt demnach, daß es nicht möglich sey, auf eine gerade Linie BC zwey verschiedene Dreyecke ABC und aBC dergestalt zu setzen, daß Ba=BA, und AC=aC, weil dergleichen Dreyecke in eins zusammen fallen, und nicht verschieden seyn würden. Und so viel von dieser Zusammensetzung der Dreyecke, aus ihren drey Seiten.

F. 77.

Verschiedene Aufgaben von gleichen Linien und Winkeln.

§. 144. Der Nutzen dieser Betrachtungen erstrecket sich sehr weit. Wir haben nunmehro verschiedene gewisse Kennzeichen, aus welchen wir von der Gleichheit der Winkel urtheilen können, und sichere Gründe einen Winkel einem andern gleich zu machen. Wir wollen von diesen letztern anfangen. Es sey ein Winkel ABC, und es sey eine andere gerade Linie gegeben DE, an welche man einen Winkel setzen sol, so groß als ABC, so zwar, daß die Spitze desselben an das Punct F falle, welches in der geraden Linie DE gegeben seyn mag, wo man wil. So verfertige man nach der IV, 98. gegebenen Anweisung, aus ABC ein Dreyeck, indem man die Seiten BA und BC nach Belieben annimmet. Wil man, so kan man AB der BC gleich machen, aber es ist dieses nicht nothwendig. Man darf nur zwey nach Belieben in BA und BC angenommene Puncte A und C zusammen ziehen, so ist geschehen, was zur Vorbereitung erfordert worden. Nachdem man also den Winkel bey B, welchen man abtragen sol, in ein Dreyeck ABC gebracht, so mache man auf FE ein anders Dreyeck aus den drey Seiten des Dreyecks ABC, welche vor Augen liegen, und dahin gesetzet werden können wo man wil. Es ist IV, 133. angewiesen worden, wie dieses zu verrichten, und wir haben uns dabey nicht aufzuhalten. Zur Erläuterung ist genug, daß wir sagen, es sey FE der BC, FG der BA, und EG der CA gleich zu machen. Ist dieses geschehen, so stehet bey F der Winkel GFE, welcher dem Winkel ABC gleich ist, wie erfordert worden.

F. 78.

§. 145. Nichts ist leichter als dieses einzusehen. Man hat die Seiten des Dreyecks GFE den Seiten des Dreyecks ABC gleich gemacht. Wir wissen, daß bey allen Dreyecken die aus gleichen

IV. Abschnitt. Seiten zusammen gesetzet sind, auch die Winkel gleich sind, welche zwischen dergleichen Seiten liegen. IV, 139. Eben dieses muß demnach auch bey unsern Dreyecken ABC, GFE eintreffen. Alle Winkel derselben die zwischen gleichen Seiten liegen, müssen einander gleich seyn. Nun ist aus dem, was gemacht worden, klar, daß die Winkel ABC und GFE zwischen gleichen Seiten liegen. Denn es ist FG der AB, und FE der BC gleich gemacht worden. Diese Winkel also ABC und GFE sind einander gleich.

§. 146. Es ist hiebey wenig anzumerken, und dieses sind Kleinigkeiten. In der Ausübung darf die gerade Linie CA nicht einmal ausgezogen werden, sondern es ist genug ihre äusserste Puncte A und C zu bemerken. Man kan sie eben so wohl mit dem Cirkel fassen und in EG übertragen, wenn nur diese Puncte bezeichnet sind, als wenn sie ganz ausgezogen wäre. So ist es auch mit der Linie EG. So bald die Linie FG gezogen ist, hat man der Aufgabe ein Genüge gethan, und es ist weiter nichts zu thun übrig, also kan diese Linie EG allzeit ungezogen bleiben. Man kan aber GF ziehen, so bald das Punct G durch den Schnitt zweyer Bogen gefunden worden, wie bekant ist. Diesen Schnitt zu machen, braucht man EG=CA, weiter aber zu gar nichts. Nimmet man aber BA der BC gleich, so hat man diesen Vortheil, daß man mit einer Oefnung des Cirkels so gleich zwo Seiten, nemlich BA und BC übertragen kan.

§. 147. Es können auch noch andere Aufgaben vorgeleget werden, bey welchen allen es dahinaus kommet, daß ein Winkel dem andern gleich gemachet werden sol, ob zwar verschiedene andere Umstände damit verknüpfet sind, und diese alle löset man durch eben die Gründe auf, welche wir bisher gesehen, als welche am leichtesten und geschwindesten zu dem Zweck führen. Dergleichen ist, wenn aufgegeben wird, einen Winkel in zwey gleiche Winkel zu theilen, das ist, zwey Winkel zu machen, die einander gleich sind, und welche zusammen gesetzt einen Winkel von gegebener Grösse ausmachen. Wenn man die Figuren, welche ohnlängst betrachtet worden sind, wieder nachsiehet, so wird man unter denselben eine finden, in welcher ein Winkel, so wie hier erfordert wird, getheilet worden, nemlich diejenige aus deren Betrachtung wir erwiesen, daß zwey Dreyecke, welche aus gleichen Seiten zusammen gesetzt worden, auch im übrigen nicht verschieden seyn. Denn weil in denselben die Winkel ABC und CBD ein-

F. 75. 76.

einander gleich sind, so ist allerdings ein jeder derselben die Helfte des Winkels ABD, und dieser Winkel wird durch die Linie BC in zwey gleiche Winkel geschnitten.

IV. Abschnitt.

§. 148. Man darf demnach nur eine dergleichen Zeichnung machen, als diejenige ist, welche diese Figuren vorstellet, wenn man einen jeden gegebenen Winkel in zwey gleiche Theile theilen will, aber man muß dieselbe gehörig anfangen. Es sey der Winkel, welcher zu theilen ist, EBF. Man schneide von seinen Seiten BE, BF, zwey gleiche Theile ab, welche man aus B anfängt. Diese sind hier BA und BD. Man stelle sich eine gerade Linie vor, zwischen den äussersten Puncten dieser Seiten A und D, oder man ziehe, wie hier geschehen, diese gerade Linie AD würklich. Man setze so dann auf diese Linie AD ein gleichschenklichtes Dreyeck, zu welchen man die Schenkel von beliebiger Grösse annehmen kan. Dieses ist ACD. Die gerade Linie BC, welche zwischen den Spitzen der zwey gleichschenklichten Dreyecke ABD und ACD gezogen ist, theilet den Winkel ABD oder EBF, in zwey gleiche Theile.

F. 79. 80.

§. 149. Es ist nach demjenigen, so allbereit gesaget worden, nichts mehr übrig, so uns deutlicher überführen könte, daß die Auflösung richtig sey, und durch dieselbe ein Winkel jederzeit genau in zwey Theile getheilet werde. Die Seite AB des Dreyecks ABC ist der Seite BD des Dreyecks DBC gleich genommen worden, und AC der CD, BC aber ist beyden Dreyecken gemeinschaftlich. Es sind also die drey Seiten des einen Dreyecks ABC, den drey Seiten des andern DBC gleich, und folgends sind auch die Winkel derselben bey B gleich, und ein jeder ist die Helfte des Winkels ABD oder EBF, welcher Winkel EBF demnach durch BC in zwey gleiche Theile richtig getheilet worden. Dieses ist, was man zum Beweiß sagen muß, welches wir allbereit in dem vorhergehenden einfliessen lassen.

§. 150. Uebrigens ist klar, daß in der Ausübung, wenn der Winkel EBF in zwey gleiche Theile zu schneiden ist, weder die Linie AD wie bereits erinnert worden, zu ziehen nöthig ist, noch auch AC und CD. Man braucht nichts als C, die Spitze des gleichschenklichten Dreyecks ADC, damit man die Linie BC, welche gesucht wird, nach derselben ziehen könne. Diese Spitze findet man durch den Schnitt zweyer Bogen gleich im Anfang, ohne daß die Seiten AC und CD dörffen gezogen werden. Und nachdem man ihn hat, ist ganz und

 gar

IV. Abschnitt. gar unnöthig diese Linien erst hernach zu ziehen. Im übrigen ist fast nicht nöthig zu erinnern, daß nur eine einzige gerade Linie BC seyn könne, welche einen gegebenen Winkel EBF in zwey gleiche Theile schneidet.

§. 151. Sonst ist in den bisher gebrauchten Beweisen der Lehrsatz enthalten, daß, wenn man auf eine gerade Linie AD zwey gleichschenklichte Dreyecke ABD und ACD setzet, und durch deren Spitzen die gerade Linie BC ziehet, welche man nach Belieben in G verlängern kan, diese gerade Linie BC die Winkel an den Spitzen der gleichschenklichten Dreyecke ABD und ACD in zwey gleiche Winkel theilen werde. Es ist dieser Satz aus dem erwehnten Beweiß IV, 149. genugsam klar: und solte jemand bey den Winkeln der 80 Figur ACG und GCD anstossen, und nicht gleich einsehen können, daß auch diese gleich sind, so müste er sich erinnern, daß aus der Gleichheit der Dreyecke ABC und DBC folge, daß der Winkel ACB dem Winkel DCB gleich sey. Ist aber dieses, so müssen auch die Winkel ACG und DCG gleich seyn, weil sie mit den vorigen ACB und DCB gleiche Summen, nemlich zwey rechte Winkel ausmachen. IV, 62.

§. 152. Wir können diese Figuren noch nicht verlassen. Eine weitere Betrachtung derselben zeiget uns, daß die gerade Linie BC, welche wir gezogen um den Winkel ABD in zwey gleiche Theile zu theilen, auch die Linie AD in zwey gleiche Theile schneide, in dem Punct, welches wir mit G bezeichnet, oder daß AG der GD gleich sey, und daß BG noch über dieses auf AD perpendicular stehe. Denn daraus, daß die Seite AB der Seite BD gleich ist, so wir gleich Anfangs mit Fleiß angenommen, und daß ferner der Winkel ABG dem Winkel GBD gleich ist, welches IV, 149. erwiesen worden, sehen wir ein, daß in den Dreyecken ABG und DBG auch die übrigen Seiten gleich sind, und die übrigen Winkel, welche zwischen den gleichen Seiten liegen. Denn die Seite BG ist den beyden Dreyecken ABG und GBD gemeinschaftlich, und werden also allerdings in diesen Dreyecken gleiche Winkel ABG und DBG von gleichen Seiten eingeschlossen, der erstere Winkel, nemlich von den Seiten AB und BG, und der zweyte von den Seiten BD und BG. Es ist demnach die Seite AG der Seite GD gleich, und der Winkel AGB dem Winkel DGB. IV, 112. Denn daß auch der Winkel BAG dem Winkel BDG gleich sey, dörfen wir nicht jetzt erst schliessen, weil bereits IV, 117. gezeiget worden, daß in einem gleichschenklichten Dreyeck,

der-

dergleichen ABD ist, die Winkel an der Grundlinie AD, einander gleich sind. Sind aber die Winkel BGA und BGD einander gleich, so fällt die gerade Linie BG auf AD dergestalt, daß sie mit derselben bey G zwey gleiche Winkel einschliesset, und ist demnach, dem Begrif gemäß, den wir von einer Perpendicularlinie IV, 52. beygebracht haben, diese BG allerdings auf die AD perpendicular.

§. 153. Es werden demnach jederzeit diese Dinge zugleich verrichtet. Wenn man den Winkel ABD in zwey gleiche Theile theilet, wird auch eben dadurch die Linie AD in zwey gleiche Theile geschnitten, und auf dieselbe eine Perpendicularlinie BG gezogen. Und weil aus B auf AD nur eine einzige Perpendicularlinie fallen kan, nemlich eben die BG, IV, 56. so kan man auch den Satz umkehren und sagen, daß indem aus B auf AD eine Perpendicularlinie BG gezogen wird, eben durch dieselbe BG die Linie AD so wohl als der Winkel ABD in zwey gleiche Theile getheilet werde. Und endlich, weil wieder nur ein einziges Punct G seyn kan, so AD genau in zwey gleiche Theile theilet, und demnach eine einzige Linie BG, so diese Theilung verrichtet, so kan eben der Satz auch so ausgedrücket werden: die gerade Linie BG, welche durch B so gezogen wird, daß sie AD in zwey gleiche Theile theilet, theilet auch den Winkel ABD in zwey gleiche Theile, und stehet auf die AD perpendicular.

§. 154. Der Winkel ABD ist der Winkel des gleichschenklichten Dreyecks ABD, welcher seiner Grundlinie AD entgegen stehet, und von diesen Winkel und dieser Grundlinie ist das angezeigte jederzeit richtig, man mag das gleichschenklichte Dreyeck angenommen haben, wie man wil. Den Winkel ABD in zwey gleiche Theile theilen, eine Linie auf die Grundlinie AD durch die Spitze B senkrecht oder perpendicular ziehen; eine Linie durch die Spitze eben des Winkels ABD ziehen, welche die Grundlinie AD in zwey gleiche Theile theilet, ist eine Arbeit, und eben die Linie BG welche das eine thut, thut auch das übrige beydes.

§. 155. Wir wollen dieses noch zu allem Ueberfluß etwas umständlicher zeigen. Wenn man zuerst setzet, daß in dem gleichschencklichten Dreyeck ABD die Linie BG den Winkel ABD, welcher der Grundlinie entgegen stehet, in zwey gleiche Theile theilet, so haben wir schon IV, 152. gezeiget, daß aus der Gleichheit der Winkel ABG und GBD, und der geraden Linien, welche sie einschliessen $AB = BD$,

und

IV. Abschnitt.

und BG = BG, folge, daß so wohl die Seiten AG, GD als auch die beiden Winkel bey G gleich seyn, und daß demnach BG auf AD perpendicular stehe.

§. 156. Setzet man aber BG sey dergestalt gezogen, daß sie die AD in zwey gleiche Theile theilet, AG = GD, so sind in den Dreyecken BAG und BGD, alle Seiten einander gleich, nemlich AG = GD, welches gesetzet wird, BA = BD, weil das Dreyeck ABD gleichschenklicht ist, und BG = BG. Demnach sind auch die Winkel ABG und GBD gleich, wie auch die beiden bey G, IV, 139. und es theilet demnach eben die BG, welche die Grund-Linie des gleichschenklichten Dreyecks ABD in zwey gleiche Theile theilet, auch den Winkel ABD in zwey solche theile, und stehet auf der Grund-Linie AD perpendicular. Nimmet man an, daß der Winkel BAD dem Winkel BDA gleich sey, wie dieses allezeit richtig ist, wenn BA = BD, und setzet ferner AG = GD, so kan man eben dieses auch aus einem andern Satze IV, 112. schliessen.

§. 157. Und wenn man endlich annimmt, daß die BG auf der AD perpendicular stehe, so ist der Winkel BGA gleich dem Winkel BGD, denn sie sind beyde gerade Winkel; da nun über dieses die Winkel BAG und BDG in dem gleichschenklichten Dreyeck ABD eben so wohl, als die Seiten AB, BD gleich sind, so ist eine Seite des Dreyecks BAG, nemlich die AB gleich einer Seite des Dreyecks BDG, nemlich der BD, und zween Winkel des erstern Dreyecks, BAG und AGB sind gleich zween Winkeln des zweyten Dreyecks BDG, DGB, und diese Winkel liegen in den beiden Dreyecken in Ansehung der gleichen Seiten BA und BD auf einerley Art. Demnach sind auch IV, 126. die übrigen Winkel dieser Dreyecke einander gleich ABG = GBD, und die übrigen Seiten AG = GD. Es schneidet also die Linie BG, die aus der Spitze des gleichschenklichten Dreyecks ABD auf die Grund-Linie desselben AD perpendicular fället, diese AD so wohl als den Winkel ABD in zwey gleiche Theile.

§. 158. Es ist leicht einzusehen, daß eben diese Linie BG auch das Dreyeck ABD in zwey gleiche Dreyecke ABG und GBD theile. Dieses ist ein Schluß, welcher aus allen Beweisen, die wir eben gegeben, folget; und wenn man demnach in einem gleichschenklichten Dreyeck den Winkel ABD in zwey gleiche Theile theilet, oder aus B auf AD die Linie BG perpendicular, oder durch B auf die Mitte

der

der AD eine gerade Linie BG ziehet: so wird jederzeit das gleichschenklichte Dreyeck ABD in zwey gleiche Dreyecke zerschnitten.

IV. Abschnitt.

§. 159. Da wir nun also die gerade Linie zu ziehen wissen, welche einen gegebenen Winkel in zwey gleiche Theile theilet, so wissen wir auch auf eine gerade Linie AD eine Perpendicular-Linie BG durch ein jedes gegebenes Punct zu ziehen, und dieselbe AD in zwey gleiche Theile zu theilen. Alles dieses verrichtet einerley Zeichnung, nur muß man dieselben, nachdem dieses oder jenes bey derselben als bekannt voraus gesetzet wird, anders und anders zu verfertigen anfangen.

§. 160. Es sey erstlich eine gerade Linie AD in zwey gleiche Theile zu theilen. Wir sehen diese als die Grund-Linie eines gleichschenklichten Dreyecks an, und setzen ein dergleichen Dreyeck von beliebigen Schenkeln drauf. Dieses ist ABD. So dann setzen wir auf eben diese AC noch ein anders dergleichen Dreyeck ACD, und ziehen BC, welche, wenn sie verlängert wird, so oft als dieses nöthig ist, die gegebene Linie AC in G in zwey gleiche Theile schneiden wird.

F. 81.

§. 161. Man siehet hier wieder, daß an der eigentlichen Länge der Seiten AB, BC, AC, und CD nichts gelegen sey, und daß dieselben nicht das geringste zur Linie BC beytragen. So bald die Spitzen der gleichschenklichten Dreyecke ABD, und ACD gefunden sind, welche die Durchschnitte zweyer Bogen geben, so hat man alles, so erfordert wird, die Linie BC zu ziehen, welche die AD, wie erfordert worden, in zwey gleiche Theile schneidet. Warum wolte man sich also mit der Ziehung unnöthiger Linien vergebliche Mühe machen, wenn man sonst nichts suchet, als eine Linie, wie aufgegeben worden ist, zu schneiden.

§. 162. Das Punct C ist bloß gefunden, damit die Linie BC, welche nothwendig durch B gehet, ihre richtige Lage bekomme. Diese aber hat sie, wenn sie auf die AD perpendicular stehet IV, 157. Kan man demnach auf eine andere Art, zum Exempel, in der Ausübung, vermittelst eines Winkelhackens durch B auf AD eine Perpendicular-Linie ziehen, so braucht man das Punct C gar nicht, und man kan die Arbeit, dasselbe zu suchen, ersparen. Denn eben diese Perpendicular-Linie verrichtet, wie bekannt ist, die verlangte Theilung.

§. 163. Es sey zum zweyten auf eine gerade Linie IK eine Perpendicular-Linie zu ziehen, welche durch ein Punct G, so in derselben

F. 82.

 nach

IV. Abschnitt. nach Belieben gegeben worden, hindurch gehe. Damit wir die Zeichnung hier so anfangen, daß wir wiederum auf unsere Haupt-Figur oder eine andere, so aus derselben geflossen ist, hinaus kommen, so setzen wir von G nach beiden Seiten zwo gerade Linien, GA, GD von beliebiger, aber gleicher Länge, beschreiben so dann auf AD ein gleichschenklichtes Dreyeck ABD. So bald dieses geschehen, sehen wir, daß wir weiter nichts zu thun haben, als die gerade Linie BG aus der Spitze dieses Dreyecks auf das Punct G der geraden Linie AD zu ziehen. Diese ist auf AD und folgends auf IK perpendicular, weil sie die Grund-Linie AD des gleichschenklichten Dreyecks ABD in zwey gleiche Theile theilet IV, 156. Aber auch hier können in der Ausübung die geraden Linien AB, BD, welche die Seiten sind des gleichschenklichten Dreyecks ABD, wegbleiben.

§. 164. Wenn man die IG und GK als zwo gerade Linien ansiehet, welche bey G einen Winkel einschliessen, der zween geraden Winkeln gleich ist, wie denn alle gerade Linien auf dieser Seite angesehen werden können IV, 58, so heisst die Perpendicular-Linie GB ziehen nichts anders, als diesen eingebildeten Winkel GK in zwey gleiche Theile theilen, und in der That kommt auch gegenwärtige Zeichnung mit derjenigen überein, welche oben IV, 148. angegeben worden ist, einen Winkel in zwey gleiche Theile zu theilen, wie man am besten einsehen wird, wenn man diese zwo Aufgaben mit einander auflöset, und die Zeichnungen zusammen hält.

§. 165. Hat man auf diese Art, oder sonst wie man wil, eine Perpendicular-Linie auf eine andere vorgegebene Linie gezogen, wie hier BG auf IK perpendicular stehet, und man nimmet in dieser Perpendicular-Linie ein Punct als B an, wo man wil, und in der geraden Linie IK zwey andere Puncte A und D, welche von G gleich weit entfernet sind, und ziehet so dann die geraden Linien BA, BD, so müssen diese nothwendig gleich seyn. Dieses ist selbst aus dem einzusehen was oben IV, 164. gesagt worden: oder auch daraus, weil, indem alles zu beiden Seiten auf einerley Art angenommen worden, nichts vorhanden ist, welches machen könte, daß eine der beiden geraden Linien BA, BD grösser wäre als die andern. Am deutlichsten aber wird alles wenn wir so schliessen. In den beiden Dreyecken BGA, BGD, sind die Winkel BGA, BGD gleich, weil BG auf der IK perpendicular stehet, und die Winkel, welche Perpendicular-Linien einschliessen, alle gleich

gleich sind. Diese gleiche Winkel werden beiderseits von gleichen Seiten eingeschlossen, weil AG der GD gleich angenommen worden, BG aber sich selbst nothwendig gleich ist. Demnach müssen auch IV, 112. die dritten Seiten BA, BD einander gleich seyn.

IV. Abschnitt

§. 166. Wil man dieses etwas anders ausdrücken, so kan man auch sagen, daß wenn man in der geraden Linie IK zwey Puncte, A und D nimmt, welche von G gleich weit entfernet sind, so ist auch ein jedes Punct B der Perpendicular-Linie auf IK, die durch G gehet, wo man dasselbe Punct auch annehmen wil, von den Puncten A und D gleich weit entfernet. Denn die Entfernungen des Puncts B von A und D sind die geraden Linien BA und BD, von welchen eben erwiesen worden ist, daß sie gleich sind.

§. 167. Nun kommen wir auf die dritte Anwendung unserer Figur, indem wir zeigen wollen, wie auf eine gegebene gerade Linie eine andere perpendicular zu ziehen ist, durch ein Punct, welches ausser der ersten geraden Linie lieget. Die gegebene gerade Linie ist IK, das Punct ausser derselben B, das ist durch B sol die gerade Linie gehen, welche auf der IK perpendicular stehet.

F. 83. 84.

§. 168. Wir sehen, daß wir hier unsere Figur von B zu zeichnen anfangen, und machen müssen, daß IK oder ein Stück davon die Linie AD der 79 oder 80 Figur abgebe. Dieses zu erhalten nehme man ein Punct an, disseits der geraden Linie IK, wenn B jenseits lieget, als hier L, und beschreibe durch L um das Mittelpunct B einen Cirkelkreis. Weil nun die gerade Linie IK durch ein Punct innerhalb dieses Cirkels durchgehet, denn man hat den Cirkel mit Fleiß so genommen, daß dieses erfolgen müssen, so muß die gerade Linie IK den Umkreis in mehr als einem Puncte schneiden IV. 94. und diese Durchschnitte müssen sich zeigen. Man bezeichne zwey derselben mit A und D, und ziehe BA, BD, welche gleich seyn werden, weil sie zwey Halbmesser eines Cirkels sind, so hat man ein gleichschenklichtes Dreyeck ABD fertig.

§. 169. Man kan sich an diesem begnügen lassen, wenn man AD mit Versetzung des Cirkels in zwey gleiche Theile schneiden wil, indem man nemlich so lange probiret, bis man die Helfte richtig gefunden. Denn wenn G die Linie AD in zwey gleiche Theile theilet, so ist wie IV, 156. bekannt, BG nothwendig auf AD oder IK perpendicular; man

IV. Abschnitt.

kan aber diese BG durch das gegebene Punct B und durch das also gefundene G ziehen. Eben so wäre es wenn man, auf was Art es auch seyn möchte, den Winkel ABD theilete; die gerade Linie BG, welche ABG dem GBD gleich machet, ist ebenfalls die Perpendicular-Linie, die durch B auf AD kan gezogen werden, IV, 155.

§. 170. Wil man aber keines von beiden annehmen, so muß man nothwendig auf die AD noch ein gleichschenklichtes Dreyeck ADC setzen, dessen Spitze C, wie sonst jederzeit bey dieser Zeichnung beobachtet worden, ausser B fällt: Ist dieses geschehen, so kan durch die beiden Spitzen B und C die Perpendicular-Linie BGC oder BCG gezogen werden. Aber auch hier sind die geraden Linien AB, BD, ferner AC, und CD in der Ausübung unnütze, wie nunmehro ohne vieles Erinnern bekannt seyn muß.

§. 171. Diese letztere Zusammensetzung der Linien ist diejenige, welche man annehmen muß, um geometrisch zu verfahren. Es sind zu dem Ende keine Versuche erlaubt, da man nemlich erstlich dem blossen Augenmas folget, und dadurch dasjenige ohngefehr bestimmet, so man suchet, so dann nachmisset, ob man es richtig getroffen, und wenn dieses nicht geschehen ist, die begangenen Fehler auf eben die Art verbessert. Auch darf man sich zu dem Ende keiner Instrumente ausser dem Cirkel und Linial, bey irgend einer Zeichnung, bedienen. Man kan zum Exempel eine gegebene gerade Linie dem Augenmas nach in zwey gleiche Theile theilen, und wenn dieses geschehen, nachmessen, ob diese Theile gleich sind, wodurch man zugleich siehet, ob man viel oder wenig gefehlet, wenn sich, wie meistentheils geschiehet, Fehler ereignet haben. Man hat auch Instrumente, vermittelst welcher leicht die Helfte einer jeden geraden Linie zu schaffen ist, und man könte derselben ohne Mühe mehrere von verschiedenen Arten ausdenken. Wer wil demjenigen, welcher bloß einiges Nutzens wegen, eine Linie in zwo gleiche Helften theilen wil, wehren, daß er sich derjenigen Weise bediene zu seinem Zweck zu gelangen, welche ihm am allerbequemsten scheinet; aber in der Geometrie ist es nicht eines, ob man es so oder so mache. Der Zweck dieser Wissenschaft ist, daß wir einsehen, wie die Grössen, welche wir in derselben betrachten, von einander abhängen, um so bald eine oder die andere bekannt ist, auf die übrigen alle schliessen zu können, welche mit derselben verknüpft sind. Darzu können uns dergleichen Versuche nicht helfen. Ich werde niemals einsehen,

sehen, daß eben die gerade Linie, welche von der Spitze eines gleichseitigen Dreyecks auf seine Grundlinie perpendicular fället, und die den Winkel, welcher der Grundlinie entgegen gesetzet ist, in zwey gleiche Theile theilet, auch die Grundlinie in zwey gleiche Theile theile, und daß diese drey Dinge beständig verknüpft sind, und vermittelst einer einzigen geraden Linie geschehen, wenn ich mich um keine andere Theilung der geraden Linie, als die durch Versuche oder Instrumente geschiehet, bekümmert habe. Die Geometrie zeiget den Grund von allen Instrumenten, so zu einer bequemen Ausübung können erfunden werden, und setzt uns im Stand dieselbe anzugeben, und sie mit Verstand zu gebrauchen. Diesen Zweck aber würde sie nicht erhalten, wenn sie gleich Anfangs diese Instrumente gebrauchen, und zum Grund unserer Erkänntniß in diesen Dingen legen wolte.

Wie Parallellinien entstehen, und deren Eigenschaften.

§. 172. Aus demjenigen so gewiesen worden, wie an eine gegebene gerade Linie und an ein gegebenes Punct derselben ein Winkel zu setzen ist, welcher einem gegebenen Winkel gleich sey, kan nunmehro die Anweisung hergeleitet werden, mit einer gegebenen geraden Linie durch ein Punct, welches ausser derselben lieget, eine Parallellinie zu ziehen. Wir haben gesehen, daß zwo gerade Linien parallel sind, wenn sie mit einer dritten Winkel einschliessen, die einander gleich sind, und die entweder gänzlich auf einerley Art liegen, IV, 77. oder einander in allen Stücken entgegen stehen. IV, 79. Also erfordert diese Aufgabe nichts anders als die Verfertigung eines Winkels, welcher einem andern gleich sey, und es ist nichts daran gelegen, von was Grösse diese Winkel sind.

§. 173. Es sey also die Linie AB gegeben, mit welcher man durch das ebenfals angegebene Punct C, eine andere gerade Linie parallel ziehen soll: so ziehe man durch C nach Belieben eine Linie auf AB, welche mit derselben einen Winkel bey D machet, der so groß oder so klein seyn kan, als man will, setze so dann an die Linie CD, und an das Punct derselben C einen Winkel, welcher dem bey D gleich und demselben entgegen gesetzet sey. Dieses ist so zu verstehen. Da der Winkel CDB nach B siehet, so setze man an C einen Winkel ECD = CDB, welcher seine Oefnung nach A richtet. Die Linie EC, welche man nach Belieben bis in F verlängern kan, wird der gegebenen Linie AB parallel seyn. F. 85.

IV. Abschnitt.

§. 174. Man mag übrigens den Winkel ECD dem Winkel CDB gleich machen, nach welcher Anweisung man will, es ist nichts daran gelegen, wie leicht einzusehen ist. Man kan sich zu dem Ende derjenigen bedienen, so oben IV, 144. vorgeschrieben worden ist; man kan aber auch anders verfahren, und sich auf andere Sätze gründen, die entweder jetzo schon bekannt sind, oder hernach werden angebracht werden. Man kan zum Exempel wie vorher die Linie CD nach Belieben ziehen, dieselbe so dann in G in zwey gleiche Theile schneiden, und durch das Punct G eine andere Linie nach Belieben legen, welche sich ebenfals in H an der geraden Linie AB endiget. Hat man dieses, so mache man so dann den Theil dieser Linie GI, dem Theil derselben GH gleich, so kan man durch die zwey Puncte I und C eine gerade Linie EF ziehen, welche der AB parallel seyn wird. Denn in den Dreyecken DGH, IGC sind die Winkel DGH, IGC nothwendig gleich, weil sie entstanden sind, indem die zwo geraden Linien CD und IH einander geschnitten. IV, 70. Es sind aber auch die Seiten gleich, welche diese Winkel in den beyden Dreyecken einschliessen, GC nemlich ist der GD gleich, und GI der GH, denn man hat diese Seiten mit Fleiß gleich gemacht, also müssen auch die Winkel CDB und ECD gleich seyn, IV, 112. welche man gleich machen sollen, damit die gerade Linie EF, die verlangte Parallellinie würde.

F. 86.

§. 175. Man kan sich aber auch, dieser Aufgabe ein Genüge zu thun, und durch ein gegebenes Punct C, einer gegebenen geraden Linie eine andere parallel zu ziehen des äussern Winkels bedienen, welcher mit dem innern nach einer Seite zustehet, und jenen diesem gleich machen. Die gegebene gerade Linie ist wieder AB, das Punct C. Man ziehet durch C eine gerade Linie wie man will, welche die AB erreiche, verlängert sie aber hier über C hinaus. Diese ist GD. Man setzet so dann an C und an die Seite CG einen Winkel, welcher dem Winkel CDB gleich ist, die Linie CF welche denselben von der andern Seite einschliesset, ist die gesuchte Parallellinie, und kan in E nach Belieben verlängert werden. Wir haben IV, 77. gezeiget, daß aus der Gleichheit dieser Winkel GCF und GDB, folge, daß die geraden Linien EF und AB parallel seyn. Daß aber EF durch das gegebene Punct C gehe, ist, wenn man der gegebenen Anweisung folget nothwendig, und wir haben also nichts zum Beweiß der Richtigkeit dieser Anweisung hinzu zu fügen.

F. 87.

F. 88.

§. 176. Wenn man bey der erstern Art IV, 173. einer Linie AB durch

durch ein gegebenes Punct C eine andere parallel zu ziehen, die schiefe Linie CA ans Ende der gegebenen Linie AB ziehet, und hernach um den Winkel CAB, wie IV, 144. erfordert wird, abzutragen, durch Ziehung der Linie CB das Dreyeck CAB schliesset, und auf CA aus den Seiten AB und CB ein Dreyeck ADC machet, damit der Winkel DCA dem Winkel CAB gleich werde: so bekommet man eine viereckigte Figur ABCD, in welcher nicht allein die Seiten AB und CD parallel sind, sondern auch AD und BC. Denn weil die Seiten des Dreyecks ADC den Seiten des Dreyecks ABC gleich genommen worden: so sind auch die Winkel DAC und ACB einander gleich, woraus eben so folget, daß die Seite AD der Seite BC parallel sey, wie man den parallelen Stand der zwo geraden Linien AB und CD aus der Gleichheit der Winkel CAB und ACD schliessen kan. IV, 79.

§. 177. Ein dergleichen Viereck, dessen entgegen gesetzte Seiten AB, CD, wie auch AD, CB einander parallel lauffen, heisset ein Parallelogrammum, von welchem wir also eingesehen haben, daß sie möglich sind, und wie sie möglich sind. Nemlich wenn eine gerade Linie wie AB gegeben ist, und ein Punct C, in welches die eine Ecke eines dergleichen Vierecks fallen soll, so kan man das Parallelogrammum, wie gewiesen worden, beschreiben, indem man von dem Punct C die schiefe Linie CA ziehet, und so dann im übrigen vollkommen verfähret, als ob man bloß eine Linie ziehen solte, welche mit der AB parallel ist, nur daß man sich in Acht nehmen muß, daß man alle Seiten von gehöriger Grösse mache.

§. 178. Indem das Punct C zusamt der Linie AB gegeben ist, so kan man die Seite CB gleich im Anfange ziehen, und es sind also die Seiten AB und CB zusamt dem Winkel den sie einschliessen ABC, bekannt. Es wird demnach das Parallelogrammum beschrieben, wenn zwo Seiten desselben, die einen Winkel einschliessen, gegeben sind, zusamt diesem Winkel. Man machet aus den gegebenen Seiten AB, CB, und dem gegebenen Winkel ABC das Dreyeck ABC aus, und setzet auf die Seite CA, welche dem gegebenen Winkel entgegen gesetzet ist, ein Dreyeck ACD, aus den zwo Seiten CD= AB und AD = CB, so nemlich, daß eine jede Seite dieses neuen Dreyecks ACD, derjenigen Seiten des vorigen ABC gegen über zu stehen komme, welcher sie gleich ist. Man siehet auch leicht ein, insonderheit wenn man ein oder anderes solches Viereck würklich selbst verfertiget,

IV. Abschnitt.

tiget, daß es eben nicht nöthig sey, die gerade Linie CA zu ziehen weil man leicht auf die bloß eingebildete Linie CA das Dreyeck ACD, wie erfordert wird, setzen kan.

§. 179. Eben so siehet man, daß man aus einem jeden Dreyecke, wie hier aus ABC, ein Parallelogrammum machen könne, von welchem das Dreyeck ABC die Helfte ist. Denn weil die drey Seiten des Dreyecks ABC den drey Seiten des Dreyecks ABC gleich sind, so ist auch das erstere Dreyeck selbst dem zweyten gleich, IV, 139. und folgends ein jedes derselben die Helfte des Vierecks ABCD.

§. 180. Es ist ein jedes Viereck, dessen einander entgegen gesetzte Seiten gleich sind, ein Parallelogrammum. Denn man setze, daß AB = CD, und AD = CB; so kan man die Seite AC entweder ziehen, oder sich nur in Gedanken vorstellen, und man wird aus der Gleichheit der Seiten in den zwey Dreyecken ABC, ACD schliessen können, daß auch die Winkel DCA, CAB gleich seyn, woraus man folgern kan, daß die Seiten AB und CD parallel sind. Und weil aus eben der Gleichheit der Seiten auch folget, daß die Winkel CAD und ACB gleich sind, so müssen auch die Seiten AD und CB parallel seyn, und es sind demnach bey einem jeden Viereck dessen entgegen gesetzte Seiten einander gleich sind, eben diese Seiten auch einander parallel.

§. 181. Dieses ist dasjenige, so bey den Parallelogrammen so gleich aus demjenigen geflossen, so wir von den Parallellinien eingesehen, und wir musten diese Dinge hier betrachten, damit wir allen Nutzen von unserer Figur zögen, welchen sie uns geben konte. An einem andern Ort, würden diese Dinge einen weitläuftigern Beweiß erfordert haben.

§. 182. Wir können nun fortfahren, uns die übrige Eigenschaften der Parallellinien vorzustellen. Man siehet leicht, daß dergleichen Linien, beständig in einerley Entfernung von einander bleiben, oder daß sie nicht nur nicht zusammen lauffen, man mag sie verlängern wie man will, sondern daß sie auch einander nicht einmal näher kommen. Der blosse Begrif der geraden Linie kan uns hierauf bringen. Gerade Linien gehen beständig auf einerley Art fort. Nähern sie sich also einander in ihrem Anfang, so nähern sie sich einander auch im Fortgang immer fort. Es ist nicht möglich, daß sie im Anfang sich einander nähern solten, hernach aber wieder von einander entfernen,

men, ehe sie einander erreichet haben, oder daß sie wenigstens aufhören solten, sich einander zu nähern. Eben so wie sie sich einander im Anfang nähern, so nähern sie sich einander im Fortgang. Die geraden Linien AB, CD, welche wir von A und C zu ziehen angefangen, nähern sich einander, indem sie bis B und D fortgehen; sie nähern sich aber einander noch immer, indem die eine von B bis an E, und die andere von D bis an F wächset. Wenn sich aber gerade Linien, indem sie fortgezogen werden, einander beständig auf einerley Art nähern, so müssen sie endlich gar zusammen kommen, es mag dieses geschehen wo es will. Ihre Entfernung von einander, die sie im Anfang gehabt, vermindert sich im Fortgang beständig; sie vermindert sich immer auf einerley Art, endlich muß sie nichts werden, und ist dieses geschehen, so berühren die Linien einander. Demnach kommen gerade Linien, welche sich gegen einander neigen, oder welche sich einander nähern, endlich gewiß zusammen. Da nun aber die Parallellinien niemals zusammen kommen, so können sie sich auch einander niemals nähern, denn sonst würden sie zusammen kommen. Sie müssen demnach beständig einerley Entfernung von einander behalten, denn sich nicht nähern, und immer einerley Entfernung behalten, ist einerley mit verschiedenen Worten gesagt. Doch dieses wird aus dem nachfolgenden viel deutlicher werden.

IV. Abschnitt. F. 89.

§. 183. Wenn die zwo geraden Linien AB, DE einander parallel liegen, und eine dritte Linie FG schneidet eine derselben DE, so muß eben die Linie FG, wenn sie verlängert wird, auch die andere AB schneiden, wenn man nur auch diese Linie gehörig verlängert. Denn die Linien DE, FG, welche einander schneiden, machen den Winkel DCG mit einander, und die AB ist durch ein Punct innerhalb dieses Winkels DCG gezogen, welches Punct man sich in der AB, so weit sie gezeichnet ist, vorstellen kan wo man will, in A zum Exempel, oder B. Folgends muß IV, 105. die Linie AB wenigstens eine der Linien DC, CG, oder DE, FG schneiden, und von derselben hinwiederum geschnitten werden. Es ist aber nicht möglich, daß die Linien AB, DE einander schneiden, weil sie parallel sind: Folgends schneidet AB die FG und wird von derselben geschnitten.

F. 90.

§. 184. Hieraus folget so gleich, daß durch ein gegebenes Punct C nur eine einzige gerade Linie gezogen werden könne, welche einer ebenfals gegebenen geraden Linie AB parallel lauffe. Denn wenn DE diese Linie ist, welche durch C der AB parallel läuft; und man

 will

IV. Abschnitt. wil durch eben das Punct C noch eine andere gerade Linie FG ziehen, so muß diese FG die vorige DE nothwendig in C schneiden: Sie schneidet also auch die AB, wenn sie so wol als die AB gehörig verlängert wird, und kan also dieser AB nicht parallel seyn. IV, 78.

F. 91. §. 185. Hieraus aber lassen sich ferner folgende Eigenschaften der Parallellinie begreiffen. Wenn zwo gerade Linien AB und CD parallel liegen, und man schneidet sie durch eine beliebige dritte Linie EF, so sind die Wechselswinkel, welche zwischen den Parallellinien nach verschiedenen Seiten liegen CEF und EFB einander gleich. Dieses ist einer von den Sätzen, welche wir gleich Anfangs angegeben, verkehrt gesetzt. Wir haben gesehen, daß wenn die Winkel CEF und EFB gleich sind, die Linien AB und CD nothwendig einander parallel seyn müssen: jetzt wird angegeben, daß, wenn die Linien AB und CD parallel sind, auch die Winkel CEF und EFB gleich seyn; in beyden Fällen ist die Linie EF nach Belieben gezogen worden. Es lässet sich aber auch der gegenwärtige Satz aus dem vorigen gar leicht beweisen, indem man zeiget, daß so bald als man das Gegentheil desselben annehmen wil, man in Dinge verfället, von welchen man weiß, daß sie ohnmöglich und widersinnisch sind. Wir setzen, daß die Winkel EFB und CEF gleich sind. Wer diesem widerspricht, muß sagen daß sie ungleich sind: wir wollen sehen worzu dieser Widerspruch leiten kan.

§. 186. Obschon der Winkel CEF, wie gesetzt wird, dem Winkel EFB ungleich ist, so kan doch dieses nicht hindern, daß man nicht an das Punct E der Linie EF einen Winkel setzen könne, welcher dem Winkel EFB gleich ist. Denn dieses können wir überall thun. Wir wollen setzen, daß dieser Winkel GEF sey. Denn weil der Winkel EFB dem Winkel CEF ungleich zu seyn gesetzt wird, so muß daraus nothwendig folgen, daß auch der Winkel CEF dem Winkel GEF, welchen wir dem Winkel EFB gleich angenommen, ungleich sey, und demnach muß die Linie EG ausser EC fallen, entweder zwischen die zwo Parallellinien AB, CD, wie wir sie gezeichnet, oder ausserhalb derselben. Ist man mit diesem einig, so schliessen wir nun, um zu zeigen, daß dieses nicht statt haben könne, und daß es folgends falsch sey, daß der Winkel CEF grösser oder kleiner sey, als der Winkel EFB folgender massen. Es wird zum Grund gesetzt, daß die Linie CD der Linie AB parallel sey, da man aber auch setzet daß der Winkel GEF dem Winkel EFB gleich sey: so folget daraus, daß

auch GE mit eben der Linie AB parallel lauffe. IV, 79. Es gehen aber die geraden Linien CD und GE beyde durch das Punct E, und sind demnach mit der geraden Linie AB zwo andere CD und GE parallel gezogen, welche beide durch ein Punct E gehen. Dieses kan ohnmöglich seyn, denn wir haben IV, 184. deutlich eingesehen, daß nur eine dergleichen Linie möglich sey. Also ist auch der Winkel CEF dem Winkel EFB nicht ungleich. Denn so bald wir dieses angenommen, folgte etwas widersinnisches; folgends sind diese Winkel, wie wir gesetzet haben, einander gleich.

IV. Abschnitt.

§. 187. Hieraus aber ist nun gar leicht ferner einzusehen, daß wenn man die gerade Linie EF nach aussen zu in H und I verlängert hat, auch die Winkel IED und EFB einander gleich seyn müssen. Denn die Winkel IED und CEF sind allzeit nothwendig gleich, wie nunmehro ganz bekant seyn muß. Nun aber ist eben gezeiget worden, daß die Winkel CEF und EFB einander gleich seyn, also müssen auch die Winkel IED, EFB, die beyde einem dritten Winkel CEF gleich sind, einander gleich seyn.

§. 188. Eben so ist es auch mit den Winkeln IED und AFH. Sie sind gleich, weil die Winkel CEF und EFB gleich sind, und diese letztere Winkel den erstern nothwendig gleich seyn müssen.

§. 189. Endlich sind auch die Winkel DEF, und EFB, welche zwischen zwo Parallellinien nach einer Seite zu stehen, nachdem diese von einer dritten Linie IH geschnitten worden, zween geraden Winkeln gleich. Denn es ist EFB so groß als FEC; nun aber ersetzet FEC was dem Winkel FED an zween geraden Winkeln abgehet, denn FEC und FED zusammen machen zween gerade Winkel aus: IV, 62. also muß auch der Winkel EFB, wenn man ihn zu dem Winkel DEF hinzu setzet, dieses Winkels DEF Abgang von zween rechten Winkeln ersetzen, und folgends mit demselben zween rechte Winkel ausmachen.

§. 190. Hat man demnach so viele gerade Linien AB und CD in einer ebene, einer gegebenen linie EF parallel gezogen, als man wil, und man ziehet auf eine derselben EF, eine Perpendicularlinie GH, und verlängert dieselbe, bis sie auch die übrigen Linien in H und I schneidet: so ist diese IG auch auf alle übrige Linien AB und CD perpendicular. Denn weil die Linien CD und EF parallel, die Winkel aber bey G, wegen des senkrechten Standes der Linie HG auf EF, rechte Winkel sind: so kan es nicht anders seyn, die Winkel bey H,

F. 92.

IV. Abschnitt.

müssen ebenfals rechte Winkel seyn, welches man aus den eben angegebenen allgemeinen Sätzen auf mehr als eine Art, und mit gleicher Leichtigkeit einsehen kan. Und eben diese Gründe erweisen, daß auch die Winkel bey I gerade seyn, und daß darnach GH so wohl auf CD, als auf AB, perpendicular stehe.

§. 191. Und eben hieraus siehet man auch, daß die geraden Linien AB und CD, welche beyde einer dritten EF parallel lauffen, und mit derselben in einerley ebenen Fläche liegen, auch mit einander verglichen, parallel seyn, oder daß indem man die zwo Linien AB und CD beide durch verschiedene Puncte mit der EF parallel gezogen, man eben dadurch die Linie AB der Linie CD parallel gemachet. Denn weil, wie gezeiget worden, die Winkel bey H und I gerade Winkel sind, so stehen die Linien AB und CD beyde auf der geraden Linie GI perpendicular, und sind deswegen mit einander parallel, weil die Winkel AIH, IHC, mit einander zween rechte Winkel ausmachen, oder auch, weil AIH und IHD einander gleich sind.

§. 192. So oft man die Entfernung zwoer Parallellinien von einander genau anzuzeigen hat, ziehet man eine Perpendicularlinie von einer derselben auf die andere, wie hier IHG gezogen ist, welche dann nothwendig auf alle diese Linien, so viel ihrer auch seyn mögen, perpendicular seyn wird. Das Stück dieser Perpendicularlinie, welches zwischen den Parallellinien enthalten ist, ist die Entfernung derselben von einander. Demnach ist in unserer Zeichnung die Entfernung der geraden Linie AB von der CD, die Länge IH, die Entfernung der AB von der EF ist IG, und CD ist von der EF um die Länge HG entfernet. Es gilt gleich, wo man eine solche Perpendicularlinie ziehet, denn es sind die Entfernungen der Parallellinien, so weit man sie auch verlängern wil, aller Orten einerley, wie wir theils IV, 182. gesehen, theils bald noch deutlicher sehen werden.

F. 93. §. 193. Hat man nun eine beliebige Zahl von Parallellinien gezogen, welche alle gleiche Entfernung von einander haben, als AB, CD, EF, und man ziehet eine schiefe Linie GHI, wie man wil, von einer der äussersten dieser Parallellinien an die andere, so sind die Theile dieser schiefen Linie GHI, welche zwischen jeden zwo Parallellinien die einander am nächsten liegen, enthalten sind, einander gleich. GH nemlich ist = HI. Denn wenn, wie in unserer Figur, nur drey Parallellinien sind, und man ziehet durch das Punct H, in welchem die mitt-

mittlere von der schiefen Linie GHI geschnitten wird, eine Perpendicularlinie auf diese Parallellinien KL, so sind in den Dreyecken GKH und HIL die Winkel bey K und L einander gleich, weil sie gerade Winkel sind: und über dieses ist auch der Winkel KHG dem Winkel IHL gleich, weil sie durch den Schnitt zwoer geraden Linien KL und GI entstanden sind. Da nun aber auch die Seite KH der Seite HL gleich ist, weil diese die Entfernungen sind der Parallellinien AB, CD, und CD, EF, welche wir gleich angenommen: so liegen in diesen Dreyecken GKH und HIL die gleichen Seiten KH und HL zwischen gleichen Winkeln K=L, und KHG = IHL, und sind demnach in denselben auch die dritten Seiten GH und HI einander gleich. IV, 126. Das ist, das Stück GH der schiefen Linie GI, welches zwischen der ersten und zweyten Parallellinie lieget, ist dem Stück HI eben dieser Linie GI gleich, so zwischen der zwoten und dritten Parallellinie lieget. Auf eben die Art aber kan man auch zeigen, daß wenn der Parallellinien mehrere sind als dreye, und die Entfernung der dritten von der vierten ist der Entfernung der zwoten von der dritten gleich, und so fort: man kan sage ich unter diesen Bedingungen auf eben die Art zeigen, daß der Theil HI der schiefen Linie GI zwischen der zwoten und dritten Parallellinie, dem Theil dieser Linie, zwischen der dritten und vierten gleich seyn werde, und so weiter.

§. 194. Man siehet leicht daß man diesen Satz auch umkehren und also sagen könne: Wenn drey Parallellinien AB, CD, EF eine Linie GI, welche zwischen den äussersten derselben AB, EF wie man wil, schief gezogen ist, in zwey gleiche Theile schneiden, so nemlich, daß GH=HI, so sind dieselben Parallellinien gleich weit von einander entfernet; oder wenn man zwischen denselben auch eine Perpendicularlinie ziehet KHL, so werden auch die Theile dieser Linie KH und HL einander gleich. Denn es sind in den Dreyecken KHG und HIL die Winkel, welche wir vorher betrachtet, und gleich zu seyn befunden, auch bey den gegenwärtigen Bedingungen gleich, nemlich KHG=IHL, und K=L, weil die gegenwärtigen Bedingungen mit den vorigen einerley sind, ausser daß an statt HK=HL man hier gesetzet, es sey HG=HI. Es folget aber aus der Gleichheit dieser Winkel und der Gleichheit der Seiten HG, HI in den Dreyecken KHG, und IHL, daß auch die Linien KH und HL einander gleich seyn, wie vorhero IV, 126: und weil diese KH, HL auf die Parallellinien perpendicular gezogen sind, und folgends ihre Entfernung von einander anzeigen, so

IV. Abschnitt.

muß AB von der CD so weit entfernet seyn, als weit CD von der EF entfernet ist. Man kan nun leicht weiter gehen, und schliessen daß, wenn vier, fünf oder mehr Parallellinien, die in einer Ebene liegen, eine schiefe Linie dergestalt, daß alle Theile der schiefen Linie gleich sind, schneiden können; jede dieser Parallellinien von denjenigen, welche ihr zunächst liegen, gleich weit entfernet seyn werde.

§. 195. Aber auch hier ist der blosse natürliche Verstand hinlänglich die Sache einzusehen, und so gehet es mit den meisten ersten Sätzen der Geometrie. Man nehme eine Linie wie man wil, und bemerke in derselben drey Puncte G, H und I, deren beyde äusserste G und I von dem mittlern H gleich weit entfernet sind, und ziehe so dann durch diese drey Puncte die Parallellinien AB, CD, EF. Ist dieses geschehen, so frage man sich selbst, ob AB der CD näher sey als EF, oder ob diese EF der CD näher sey als die AB, verkehre aber die Figur, ehe man sich etwa mit der Antwort übereilet, so daß das unterste das oberste werde. Man wird allerdings finden, daß man eben so wenigen Grund haben kan, AB der CD näher zu setzen, als EF, als wenig man auf der andern Seite antrift, welches machen könte, daß EF der CD näher wäre als AB.

F. 94.

§. 196. Gesetzt nun daß die Parallellinien der 94 Figur dergestalt liegen, daß sie die Linie AE, welche man von der ersten nach der letzten nach Belieben gezogen, in gleiche Theile theilet, so nemlich daß AB = BC = CD = DE: so schliesset man so gleich daraus, es müssen alle diese Parallellinien gleich weit von einander entfernet seyn. Ist nun aber zwischen eben diesen Linien noch eine andere Linie ae gezogen, welche von denselben in den Puncten a, b, c, d, e, getheilet wird, so kan man daraus, daß die Parallellinien alle einerley Entfernung von einander haben, wieder schliessen, daß auch die Theile dieser Linie ab, bc, cd, de einander gleich seyn müssen. IV, 193. Und es folget demnach allzeit daraus, daß eine gerade Linie AE von verschiedenen Parallellinien in gleiche Theile geschnitten wird, daß auch eine jede andere gerade Linie ae, welche zwischen eben diesen Parallellinien lieget, von denselben ebenfalls in lauter gleiche Theile geschnitten werde.

§. 197. Wären nun über dieses die Linien AE, ae einander ebenfals parallel, so wären auch die Theile AB und ab, und alle übrige einander gleich, wie man sie auch mit einander vergleichen wil. Dieses ist besonders zu beweisen. Man siehet aber leicht, daß so bald man

man erwiesen, daß bey diesen neuen Umstand AB der ab gleich sey, alles übrige von selbst folge. Denn AB ist = BC. Ist nun auch BA = ab, so ist auch BC = ab, und so fort. Diesen Beweiß aber giebt nachfolgender Satz.

IV. Abschnitt.

§. 198. Wenn AB der DC und zugleich AD der BC parallel liegen, das ist, wenn zwey Paare von Parallellinien ein Viereck ausmachen, so ein Parallelogrammum genennet wird; so sind in einem solchen Vierecke nothwendig so wohl die einander entgegen gesetzte Seiten, als auch die einander entgegen gesetzete Winkel gleich. In diesem Satze haben wir wieder einen der vorigen IV, 180. umgekehret. Wir haben gesehen, daß wenn wir in einem Vierecke die einander entgegen gesetzte Seiten gleich machen, diese Seiten auch nothwendig einander parallel zu liegen kommen müssen: gegenwärtig schliessen wir, daraus, daß zwo Seiten parallel liegen, ihre Gleichheit, und über dieses die Gleichheit der Winkel, welche einander entgegen gesetzet sind, oder die, wie man zu sagen pfleget, übereck liegen: beydes wird zugleich eingesehen. Denn wenn man in dem erwehneten Parallelogrammo ABCD eine gerade Linie AC übereck ziehet, so werden die Winkel DCA und CAB, die zwischen den Parallellinien DC und AB nach verschiedenen Seiten liegen, einander nothwendig IV, 185. gleich. Weil aber auch AD der BC parallel lauft, so hat es mit den Winkeln DAC und ABC eben diese Bewandnis. Sie liegen zwischen den Parallellinien AD und CB, von deren einer an die andere die gerade Linie AC gezogen ist, nach verschiedenen Seiten, also sind auch diese Winkel gleich, und es ist demnach das Viereck ABCD durch die Linie AC in zwey Dreyecke zertheilet worden, in welchen beyden die Seite AC zwischen gleichen Winkel lieget. In diesen Dreyecken sind demnach auch die übrigen Winkeln D und B einander gleich, wie auch die Seiten die an den gleichen Winkeln liegen AB und DC, ingleichen AD und CB. IV, 126. Das erste, daß nemlich der Winkel D dem Winkel B gleich sey, ist eines von demjenigen, so von diesen Vierecken zu erweisen war, und man siehet leicht ein, daß eben dasselbe auch von den zweyen Winkeln DAB und BCD auf eben die Art wäre erwiesen worden, wenn man nur gleich Anfangs an statt der Linie AC eine andere von D nach B gezogen hätte. Daß demnach auch diese Winkel DAB und BCD einander gleich seyn müssen. Das zweyte, daß AD = CB, und AB = CD ist die andere Eigenschaft unserer Vierecke, so wir angegeben, daß nemlich in den Vierecken, wel-

F. 88.

IV. Abschnitt.

che wir betrachten, die entgegen gesetzete Seiten einander gleich sind.

§. 199. Man drücket einen Theil dieses Satzes aus, wenn man saget, die Linien DA, BC, welche zwischen den zwoen Linien AB, DC, die einander parallel liegen, dergestalt gezogen sind, daß sie gegen eine dieser Linien sich beyde gleich stark neigen, oder, welches eben das ist, daß diese DA, BC auch selbst einander parallel lauffen, seyen von gleicher Grösse. Und hieraus schliesset man ohne Weitläuftigkeit dasjenige, so wir bereits IV, 192. als bekant angenommen haben, daß nemlich zwo parellellinien überall gleich weit von einander entfernet sind.

§. 200. Es folget aber aus dem Beweis, welchen wir gegeben, daß auch das Dreyeck DAC dem Dreyeck ABC gleich sey, welches noch eine Eigenschaft dieser Art Vierecke ist, welche man dergestalt ausdrücken kan. Ein jedes Parallelogrammum wird durch die gerade Linie, welche in demselben von einer Spitze an die andere queer durchgezogen wird, in zwey gleiche Dreyecke zertheilet.

F. 95.

§. 201. Wir schliessen aus diesem letzterem weiter, daß alle Parallelogrammen, bey welchen einerley Winkel von gleichen Seiten eingeschlossen wird, einander gleich seyn. Die 95 Figur wird die Meynung hiervon deutlicher machen. Wir setzen, daß in den beyden Parallelogrammen ABCD und abcd, die Winkel B und b einander gleich seyn, und daß die Seite AB der Seite ab gleich sey, und die Seite BC der Seite bc, und sagen, daß hieraus auch die Gleichheit der Parallelogrammen selbst folge. Man kan darzu setzen, wenn man will, daß auch die Winkel A, a, ferner D, d, wie auch C, c, einander gleich seyn, wiewohl dieses anzumerken eben nicht sonderlich nöthig ist. Was aber die Gleichheit der Vierecke selbst betrift, so siehet man sie ein, wenn man nur eine Querlinie durch die Spitze der Winkel A und C ziehet, und eine andere durch die Spitze der Winkel a und c. Denn weil B=b, und AB=ab, aber auch BC=bc, so werden in den Dreyecken ABC und abc gleiche Winkel von gleichen Seiten eingeschlossen, und sind also die Dreyecke ABC und abc einander gleich. IV, 112. Demnach muß auch das erste Dreyeck zwey mal genommen, so viel geben, als heraus kommet, wenn man das zweyte gedoppelt nimmet. Nimmet man aber das Dreyeck ABC gedoppelt, so kommt das Parallelogrammum BD, und eben so entstehet das Parallelogrammum bd, wenn man abc zwey mal setzet. Denn die

Drey-

Dreyecke ADC, adc sind, wie eben gezeiget worden, den Dreyecken ABC, abc gleich, und kommen also die Vierecke BD, bd allerdings heraus, wenn man die Dreyecke zweymal nimmet. Und demnach sind auch die Vierecke einander gleich. Die Gleichheit der Winkel, wie wir dieselbe angegeben, ist leicht einzusehen. Denn man siehet aus dem Beweiß leicht, daß die Gleichheit der Vierecke, welche wir erwiesen, von der Art sey, daß dieselben genau auf einander passen, wenn man eines gehörig auf das andere bringet.

IV. Abschnitt.

§. 202. Die summa aller Winkel in einem solchen Viereck beträget genau vier gerade Winkel. Das ist, wenn man alle Winkel eines solchen Vierecks an einander setzen wolte, so würde eben so viel heraus kommen, als man heraus brächte, wenn man vier gerade Winkel mit ihren Spitzen an einander rückte, und die Seiten ebenfals zusammen fallen liesse. Dieses ist gar leicht einzusehen. Die Winkel A und B stehen zwischen den Parallellinien AD und BC nach einerley Seite, und sind also IV, 189. zusammen gesetzt zween geraden Winkeln gleich. Und so ist es auch aus eben dem Grunde mit den zweyen Winkeln D und C, welche ebenfalls zween gerade Winkel ausmachen. Also machen allerdings die Winkel A, B, C und D zusammen vier gerade Winkel.

F. 96.

§. 203. Wenn also in einem solchen Vierecke ein einziger Winkel gerade zu seyn befunden wird, so kan man daraus schliessen, daß die übrigen Winkel desselben alle gerade seyn. Denn gesetzt es sey in dem Parallelogrammum ABCD der Winkel A ein gerader Winkel, so ist C dem Winkel A gleich IV, 198. und derowegen nothwendig ebenfals ein gerader Winkel. Ferner aber machen die beiden Winkel A und B zusammen gesetzt zween gerade Winkel aus, welches nicht geschehen könte, wenn nicht B ebenfals ein gerader Winkel wäre. Denn wäre B kleiner oder grösser als ein gerader Winkel, so würde er mit dem geraden Winkel bey A zusammen gesetzt nothwendig weniger oder mehr bringen als zween gerade Winkel. Eben so kan man zeigen, daß D ebenfals ein gerader Winkel sey, nachdem wir gezeiget, daß der Winkel C gerade sey.

F. 97.

§. 204. Widerum, wenn ein Parallelogrammum einen einzigen schiefen Winkel hat, der nemlich grösser oder kleiner ist, als ein gerader Winkel, so kan man sicher seyn, daß auch die übrige Winkel alle schief seyn müssen. Denn wäre unter diesen letztern Winkeln ein einziger

IV. Abschnitt. ziger gerader anzutreffen, so müsten sie alle gerade seyn, und auch der erste, welchen man schief angenommen, könte nicht schief seyn, und man setzet also etwas sich selbst widersprechendes, wenn man saget, ein Winkel in einem solchen Viereck sey schief, und die übrigen seyn doch nicht schief.

§. 205. Man beschreibet also ein Parallelogrammum, so lauter gerade Winkel hat, nach eben der Weise, welche vor alle und jede dergleichen Vierecke IV, 178. angewiesen worden, aus zwoen Seiten, welche man nach einem geraden Winkel an einander gesetzet. Und es kan hier nichts besonders gesaget werden. AB und BC sind zwo gerade Linien, welche bey B einen rechten Winkel machen. Man leget BC ans A nach D, und BA ans C ebenfalls nach D. Das, nach dieser allgemeinen Weise beschriebene Parallelogrammum BD wird lauter gerade Winkel haben, weil der bey B gerade ist. Dergleichen Parallelogrammen die keine andere als gerade Winkel haben, heissen geradewinklichte Parallelogrammen.

§. 206. Man kan hier die Seiten AB und BC, wie bey allen Parallelogrammen, von beliebiger Grösse nehmen, wie man leicht aus ihrer Beschreibung siehet; aber wenn man diese Grösse einmal bestimmet hat, so werden alle die geradewinklichten Parallelogrammen, welche man daraus machet, von einerley Grösse. Denn weil die Winkel nothwendig gerade sind, (sonst wären es keine geradewinklichte Parallelogrammen,) so werden bey allen solchen Parallelogrammen, die aus den Seiten AB und BC zusammen gesetzet sind, gleiche Winkel von gleichen Seiten eingeschlossen, und müssen demnach alle diese Parallelogrammen dem zu folge, so IV, 201. erwiesen worden, gleich seyn.

§. 207. Und da die Grösse der Seiten AB und BC beliebig ist, so kan man auch diese Seiten einander gleich machen. Geschiehet dieses, so bekommet das Parallelogrammum lauter gleiche Seiten, weil die übrigen denjenigen, welchen sie entgegen stehen, nothwendig gleich sind IV, 199. Ein dergleichen Parallelogrammum nennen einige eine Raute. Ist aber dasselbe rechtwinklicht, so heisset es mit einem besondern Namen ein Quadrat.

F. 98. §. 208. Es wird also ein Quadrat noch eben so, wie insgemein alle Parallelogrammen beschrieben. Es darf aber dazu nichts weiter gegeben seyn, als eine Seite AB. Denn man weiß den Winkel bey B ohne dem, weil er, nach dem Begrif des Quadrats, gerade seyn muß, und kan ihn allezeit machen.

chen. Ferner ist auch die Seite BC bekannt, als die der Seite AB gleich ist. Aus dem Winkel B aber und den Seiten AB, BC lässt sich das Quadrat nach der Anweisung IV, 178. ausmachen, nach welcher ein jedes Parallelogrammum aus einem Winkel und zwoen Seiten, die ihn einschliessen, verfertiget wird.

IV. Abschnitt.

§. 209. Alle Quadrate von gleichen Seiten haben einerley Grösse. Man mache aus der Seite AB noch ein anderes Quadrat und ein drittes, es wird keines von diesen grösser oder kleiner seyn, als dasjenige so wir gezeichnet AC. Dieses ist an sich klar, und man kan es auch aus dem Einsehen so von der Gleichheit aller Parallelogrammen IV, 201. gesagt worden. Nimmt man aber eine Seite AB kleiner als eine andere AC, und setzet auf die erstere ein Quadrat AD, so wird dieses nothwendig kleiner als das Quadrat AE, welches man auf die grössere Seite AC setzen kan. Bloß die Betrachtung der Figur kan uns hievon vollkommen überzeugen.

F. 99.

§. 210. Alle diese Eigenschaften der Parallelogrammen können ohne grosse Schwierigkeiten aus den Sätzen von der Parallelen Lage zwoer geraden Linien eingesehen werden, und so ist es auch mit der nächstfolgenden Beschreibung dieser Vierecke. Man nehme zwo gerade Linien an, die einander gleich sind und parallel liegen, AD und BC, man hänge ihre äussersten Puncte vermittelst der geraden Linien AB und DC zusammen. Das Viereck AC ist ein Parallelogrammum. Auch dieses zeiget die natürliche Vernunft, von welcher wir uns jederzeit so wenig als möglich ist, zu entfernen vorgesetzet. Man betrachte die Figur auf einer und der andern Seite, und drehe sie, wenn man es vor gut befindet, und sage so dann, auf welcher Seite wohl die geraden Linien AB und DC zusammen kommen würden, wenn man sie verlängert, ob oben oder unten. Beides zugleich kan nicht geschehen, denn das streitet wider die ersten Eigenschaften der geraden Linien: Warum sie aber einander vielmehr auf dieser als auf jener Seite antreffen solten, lässt sich nicht gedenken, es folget demnach daß diese Linie AB und CD gar nicht zusammen lauffen werden, und daß sie demnach eben so wie AB und CD einander parallel sind.

F. 96. 97. 98.

§. 211. Um aber in unserem Zusammenhang zu bleiben, müssen wir wieder, wie bisanhero öfters geschehen, eine Queer-Linie AC ziehen. Weil nun gesetzt worden, daß AD der BC parallel sey, so sind auch die Winkel DAC und ACB einander gleich. Es ist aber auch die

F. 88.

IV. Abschnitt. die Seite AD der Seite BC gleich angenommen worden, und AC ist der CA, das ist, sich selbst, nothwendig gleich; derowegen werden in den Dreyecken DAC, und ACB gleiche Winkel DAC und ACB von den gleichen Seiten AD = BC, und AC = CA eingeschlossen, und sind demnach auch die übrigen Seiten dieser Dreyecke, das ist, die Seiten des Vierecks AB und CD einander gleich IV, 112. Demnach bestehet unser Viereck aus Seiten deren jede derjenigen, welcher sie entgegen stehet, gleich ist, und ist demnach dasselbe wie alle Vierecke, deren Seiten sich dergestalt gegen einander verhalten, ein Parallelogrammum IV, 180.

Von den Winkeln der geradelinichten Figuren.

§. 212. Dieses sey von den Parallel-Linien genug gesagt, deren Eigenschaften wir begriffen haben, so bald wir drey gerade Linien auf eine besondere Art zusammen gesetzet. Wir nehmen nun die übrige zusammensetzung dreyer geraden Linien vor uns, und fallen also wieder in die Lehre von den Dreyecken. Wir haben gesehen, daß wenn zwo gerade Linien AB, CD auf einer dritten AC dergestalt stehen, daß die zween Winkel BAC und ACD zusammen zween geraden Winkeln gleich sind, diese Linien AB und CD nicht zusammen lauffen können, wie weit man sie auch verlängert IV, 82. Wir haben gesehen, daß wenn man von dem Punct A noch eine andere gerade Linie ziehet innerhalb der AB, dergleichen die AE ist, diese, wenn sie genugsam verlängert wird, die gerade Linie CD endlich gewiß antreffen werde IV, 183. Geschicht dieses, und die beiden geraden Linien CD und AE treffen einander, wenn man sie verlängert, in F an, so wird aus denselben mit der Linie AC ein Dreyeck ACF. F, 100.

§. 213. Die zween Winkel dieses Dreyecks ACF und CAF machen nothwendig weniger aus als zween gerade Winkel. Denn damit ACF zu zween geraden Winkeln erwachse, muste man zu demselben den Winkel CAB hinzusetzen. Es ist aber CAE der an dessen Stelle zu ACF hinzugesetzet worden, kleiner als CAB, und es kan durch diesen kleinern Zusatz ohnmöglich so viel kommen, als man erhalten, da man den Winkel CAB zu eben dem ACF setzete. Also bringt CAE zu ACF hinzugesetzet weniger als zween gerade Winkel.

§. 214. Und wenn man demnach auf eine gerade Linie AC, zwo andere CD und AE so setzen wil, daß sie, wenn sie gehörig verlän-

längert werden, einander irgendwo, als in F, antreffen, so müssen die zween Winkel ACF und CAE so angenommen werden, daß sie zusammen weniger geben, als zween gerade Winkel. Wolte man dieselbe so nehmen, daß sie zusammen gesetzet zween gerade Winkel brächten, so würden die Linien parallel lauffen, und einander nirgends antreffen: machte man aber die zween Winkel ACD und EAC grösser als zween gerade Winkel, wie in der 101 Figur geschehen, so würden sich die Linien CD, AE so gar von einander neigen, und einander noch viel weniger antreffen, ob sie zwar, wenn man sie nach der andern Seite zurück verlängerte, ein Dreyeck ACF ausmachen würden. Es sind aber auch auf dieser Seite die Winkel CAF + FCA kleiner als zween gerade Winkel, wie man sehen kan, wenn man auch die BA, welche der CD parallel lieget, nach Belieben, in H zurück ziehet.

F. 101.

§. 215. Man kan sich auch so erklären: Zwo gerade Linien AE, CD, welche beide auf einer dritten Linie AC stehen, lauffen nicht zusammen, und machen kein Dreyeck, wenn nicht, nachdem die AC in G verlängert worden, der äussere Winkel DCG, grösser ist als der innere EAC. Denn wäre DCG dem innern Winkel EAC gleich, wie er dem Winkel BAC gleich ist, so würden die zwo Linien, die man an AC gesetzet, parallel fallen, wie denn die AB der CD parallel ist; und man siehet leicht ein, was erfolget wäre, wenn man an statt des EAC einen Winkel angenommen hätte, welcher noch grösser ist, als der äussere DCG.

F. 100.

§. 216. Demnach sind in einem jeden Dreyeck ACF jede zween Winkel CAF und ACF zusammen, kleiner als zween rechte Winkel: Und wenn man eine Seite desselben AC in G verlängert, so wird der äussere Winkel GCF grösser als der innere CAF, welcher ihm entgegen stehet.

§. 217. Wie groß aber alle drey Winkel eines Dreyecks sind, und wie viel der innere Winkel CAF kleiner sey, als der äussere GCF, kan aus eben dieser Figur nachfolgender massen geschlossen werden. Weil die Parallellinien AB und CD von der Linie AF geschnitten werden, so sind die Winkel EAB und AFC einander gleich IV, 79. Nimmet man also von dem Winkel BAC den Winkel BAE hinweg, und setzet an seine Stelle den Winkel F hinzu, so ist allerdings der übrig gebliebene Winkel CAE mit dem bey F so groß als der Winkel CAB. Da nun aber CAB mit dem Winkel ACF zween geraden Winkeln

IV. Abschnitt.

gleich ist, so muß auch die besagte Summe der Winkel CAE+F mit CAF zween gerade Winkel ausmachen.

§. 218. Will man sich dieses in der Form einer Rechnung vorstellen, so kan man so verfahren: Es ist ACF=ACF, CAF=CAF und FAB=F. Man setze oder addire die ersteren dieser Winkel zusammen, wie auch die letztern, so erhält man ACF+CAF+FAB= ACF+CAF+F, oder weil CAF+FAB=CAB, so ist ACF+ CAB=ACF+CAF+F. Nun sind die zween Winkel ACF+ CAB zween geraden Winkeln gleich, derowegen müssen auch die drey Winkel ACF+CAF+F zusammen gesetzet, zween gerade Winkel ausmachen. Und so viel betragen alle Winkel in einem jeden Dreyeck, nemlich zween gerade Winkel, denn man kan in einem jeden Dreyeck ACF, AB mit CF parallel ziehen, und den Beweiß so führen wie wir eben gethan.

§. 219. Fast auf eben die Art siehet man, daß wenn man eine Seite des Dreyecks AC verlängert, der äussere Winkel GCF den beyden innern CAF+F, welche jenem GCF in dem Dreyecke entgegen stehen, zusammen genommen, gleich seyn müsse. Denn da der Winkel BAF dem Winkel F gleich ist, so ist, wie wir auch bereits gesehen, der Winkel CAB (=CAF+BAF) der Summe der Winkel CAF+F gleich. Da nun der Winkel GCF dem Winkel CAB gleich ist, so ist er auch die Summe der zween Winkel CAF+F, welche ihm in dem Dreyeck ACF entgegen stehen.

§. 220. Man kan diesen wichtigen Satz auch auf viele andere Arten einsehen. Wir wollen zu desto deutlicherem Verstand von diesen Beweisen einen einzigen hieher setzen, welcher aus dem erwiesenen gar leicht fliesset. Ein jedes Dreyeck läst sich durch den Zusatz eines andern Dreyecks, dessen Seiten mit den vorigen einerley sind, in ein Parallelogrammum verwandeln. IV, 179. Man thue dieses mit dem Dreyeck ABC, und mache aus demselben, durch Beysetzung des Dreyecks ADC das Parallelogrammum BD. Die Winkel dieser zwey Dreyecke ABC und ACD müssen einander gleich seyn, denn dieses erfolget aus der Gleichheit ihrer Seiten. Also muß auch die Summe aller Winkel in dem Dreyeck ABC so groß seyn, als die Summe aller Winkel in dem Dreyeck ACD. Es machen aber alle Winkel beyder Dreyecke zusammen gesetzt die Winkel des Vierecks aus, wie selbst aus der Figur ohne weiteren Umschweif sichtlich ist. Demnach ist die

F. 102.

Sum-

Summe der Winkel des einen Dreyecks ABC die Helfte der Summe aller Winkel des Vierecks BD. Da nun alle Winkel des Vierecks vier geraden Winkeln gleich zu seyn befunden worden, IV, 202. so müssen die Winkel des Dreyecks ABC welche halb so viel machen, zween geraden Winkeln gleich seyn: und das war unser erster Satz.

IV. Abschnitt.

§. 221. Daß aber, wenn man die Seite BC eines Dreyecks ABC verlängert, der äussere Winkel DBA, so groß sey, als die beyden innern, welche ihm entgegen stehen A und C, kan hieraus leicht geschlossen werden. Die beyden Winkel bey B, sind zusammen genommen zween rechten Winkeln gleich, weil sie neben einander auf einer geraden Linie DBC stehen, oder DBA + ABC = 2 R. Vorher haben wir gesehen, IV, 218. daß alle Winkel des Dreyecks ABC auch zween rechten Winkeln gleich sind, oder daß ABC + A + C ebenfals = 2 R. Derowegen ist auch DBA + ABC = ABC + C + A. Nimt man nun beyderseits den Winkel ABC weg, so muß auch gleiches übrig bleiben; und da nach diesem Abzug auf der einen Seite DBA, und auf der andern A + C übrig bleibet, so müssen diese Winkel gleich seyn, DBA nemlich der Summe der zween A + C.

F. 103.

§. 222. Diese Sätze setzen uns nunmehro in Stand die Arten von allen Winkeln in den Dreyecken zu bestimmen, wie auch die Summen der Winkel in allen übrigen Figuren, sie mögen so viele Winkel haben als man will. Vor allen sehen wir hieraus ein, daß in jeden zwey Dreyecken, bey welchen die Summen zweyer Winkel, welche man auch nehmen will, gleich gefunden werden, auch die dritten Winkel gleich seyn müssen, es mögen nun die erst besagten Winkel auch einzeln genommen gleich seyn, oder nicht. Gesetzet, es sind in den Dreyecken ABC und abc die Summen der Winkel B + C, und b + c einander gleich, ob zwar eben nicht B = b, und C = c, wiewohl dieses auch nichts hindert wenn es vorkommet; so müssen auch die Winkel A und a gleich seyn. Denn wenn sie nicht gleich wären, so könte ohnmöglich A zu B + C hinzugesetzet eben die Summe geben, welche a mit b + c herausbringet. Die Summen aber aller Winkel sind in allen Dreyecken von einer beständigen Grösse, und überall einerley, weil sie jederzeit zween gerade Winkel betragen.

F. 104.

§. 223. Oder man schliesse so: A + B + C = 2 R = a + b + c. Dieses wissen wir, daß es von jeden zwey Dreyecken richtig sey, was man auch vor welche nehmen will. Nun wird gesetzet, es sey B + C = b + c,

IV. Abschnitt. $= b + c$, und wenn man diese Summen von den vorigen wegnimmet, so bleibet wie allezeit, wenn man gleiches von gleichen abziehet, auch gleiches übrig. Derowegen sind die dritten Winkel A und a einander gleich.

§. 224. Was aber die Grössen der Winkel in den besondern Arten der Dreyecke anlanget, so ist aus dem gezeigten überflüssig klar, daß in einem Dreyeck ohnmöglich zween würklich gerade Winkel seyn können. Denn da jede zween Winkel eines jeden Dreyecks zusammen gesetzet nothwendig weniger machen als zween gerade Winkel, so können zween derselben ohnmöglich selbst gerade Winkel seyn. Es sind demnach in einem jeden rechtwinklichten Dreyeck IV, 101. die Winkel, welche ausser dem geraden bey denenselben anzutreffen sind, gewiß spitzig. Denn stumpf kan einer derselben vielweniger seyn als gerade, weil er sonst mit dem geraden Winkel, der in einem geradelinichten Dreyeck nothwendig seyn muß, noch mehr als zween gerade Winkel machen würde. In einem rechtwinklichten Dreyeck machen auch die übrigen Winkel, die ausser dem geraden Winkel in demselben anzutreffen sind, zusammen gesetzet wieder einen geraden Winkel aus. Denn wäre dieses nicht, so könten sie nicht mit dem geraden Winkel zusammen genommen zween gerade Winkel ausmachen, welches doch seyn muß.

§. 225. Eben so siehet man ein, daß in einem stumpfwinklichten Dreyeck, IV, 101. die beyden übrigen Winkel so ausser dem stumpfen in demselben vorkommen, gleichfals spitzig seyn müssen. Denn wäre einer davon gerade oder stumpf, so würde er, mit dem vorigen stumpfen zusammen gesetzt, eine Summe geben, die grösser ist als zween gerade Winkel.

§. 226. Sonst aber hindert nichts, daß nicht in einem Dreyeck lauter spitzige Winkel vorkommen sollen. Man nehme zween Winkel eines Dreyecks zwar spitzig, aber so groß, daß sie, wenn man sie zusammen setzet, mehr bringen, als einen geraden Winkel, so muß nothwendig der dritte Winkel kleiner seyn als ein gerader, und demnach spitzig werden. Es sind also spitzwinklichte Dreyecke IV, 103. möglich, und daß sie möglich sind, ist auch vor sich gar leicht einzusehen.

§. 227. Was aber die gleichschenklichten Dreyecke anlanget, so sind die Winkel derselben an der Grundlinie nothwendig spitzig. Denn sie sind einander gleich, und wäre demnach einer derselben gerade oder stumpf, so müste der andere ebenfals gerade oder stumpf seyn, und

und man bekäme also ein Dreyeck von zwey geraden oder stumpfen Winkeln, so nicht möglich ist. Man kan aber diese Winkel an der Grundlinie so klein und spitzig machen als man will, und dadurch kan der dritte Winkel, der der Grundlinie entgegen gesetzt ist, so groß werden, als man will, und folgends gerade oder stumpf: doch wir haben diese Sache schon längst IV, 107. aus andern Gründen eingesehen.

§. 228. In einem gleichseitigen Dreyeck sind alle Winkel gleich, IV, 119. und machen wie alle Winkel in jedem Dreyeck zusammen gesetzet zween gerade Winkel aus. Es muß demnach ein jeder dieser Winkel der dritte Theil von zween geraden Winkeln seyn, oder zwey Drittel von einem geraden Winkel. Denn ein Drittel von der zwey (und folgends zween geraden Winkeln) ist so viel als zwey Drittel von der eins, (oder von einem geraden Winkel) nemlich 2 durch 3 dividiret, giebt $\frac{2}{3}$.

§. 229. Aus diesem allen siehet man ein, daß wenn in einem Dreyeck die Summe zweyer Winkel bekannt ist, man mag sie nun auch einzeln wissen oder nicht, man auch den dritten Winkel leicht haben könne. Denn man darf zu dem Ende nur die bekannte Summe der zween Winkel von zween geraden Winkeln abziehen, so bleibt der dritte übrig. Gesetzt, ich weiß daß ein Winkel eines Dreyecks $\frac{2}{3}$ von einem rechten Winkel sey, und der andere $\frac{3}{4}$, oder ich weiß nur die Summe dieser zween Winkel $\frac{17}{12}$, so nehme ich dieselbe von 2 geraden Winkeln, oder von $\frac{24}{12}$ eines geraden Winkels weg, so bleiben $\frac{7}{12}$ eines geraden Winkels vor die Grösse des dritten Winkels übrig.

§. 230. Geometrisch ist eben das zu verrichten, viel leichter, und wir haben das obige nur zum deutlicherem Verstand angeführet. Denn eigentlich müssen hier alle Aufgaben durch Linien und Figuren aufgelöset werden, und das Rechnen hat, wenn man genau verfahren will in der Geometrie, ausser wenn es die Beschaffenheit der Sache unumgänglich erfordert, keine statt. Wir würden alles durch einander werffen, wenn wir hierinne sehr vielen neuern, die von diesen Materien geschrieben, folgen würden. Und eben dieses ist von vielen anderen ihren Lehrarten zu sagen. Es ist nicht alles Gold was gleisst, und man muß sich hüten, etwas bloß deswegen zu bewundern, weil es eine Menge anderer hochschätzet, unter welchen vielleicht niemand ist, der einigen Grund seiner Bewunderung anzugeben wüste.

IV. Abschnitt. Es ist aber leicht einzusehen, daß, indem man die Geometrie abhandelt, es eben so wunderlich sey, sich der Rechenkunst zur Auflösung der Aufgaben zu bedienen, als wunderlich es gehandelt wäre, wenn man einem das Drechseln weisen wolte, welcher im Tanzen unterrichtet seyn will.

F. 105. §. 231. Gesetzt nun, es sey der Winkel ABC die Summe zweer Winkeln eines Dreyecks, und man will den dritten Winkel finden, so ziehe man nur eine der Seiten als BC weiter fort nach D. Der Winkel ABD ist der gesuchte dritte Winkel des Dreyecks. Denn dieser dritte Winkel des Dreyecks ist derjenige, welcher mit der Summe der zween gegebenen, oder mit ABC zween rechte Winkel ausmachet: und dieses thut der Winkel ABD, und kein anderer.

§. 232. Auf eben die Art verfähret man, wenn ein Winkel eines Dreyecks bekannt ist, und man will die Summe der beyden übrigen wissen. Man ziehet den gegebenen Winkel von zwey geraden Winkeln ab, das Ueberbleibsel ist die Summe der beyden übrigen Winkel des Dreyecks, als welche nothwendig von der Grösse seyn müssen, daß sie mit dem bekannten, zween gerade Winkel vollmachen.

§. 233. Und hieraus siehet man, daß wenn in einem gleichschenklichtem Dreyeck nur ein einziger Winkel gegeben ist, man die übrigen beyde finden könne. Denn dieser gegebene Winkel ist entweder derjenige, welcher der Grundlinie entgegen stehet, oder einer von denjenigen, welche an der Grundlinie liegen. Ist der Winkel gegeben, welcher der Grundlinie entgegen stehet, so hat man die Summe der beyden übrigen, wie wir eben gewiesen. Ob nun zwar, wenn das Dreyeck nicht gleichschenklicht ist, man darum die Grösse der Winkel nicht einzeln haben kan, weil wohl tausenderley Winkel zusammen gesetzet gleiche Summen geben können, so gehet doch dieses bey den gleichschenklichten Dreyecken an. Die Winkel, welche an der Grundlinie eines solchen Dreyecks liegen, sind einander gleich IV, 116. und ist also ein jeder die Helfte ihrer Summe. Wenn man demnach die Summe derselben gefunden, so darf man hernach nur dieselbe halb nehmen, um die Winkel auch einzeln zu haben. Ist aber in einem gleichschenklichten Dreyeck ein Winkel an der Grundlinie gegeben, so hat man so gleich auch den andern; und der dritte Winkel, welcher der Grundlinie entgegen stehet, kan eben so gefunden werden, wie in einem jeden Dreyeck der dritte Winkel gefunden wird, wenn deren zween gegeben sind.

§. 234. Wir

IV. Abschnitt.

F. 106. 107.

§. 234. Wir haben nicht nöthig hier bey den Dreyecken stehen zu bleiben. So bald wir die Summe aller Winkel in einem Dreyeck wissen, so können wir auch die Summen aller Winkel in einer jeden andern geradelinichten Figur finden. Man kan innerhalb einer jeden solchen Figur ein Punct nehmen, wie hier A, und von demselben gerade Linien nach allen Ecken der Figur ziehen. Dadurch wird die Figur in Dreyecke zertheilet, und dieser Dreyecke werden an der Zahl so viele, als viele Seiten die Figur hat. Es ist leicht die Zahl aller Winkel in allen diesen Dreyecken zu finden. Alle Winkel eines jeden derselben sind zween rechten Winkeln gleich. Es sind aber der Dreyecke so viel als Seiten sind. Also werden in allen Winkeln aller Dreyecke zusammen so vielmal zween rechte Winkel enthalten seyn, als viele Seiten das Vieleck hat. Und man darf also nur zween rechte Winkel durch die Zahl der Seiten des Vielecks multipliciren, um zu finden, wie viele rechte Winkel in allen den Dreyecken, in welche es zertheilet worden, enthalten sind. So sind in allen Winkeln der vier Dreyecke, in welche das Viereck BCDE zertheilet worden zweymal vier oder acht gerade Winkel enthalten, in den fünf Dreyecken, in welche wir das Fünfeck BCDEF getheilet haben, sind zweymal fünf oder 10 gerade Winkel. Es machen aber die Winkel der Dreyecke zum Theil die Winkel der Figur aus, wenn man sie zusammen setzet. Aus den zween Winkeln der Dreyecke bey B entstehet der Winkel des Vielecks EBC, aus den zween Winkeln der Dreyecke bey C entstehet der Winkel des Vielecks bey C und so ferner rings herum. Wenn sonst keine andere Winkel in den Dreyecken vorkämen als die bey B, C, D, so wäre die Summe aller Winkel der Dreyecke mit der Summe aller Winkel der Vielecke einerley. Es sind aber in den Dreyecken ausser den besagten Winkeln bey B, C, D, E, F noch andere Winkel enthalten, nehmlich die inwendig um das Punct A herum stehen. Diese sind in der Summe der Winkel der Dreyecke mit enthalten, gehören aber zu der Summe der Winkel des Vielecks keinesweges. Um diese Winkel ist die Summe aller Winkel der Dreyecke grösser als die Summe aller Winkel des Vielecks. Diese Winkel müssen demnach von der Summe aller Winkel der Dreyecke weggenommen werden. Wir wissen wie groß die Summe aller dieser Winkel, die um C stehen, ist. Sie beträgt, wie sonst jede dergleichen Summen aller Winkel die um ein Punct herum stehen, vier gerade Winkel. IV, 68. Diese vier gerade Winkel müssen also von der gefundenen Summe aller Winkel der Dreyecke weggenommen wer-

IV. Abschnitt.

den, damit man die wahre Summe aller Winkel des Vielecks erhalte.

§. 235. Demnach ist die Regul die Summe aller Winkel in einem jeden Vieleck zu finden, diese: Man multiplicire zwey rechte Winkel durch die Zahl der Seiten des Vielecks, von dem Product nehme man vier gerade Winkel weg, so bleibt die Summe aller Winkel des Vielecks übrig. Diesem zu folge sind alle Winkel in einem jeden Viereck zweymal vier geraden Winkeln weniger vieren, das ist, vier geraden Winkeln gleich. Alle Winkel in einem jeden Fünfeck betragen zweymal 5 oder 10 gerade Winkel weniger viere, oder sechs gerade Winkel: Alle Winkel in einem jeden Sechseck betragen zweymal sechs oder zwölf gerade Winkel, weniger viere, das ist acht gerade Winkel: Alle Winkel in einem jeden drey und zwanzig Eck betragen zweymal 23, oder 46 gerade Winkel, weniger viere, das ist 42 gerade Winkel, und so ferner.

§. 236. Es ist aber hiebey zu merken, daß wenn die Spitzen einiger Winkel solcher Figuren einwärts lauffen, man nicht die Winkel, welche auswärts fallen, finde, sondern die Summe der Winkel, welche inwendig um diese Spitzen stehen. Der Winkel CDE läuft einwärts. Indem man die Summe aller Winkel des Vielecks BCDEF, wie gewiesen worden, berechnet, bekommet man den Winkel CDE nicht, denn dieses giebt keinen Winkel in einigen der Dreyecke, in welche das Vieleck zertheilet worden: sondern man findet die Summe der beyden Winkeln der gedachten Dreyecke, deren Spitzen in D fallen, welche Summe man demnach vor den Winkel der Figur CDE halten muß. Oder man muß sich vorstellen, daß die beyden geraden Linien CD und DE einen Winkel nach innen zu einschliessen, der grösser ist als zween rechte Winkel. IV, 69. Ausser dem würde der Satz nicht wahr seyn. Denn es ist nicht an dem, daß die Summe aller übrigen Winkeln der Figur bey B, C, E und F, zusamt dem äussern Winkel CDE so viel betrage, als durch die gegebene Regul gefunden wird. Wohl aber beträget die Summe aller übrigen Winkel, zusamt den beyden die innerhalb der Figur bey D liegen, so viel, nemlich weil von einem Fünfeck die Rede ist, sechs rechte Winkel.

F. 107.

§. 237. Dieses ist was man überhaupt von allen Winkeln aller Figuren wissen kan. Die Summe derselben hat eine bestimte Grösse. So lang die Zahl der Seiten einer Figur einerley bleibet, so lang blei-

bleibet auch die Summe aller Winkel einerley, und wie diese Summe zu finden sey, haben wir gewiesen, an sich aber und einzeln betrachtet, können die Winkel der Figuren gar sehr verschieden seyn. Ob zwar die Summe aller Winkel in einem jeden Viereck nothwendig so groß ist, als die Summe von vier geraden Winkeln, so ist es doch nicht nothwendig, daß einer dieser Winkel des Vierecks, welchen man auch annehmen wil, nothwendig gerade sey. Er kan stumpf oder spitzig seyn, und so ist es mit dem zweeten, und dritten; man kan die Grösse eines derselben ins besondere aus ihrer bekanten Summe nicht errathen, oder einen allgemeinen Satz angeben, nach welchem die Grössen dieser Winkel einzusehen wären. Doch ist dieses allen diesen Figuren gemein, daß wenn in denselben die Summe aller Winkel gegeben ist ausser einen, man diesen leicht finden könne, wie wir dieses bereits ins besondere von den Dreyecken IV, 229. gewiesen. Denn man darf nur die gegebene Summe aller Winkel ausser einen von der Summe aller Winkel der Figur abziehen, so bleibet der einzige Winkel übrig, welcher in der Summe ausgelassen worden. In einem jeden Fünfeck beträget die Summe aller Winkel so viel als sechs gerade. Ist nun in einem Fünfeck die Summe von vier Winkeln desselben so viel als $4\frac{2}{3}$ gerade Winkel, so muß der fünfte Winkel $1\frac{1}{3}$ eines geraden Winkels seyn.

IV. Abschnitt.

§. 238. Sind aber die Winkel einer gegebenen Figur als A alle gleich, so hat es eine ganz andere Bewandniß. In diesem Fall kan man aus der Summe aller Winkel auch einen jeden derselben ins besondere finden, auf eben die Art wie wir oben IV, 228. die Grösse eines Winkels in einem jeden gleichseitigen Dreyecke bestimmet haben. Man darf nur die Summe aller Winkel durch die Zahl derselben, das ist durch die Zahl der Seiten der Figur, theilen, so bekömmet man die Grösse eines jeden einzelnen Winkels. In einem Quadrat zum Exempel sind alle Winkel gleich, wie groß ist einer derselben? Die Summe aller Winkel in einem jeden Viereck beträget vier gerade Winkel. Im gegenwärtigen Fall sind die vier Winkel, welche zusammen vier gerade ausmachen, einander gleich. Dieses könte ohnmöglich seyn, wenn nicht ein jeder derselben selbst ein gerader Winkel wäre. In einem jeden Fünfeck beträget die Summe aller Winkel so viel als sechs gerade. Sind nun die Winkel in einem Fünfecke einander gleich; so ist ein jeder derselben der fünfte Theil von allen, und kommet, wenn man die Summe aller, oder sechs gerade

F. 108.

IV. Abschnitt. Winkel durch die Zahl der Winkel 5 theilet. Daß demnach ein Winkel eines solchen Fünfecks $\frac{6}{5}$, oder $1\frac{1}{5}$ eines geraden Winkels seyn wird, und eben so verfähret man in allen übrigen Fällen.

Wie die Seiten der Dreyecke durch die ihnen entgegen gesetzte Winkel bestimmet werden.

§. 239. Dieses ist alle der Nutzen, welchen wir gegenwärtig aus der Käntnis der Summe aller Winkel eines jeden Dreyecks ziehen können. Und da wir also die Dreyecke so wohl nach ihren Seiten ins besondere, als auch nach ihren Winkeln ins besondere betrachtet, so ist noch übrig daß wir beydes zusammen nehmen, und sehen wie und auf was Weise wir die Grösse der Winkel aus der Grösse der Seiten, und diese aus jener schliessen können.

§. 240. Es lässet sich aber von dieser Materie nichts vollkommenes sagen, und ausser demjenigen so von gleichschenklichten und gleichseitigen Dreyecken bereits vorgekommen, da wir nemlich aus der Gleichheit der Winkel die Gleichheit der Seiten, welche ihnen entgegen gesetzet sind, geschlossen, können wir nur noch dieses einzige hinzuthun, daß in einem jeden Dreyecke diejenige Seite grösser sey als eine andere, welcher ein grösserer Winkel entgegen stehet. Es sey von dem Dreyeck ABC, bekant, daß der Winkel A grösser sey als der Winkel B. Ich sage man werde sicher schliessen können, daß auch die Seite BC welche dem grössern Winkel A entgegen gesetzet ist, grösser sey als die Seite AC die dem kleinern Winkel B entgegen stehet.

F. 109.

§. 241. Man kan dieses einiger massen abnehmen, wenn man die Seite BC nach Belieben in D verlängert, und so wohl CA um A als auch BD um B dergestalt beweget, daß das äusserste Punct C der Seite AC niemals ausser BD falle, wie wir die Sache sich dergestalt vorzustellen, bereits einige mal gerathen. Es wird, indem der Winkel bey A auf die Weise verkleinert wird, die Seite BC nothwendig mit verkleinert, und es kan demnach der Winkel A nicht wachsen oder abnehmen, wenn nicht auch zugleich die gegen überstehende Seite wächset oder abnimmet. Alleine weil bey dieser Versetzung der Seite AC, die Seite BC nicht immer einerley Lage behalten kan, sondern sich immer anders gegen AB neigen muß, damit sie beständig durch C gehe, so ist die Sache hier so vollkommen deutlich nicht, und also entfernen wir uns immer mehr und mehr von demjenigen, so auch blos durch

den

den natürlichen Verstand, ohne vorhergehende Wissenschaft eingesehen werden kan, und werden je mehr und mehr gezwungen uns der bereits erlangten Erkäntniß zu bedienen, um einen oder den andern Schritt weiter zu thun.

IV. Abschnitt.

§. 242. In der Betrachtung, welche wir vorhaben, kommen uns die bereits erkanten Eigenschaften eines gleichschenklichten Dreyecks zu Hülfe. Weil man setzet, daß in dem Dreyeck CAB der Winkel CAB grösser sey als der Winkel B, so setzen wir an A einen Winkel, welcher dem Winkel B gleich ist. Dieser sey DAB. Dadurch wird nothwendig auch die Seite AD der DB gleich. IV, 128. Ist nun aber AD=DB, so muß auch dasjenige gleich seyn, so heraus kommet, wenn man zu beyden der besagten Linien gleiches hinzu setzet. Wir wollen beyderseits CD hinzu setzen; AD giebt mit dem Zusatz von DC, zwo Seiten des Dreyecks ADC, oder den Theil seiner Gränzen AD+DC. Die der AD gleiche Linie BD aber, wird nach eben dem Zusatz der DC, die ganze Linie BC. Diese BC muß demnach den beyden Linien AD+DC gleich seyn. Nun ist AD+DC nothwendig grösser als AC, denn zwo Seiten in einem Dreyeck zusammen genommen, sind allezeit grösser als die dritte Seite. Also wird auch BC welche ebenfals so viel beträget als AD+DC, grösser seyn als AC. Das ist, in dem Dreyecke ABC ist die Seite BC, welche dem grössern Winkel CAB entgegen gesetzet ist, nothwendig grösser als die Seite AC, welche dem kleinern Winkel B entgegen stehet, und dieses ist dasjenige, so erwiesen werden solte.

F. 110.

§. 243. Ist demnach in einem Dreyeck ein Winkel der Gröste unter allen, die in demselben vorkommen, so ist auch die Seite, die demselben entgegen lieget, die Gröste unter allen Seiten desselbigen Dreyecks. In einem gerade winklichten Dreyeck ist allezeit der gerade Winkel selbst der Gröste unter allen Winkeln die in demselben Dreyeck vorkommen. Denn wie wir IV, 224. gesehen, so sind die übrigen beyden Winkel, die ausser dem geraden in einem solchen Dreyeck befindlich sind, nothwendig spitzig, und folgends kleiner als der gerade Winkel. Es ist demnach auch die Seite welche in einem geradewinklichten Dreyeck dem geraden Winkel entgegen gesetzet ist, grösser als eine der übrigen. Und noch vielmehr ist in einem stumpfwinklichten Dreyeck diejenige Seite, welche dem stumpfen Winkel entgegen stehet, die gröste unter allen Seiten desselbigen Dreyecks. Man

kan

IV. Abschnitt. kan hier eben den Schluß machen, welcher bey dem rechtwinklichten Dreyeck angewandt worden, und die Sache ist an sich leicht einzusehen.

§. 244. Nun hätten wir noch eine einzige Betrachtung der Dreyecke übrig. Wir haben gesehen, wie sie aus einem Winkel und zween Seiten entstehen, welche denselben Winkel einschliessen, IV, 98. und diejenige Eigenschaften der Dreyecke angemerket, welche wir aus dieser Art die Dreyecke zusammen zu setzen, einsehen konten. Wir haben Dreyecke aus ihren dreyen Seiten zusammen gesetzet, IV, 130. und diese Zusammensetzung zur Auflösung verschiedener nützlichen Aufgaben gebraucht. Endlich haben wir uns auch vorgestellet, wie ein Dreyeck aus einer geraden Linie und zween Winkeln werden möge. IV, 212. Es ist noch ein einziges zu betrachten übrig, nemlich, wie man ein Dreyeck aus einem Winkel an zween Seiten machen könne, welche diesen Winkel nicht einschliessen.

§. 245. Oder, die Sache auf eine andere Art einzusehen, so haben wir ein Dreyeck zu machen, erstlich an eine gegebene gerade Linie AB von gegebener oder nach Belieben angenommener Länge, eine andere gerade Linie AC gesetzet, und so dann das Dreyeck mit einer neuen geraden Linie zwischen BC geschlossen. Zweytens haben wir, ein Dreyeck auszumachen, auf eine gerade Linie von beliebiger Länge AB, zwo andere gerade Linien AC und BC so gesetzet, daß ihre äusserste Puncte einander berühreten, und die Grösse dieser letztern geraden Linien ist ebenfals gleich Anfangs bestimmet worden. Drittens hat man auf eine gerade Linie AB, zween Winkel gesetzet, den bey A und den bey B, von beliebiger Grösse, und die geraden Linien AC und BC so lange fortgezogen, bis sie einander erreichet haben. Es bleibet noch übrig, daß wir ein Dreyeck machen, indem wir erstlich die AB hinlegen, ohne ihre Grösse zu bestimmen, sodann an dieselbe AC setzen, welche mit der erstern einen Winkel von beliebiger Grösse bey A mache, in dieser Linie AC ein beliebiges Punct C annehmen, und dadurch die Grösse dieser Linie bestimmen: so dann aber weiter aus C eine andere Linie CB von einer beliebigen, aber gleich Anfangs bestimten Grösse dergestalt legen, daß ihr äusserstes Punct in die Linie AB falle.

§. 246. Bey dieser Art die Dreyecke auszumachen, kommet das meiste zu bedenken vor, und wir müssen uns, damit wir alles genau verstehen, erst vorstellen, wie und auf was Art gerade Linien fallen müs-

müssen, welche aus einem Punct, so ausser einer geraden Linie gegeben worden, an diese gerade Linie geleget werden, damit sie von dieser oder jener Länge werden. Man nehme demnach ein Punct C ausser der geraden Linie AB wo man wil, und lasse aus demselben erstlich eine Perpendicularlinie auf AB fallen, diese ist CD. Sodann ziehe man auch eine andere Linie CE aus eben dem Punct an AB nach Belieben schief, so wird CDE ein geradewinklichtes Dreyeck werden, in welchem CE dem geraden Winkel bey D entgegen gesetzet ist, und demnach ist CE nothwendig grösser als die Perpendicularlinie CD IV, 243. Und man siehet hieraus ein, wie es denn auch die blosse Vernunft ohne vieles Nachdenken giebt, daß unter allen geraden Linien CD, CE die aus einem gegebenen Punct C an eine andere gerade Linie AB gezogen werden können, die Perpendicularlinie die allerkürzeste sey. Denn wenn man eine andere gerade Linie an statt der CE ziehen wolte, so würden doch die Gründe, aus welchen wir unsern Beweis hernehmen, einerley bleiben, und von einer jeden geraden Linie, welche wie CE gezogen worden, eben dasjenige zu erweisen seyn, so von der CE gezeiget worden.

IV. Abschnitt

F. III.

§. 247. Kan nun aus C auf AB keine gerade Linie gezogen werden, die kürzer wäre als die Perpendicularlinie, und man wil aus einem gegebenen Winkel CED, der Seite CE und der Seite CD ein Dreyeck machen, so muß die Seite CD nicht kleiner angenommen werden als die Perpendicularlinie, die aus dem Punct C auf AB kan gezogen werden, sonst würde die Linie CD die AB niemals erreichen, und könte das Dreyeck demnach nicht geschlossen werden.

§. 248. Die Perpendicularlinie die aus C auf AB kan gezogen werden, ist die Entfernung des Puncts C von der AB. Jederman misset die Entfernung eines Puncts von einer Linie durch dieselbe, und man kan sich sonst keine geschickte Art vorstellen, nach welcher die Entfernung eines Puncts von einer geraden Linie zu messen wäre. Bedienet man sich dieses Begrifs, so siehet man leicht, daß man aus dem Punct C keine Linie ziehen kan, welche die gerade Linie AB erreichte, und doch kleiner wäre als die Entfernung des Puncts C von derselben AB.

§. 249. Wil man, nachdem man dergestalt aus dem Punct C auf die gerade Linie AB eine Perpendicularlinie CD fallen lassen, wie auch eine andere schiefe CE, noch eine andere schiefe Linie CF durch eben das Punct C, an eben die Linie AB

F. 112.

IV. Abschnitt.

AB ziehen, so ist die äussere derselben CF die nemlich von der Perpendicularlinie CD am weitesten entfernet ist, nothwendig grösser als die innere CE. Denn weil der Winkel CED nothwendig spitzig ist, denn bey D ist der rechte Winkel, so muß seine Ergänzung zu zween geraden Winkeln, oder der Winkel CEF stumpf, und das Dreyeck CEF stumpfwinklicht seyn. Demnach ist die Seite desselben CF dem stumpfen Winkel bey E, und die andere CE dem spitzigen bey F entgegen gesetzet. Es ist also die erstere Linie CE nothwendig kleiner als die andere CF. IV, 243.

§. 250. Ist nun aber dieses, daß die schiefen Linien CE, CF immer desto grösser und grösser fallen, je weiter sie sich von der Perpendicularlinie CD entfernen, so ist auch nicht schwer einzusehen, daß wenn ihrer verschiedene wie hier die zwo CE und CF an eine Seite der Perpendicularlinie CD gezogen werden, ohnmöglich zwo derselben einander gleich seyn können. Denn wenn man zwo derselben vergleichet, welche man wil, so muß nothwendig eine derselben von der Perpendicularlinie CD weiter entfernet seyn als die andere, gleichwie CF weiter von CD abstehet als CE, und demnach die eine, CF, grösser seyn als die andere CE.

§. 251. Es ist keine gerade Linie so gros daß man sie nicht aus C an AB anbringen könte, daß nemlich ihr äusserstes Punct wie hier das Punct F in AB falle, wenn man nur AB so sehr verlängern darf als man wil, und dieses ist an sich selbst klar. Denn wenn es nicht so wäre, und DF wäre etwa zu lang, so könte man nur AB weiter fort ziehen, weil dieses sich ohne Ende thun läst, so muß endlich AB lang genug werden, daß das äusserste Punct die Linie AF, oder einer andern dergleichen noch in dieselbe fallen kan. So bald als DA so groß gemachet wird als CF, wird dieses gewiß geschehen, weil jederzeit DF kleiner ist als CF. IV, 243.

§. 252. Auf der andern Seite der Perpendicularlinie kan man eben dergleichen schiefe Linien ziehen als CE und CF, und von eben der Länge welche diese haben. Man mache De so groß als DE, und ziehe Ce, so ist auch Ce = CE. Denn von den Puncten der geraden Linie AB, welche von D gleich weit entfernet sind, nemlich von den Puncten E und e ist auch das Punct C der Perpendicularlinie CD gleichweit entfernet, und diese Entfernungen werden durch Ce, CE gemessen. Der Satz ist oben IV, 166. da gewesen, und wenn man sich des-

desselben nicht so gleich erinnern solte, wird man hoffentlich nichts destoweniger zugeben, daß Ce der CE gleich sey. Denn es ist dieses auch bloß mit dem natürlichen Verstand leicht einzusehen, oder wenn man auf die erste Gründe zurück gehen wil, daraus, weil in den beyden Dreyecken CDE und CDe die geraden Winkel bey D, einander gleich sind, die Seite DE aber man der Seite De gleich genommen, und CD den beyden Dreyecken CDE, CDe gemeinschaftlich ist. Denn hieraus folget, daß auch die dritten Seiten CE und Ce dieser Dreyecke einander gleich seyn.

§. 253. Dieses alles musten wir betrachten, um deutlich einzusehen, wie aus einem Winkel und zwoen geraden Linien, die denselben Winkel nicht einschliessen sollen, ein Dreyeck zusammen zu setzen sey. Man stelle sich nun nochmals die gerade Linie AB vor, auf welcher CF schief und CD perpendicular stehet. Aus dem Winkel CFB nun, und aus der Seite CF und einer andern Seite, ist ein Dreyeck auszumachen. Wir haben gesehen, daß diese zwote Seite zwar so groß seyn könne als CD, aber nicht kleiner. Man kan sie aber auch grösser nehmen, und zwar nach Belieben wie man wil. Nimmet man nun vor diese zwote Seite eine Linie an, die grösser ist als CD aber kleiner als CF, und leget sie aus C an die gerade Linie AB, so kan sie nicht anders als zwischen CF und CD fallen. Denn solte sie ausser der CF nach A zu, fallen, so müste sie grösser seyn als CF. IV, 249. Es wird demnach aus dem Winkel CFB, aus der Seite CF und aus der Seite CE zwar das Dreyeck CFE bestimmet, aber man kan aus eben diesen Dingen auch noch ein anderes Dreyeck machen. Denn man kan auch auf die andere Seite der CD, wie IV, 252. gewiesen worden, eine gerade Linie Ce setzen, welche der CE, gleich ist, und also das Dreyeck CFe aus eben dem Winkel CFB, und zwoen geraden Linien CF, und Ce=CE, ausmachen.

§. 254. So oft man demnach einen Winkel CFB annimmet, eine Seite CF welche an demselben lieget, und eine andere Seite CE, welche dem Winkel F entgegen gesetzet ist, welche letztere CE aber kleiner ist als CF, so werden daraus zwey Dreyecke CFE und CFe, welche so wohl nach ihrer eigenen Grösse, als auch nach der Grösse ihrer übrigen Seiten und Winkel, verschieden sind, wie dieses aus der Figur selbst augenscheinlich ist.

§. 255. Wolte man aber Cf eben so groß nehmen, als CF, so

IV. Abschnitt. würde wieder nur ein einziges Dreyeck können beschrieben werden, und zwar würde es ein gleichschenklichtes seyn. Wir kennen aber diese Art der Dreycke zu gut, als daß wir uns bey denselben länger aufhalten solten.

§. 256. Wil man endlich aus dem Winkel CEB, aus der gegebenen Seite CE und einer andern CF die grösser ist als CE, ein Dreyeck beschreiben, so kan man zwar die gegebene zwote Seite wieder auf beyde Seiten der Perpendicularlinie CD legen, einmal nemlich in CF und das andere mal in Cf, aber nur eine dieser Linien, nemlich Cf ist dem Winkel CEB entgegen gesetzet, die andere CF machet zwar auch mit der CE und AB ein Dreyeck, nemlich CFE, aber es kommet in demselben der Winkel CEB, welchen man doch in das Dreyeck bringen solte, nicht vor, sondern seine Ergänzung zu zween geraden Winkeln CEA. Und ist demnach nur das einzige Dreyeck CEf aus dem gegebenen Winkel CEB, und aus den geraden Linien CE und Cf=CF zusammen gesetzet. Es wird demnach aus einem gegebenen Winkel und zwoen geraden Linien, die den Winkel nicht einschliessen, nur einerley Dreyeck, wenn die Seite so dem Winkel entgegen gesetzet werden sol, grösser ist als diejenige, welche an demselben sol zu liegen kommen.

§. 257. Wenn zwey Dreyecke nach dieser Art beschrieben werden, so sind nothwendig auch ihre übrige Seiten und Winkel, wie auch die Dreyecke selbst gleich. Oder deutlicher, wenn man zwey Dreyecke hat, ABC und abc, und man findet, daß in denselben die Winkel bey A, a, einander gleich sind, daß die Seite AC der Seite ac gleich sey, und CB der cb, so kan man schliessen, daß auch die Dreyecke selbst einander gleich seyn, daß AB gleich sey der ab, und der Winkel ACB dem Winkel c, und folgends auch CBA dem b. Man muß aber auch dieses wissen, daß CB grösser sey als CA, denn sonst könten diese Schlüsse falsch seyn. Man kan beständig den Winkel a auf A bringen, weil diese Winkel einander gleich sind, und weil auch ac der AC gleich ist, so kan es nicht anders seyn, es muß, so bald die Seite ac aus dem Punct A auf AC geleget worden, das Punct c in C fallen. Ist nun CB grösser als CA, und folgends auch cb grösser als ca, so kan es nicht anders seyn, es muß cb auf CB fallen, weil cb der CB gleich ist, und von C innerhalb des Winkels CAB eine dergleichen Linie nur einmal gesetzet werden kan. IV, 256. Fiele cb ausser CB in CD, so wären aus dem Punct C zwo gerade Linien an AB gezogen, F. 113.

und

und diese wären einander gleich, wir haben aber gesehen, daß dieses bey den Umständen unserer Figur nicht seyn könne. Fällt aber cb auf CB, so fallen die ganzen Umkreise der Dreyecke CAB, cab zusammen, woraus man leicht siehet, daß so wohl die Dreyecke selbst, als ihre übrige Seiten, und die Winkel welche zwischen gleichen Seiten liegen, einander gleich seyn müssen.

IV. Abschnitt.

§. 258. Dieser Satz ist allgemein, und wir können aus demselben besondere Sätze heraus bringen, wenn wir uns Dreyecke von besonderer Art vorstellen, in welchen die angegebene Bedingungen, aus welchen wir auf ihre Gleichheit geschlossen, anzutreffen sind. Gesetzet, es seyen die Winkel A und a gerade, und folgends die zwey Dreyecke CAB und cab geradewinklicht, und ihre Seiten CA, ca, wie auch CB, cb seyen einander noch gleich, so werden die übrigen Seiten AB, ab, die Winkel welche zwischen gleichen Seiten liegen, und die Dreyecke selbst gleich seyn. Denn dieses, daß AC = ac, und CB = cb, sind die Bedingungen, aus welchen wir erst besagte Gleichheiten allezeit schliessen können, wenn nur auch die Winkel bey A und a gleich, und die Seiten CB, cb grösser sind als die Seiten CA, ca. Nun aber sind diese Bedingungen nothwendig da, wenn die Winkel A, a gerade sind. Denn alle gerade Winkel sind einander gleich, und die Seiten, die in solchen Dreyecken den geraden Winkeln entgegen gesetzet sind, sind nothwendig grösser als die übrigen. IV, 243. Demnach kan man in zweyen geradewinklichten Dreyecken bloß aus der Gleichheit zwoer Seiten, ob diese zwar die geraden Winkel nicht einschliessen, die Gleichheit der Dreyecke, der übrigen Seiten und der Winkel zwischen den gleichen Seiten, schliessen.

F. 114.

§. 259. Eben so ist es auch mit stumpfwinklichten Dreyecken. Nur muß man auch hier die Gleichheit der stumpfen Winkel zum Grunde setzen, weil stumpfe Winkel auch ungleich seyn können, sind aber die Winkel A und a stumpf und einander gleich, ist ferner die Seite CA gleich der Seite ca, und CB gleich der Seite cb, so sind auch dieser Art Dreyecke gleich, und ihre übrigen Seiten, und die Winkel, welche zwischen den gleichen Seiten liegen. Denn daß CB grösser sey als CA, welches in dem allgemeinen Satz mit als eine Bedingung erfordert worden, lieget hier wieder in der Natur dieser Dreyecke selbst. So bald ein Dreyeck stumpfwinklicht ist, muß noth-

IV. Abschnitt.

wendig die Seite, welche dem stumpfen Winkel entgegen stehet, grösser seyn als eine der übrigen.

§. 260. Dieses sind die Zusammensetzungen der geraden Linien, welche wir machen konten, indem wir ihrer drey annahmen. Es ist nicht nöthig daß wir auch die Figuren besonders betrachten, welche vier gerade Linien einschliessen, und auf die Eigenschaften derselben so genau Acht haben als bey den Dreyecken geschehen, und zum Theil noch geschehen muß. Dasjenige so von einigen derselben in den Anfangsgründen zu wissen nöthig ist, haben wir an seinem Ort angebracht, und das übrige wird in dem folgenden vorkommen. Noch viel weniger ist es nöthig, daß wir die Eigenschaften der übrigen Figuren, die mehr als vier Seiten haben, uns insbesondere weitläuftig vorstellen. Man würde damit niemals fertig werden, und doch könte diese Betrachtung in Anwendung der Geometrie wenigen Nutzen haben. Die besondere Arten derselben, welche nemlich gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, welche noch ins besondere betrachtet werden müssen, lassen sich nicht wohl ohne der Kentniß des Cirkels abhandeln, zu dessen besonderer Betrachtung wir uns demnach nunmehro wenden.



Fünf-

V. Abschnitt.

Fünfter Abschnitt.

Von geraden Linien und Winkeln bey den Cirkelkreisen.

Erste Eigenschaften der Cirkel.

§. 1.

Alle Cirkel, welche gleiche Halbmesser haben, sind so wohl selbst einander gleich, als auch ihre Umkreise. Solte man dieses nicht so gleich einsehen können, darf man nur zwo Scheiben, welche mit gleichen Halbmessern beschrieben worden, in Gedanken dergestalt auf einander legen, daß ihre Mittelpuncte in eines zusammen fallen. Es werden so dann auch ihre Umkreise zusammen fallen, man mag im übrigen die Cirkel um ihre Mittelpuncte drehen, wie man wil. Und dieses siehet man daraus, weil wenn man um einen gegebenen Mittelpunct mit einer bestimmten Oefnung des Cirkels einen Kreiß beschreibet, dieser nicht verschieden werden kan, man mag anfangen wo man wil, und die Spitze, welche den Umkreiß beschreibet, so oft man wil, herum führen. IV, 89.

§. 2. Hieraus schliessen wir, daß der Cirkelkreis um und um auf einerley Art gekrümmet seyn müsse, nicht etwa wie die Linie der 115. Figur ABCD, welche bey A und C viel stärker gekrümmet ist als bey B, und da sie sonst überall einwärts gebogen ist, bey B eine Hohlung auswärts hat. Es lassen sich aber auch dergleichen Figuren um kein Punct also drehen, wie eine Scheibe um ihren Mittelpunct kan gedrehet werden, so nemlich, daß kein Theil derselben aus den Gränzen, in welchen die Figur einmal eingeschlossen war, hinaus wiche. Eine Scheibe kan man in einem Loche herum drehen, welches die Scheibe um und um berühret, und sonst keine andere Figur.

F. 115.

§. 3. Es folget auch aus dieser sehr leichten Betrachtung, daß wenn die Umkreise zweyer Cirkel AB und CD durch ein gemeinschaftliches Punct E gehen, sie mögen nun in diesem Puncte einander schneiden, oder blos berühren, es nicht möglich sey, daß sie beide einerley Mittelpunct haben. Denn da alle Cirkelkreise, welche um einerley

F. 116. 117. 118.

Mit-

V. Abschnitt. Mittelpunct beschrieben sind, und deren Umkreise durch einerley Punct E gehen, ganz auf einander fallen, und einander decken, so könten die Cirkel AB und CD, deren Umkreise beide durch E gehen, nicht verschieden seyn, sondern würden ganz in einem einzigen Cirkel zusammen fallen, wenn ihre Mittelpuncte zusammen fielen: Wir reden aber von zween verschiedenen Cirkeln.

F. 119. §. 4. Fallen aber die Mittelpuncte zweer verschiedener Cirkeln AB, CD in eines zusammen, oder sind zween Cirkel AB und CD um einen einigen Mittelpunct E, beschrieben, so können die Umkreise derselben einander ohnmöglich erreichen. Denn wäre dieses, so fielen auch hier die Cirkel ganz in einen zusammen. Man pfleget zu sagen, daß dergleichen Umkreise einander parallel sind, und nennet die Figur, welche von denselben beschlossen wird, oder dasjenige, so übrig bleibt, wenn man aus der Scheibe A B die Scheibe C D heraus schneidet, einen Ring.

§. 5. Man siehet leicht, daß wenn man bey dergleichen Parallelcirkeln einen Halbmesser ECA ziehet, das Stück desselben CA von bestimmter Länge, und überall einerley seyn werde, man mag den Halbmesser ziehen, wo man wil. Denn es ist dieses Stück CA der Unterschied der beiden Halbmesser unserer Cirkel, und diese haben ihre bestimmete Grösse, und sind um und um von einerley Länge.

F. 120. §. 6. Wenn man in einem Cirkel zween Halbmesser AB und BC ziehet, so bekommet man eine Figur ABC, welche durch dieselbe zween Halbmesser AB und BC, und durch den Bogen AC beschlossen ist. Man heisset dieselbe einen Ausschnitt, und AC den Bogen desselben Ausschnitts. Das Ueberbleibsel ABCDA, so von eben den zweyen Halbmessern AB und BC, und dem Bogen ADC beschlossen wird, kan man, wenn davon zu reden ist, wie wohl dieses eben nicht oft geschiehet, ebenfalls einen Ausschnitt nennen.

§. 7. Sind zween Cirkel einander gleich, das ist, haben sie gleiche Halbmesser, und man machet in denselben zween Ausschnitte ABC, abc, deren Winkel an den Mittelpuncten B und b gleich sind; so sind auch die Ausschnitte selbst und ihre Bogen AC und ac gleich. Ist aber der eine Winkel grösser als der andere, so ist auch der Ausschnitt welcher den grössern Winkel hat, grösser als der Ausschnitt mit dem kleinern Winkel, und der Bogen von jenem ist auch grösser als der Bogen von diesem. Dieses siehet man gar leicht von selbsten ein,

voll-

vollkommen deutlich aber wird es, wenn man nur die Spitzen der Winkel B und b, das ist, die Mittelpuncte der Cirkel auf einander bringet, da denn die Cirkel selbst, und ihre Umkreise zusammen fallen müssen. Stellet man sich vor, daß, nachdem dieses geschehen, so dann der eine Cirkel so lang um seinen Mittelpunct gedrehet werde, bis daß die Seite bc auf BC zu liegen kommet: So siehet man beides, so gesetzet worden. Denn sind die Winkel b und B einander gleich, so fället nunmehro auch ba auf BA, und a in A, ist aber B grösser als b, so fällt A weiter hinaus als a.

V. Abschnitt.

§. 8. Hieraus folget umgekehret, wenn in zween gleichen Cirkeln, zween Bogen AC und ac gleich angenommen worden sind, und man ziehet ihre Halbmesser AB, ab und BC, bc; daß auch die Winkel B und b einander gleich seyn werden. Denn wenn diese Winkel B und b ungleich wären, so müsten auch die Bogen ungleich seyn, wie eben V, 7. erwiesen worden: welches aber demjenigen widerspricht, so man zum Grunde geleget, daß nemlich die Bogen AC, ac gleich seyn.

§. 9. Aus der Gleichheit der Winkel B und b in zween gleichen Cirkeln, folgert man auch die Gleichheit der Ausschnitte ABC, abc auf eben die Art wie wir geschlossen, daß ihre Bögen AC und ac gleich seyn. Und man siehet leicht, daß hinwiederum aus der Gleichheit der Ausschnitte, deren Halbmesser einerley Grösse haben, auch die Gleichheit der Winkel an den Mittelpuncten, oder an den Spitzen der Ausschnitte, und die Gleichheit ihrer Bogen folge. Man kan sich nicht vorstellen, wie in zween gleichen Cirkeln entweder die Winkel B und b, oder die Bogen AC und ac, oder die Ausschnitte ABC, abc gleich seyn könten, wenn die zwey übrigen von diesen drey Dingen in den beiden Cirkeln verschieden sind.

F. 121.

§. 10. Ziehet man demnach eine gerade Linie AB, durch eine andere CD perpendicular, wodurch bey E, da sich diese Linien schneiden, vier rechte und einander gleiche Winkel entstehen: Und nimmt das Punct E vor den Mittelpunct eines Cirkels an, welchen man beschreibet: So werden die Bogen AC, CB, BD, DA der vier Ausschnitte, in welche der Cirkel durch die gerade Linien AB, CD getheilet wird, so wohl, als die Ausschnitte selbst, alle gleich. Und wenn man demnach durch den Mittelpunct eines Circuls E zwo gerade Linien AB, CD ziehet, deren eine auf der andern perpendicular stehet, so wird der Cirkel so wohl als dessen Umkreis in vier gleiche Theile getheilet. Und

V. Abschnitt.

es ist ein jeder der vier Bogen AC, CB, BD, DA der vierte Theil des ganzen Umkreises, gleichwie ein jeder der vier Ausschnitte AEC, CEB, BED und DEA der vierte Theil der Scheibe ist, und man kan überhaupt sagen, daß ein Ausschnitt, dessen Winkel gerade ist, der vierte Theil des Cirkels, und sein Bogen der vierte Theil des Umkreises sey.

§. 11. Demnach machen jede zween unserer Ausschnitte, die Helfte des Cirkels, und ihre beide Bögen die Helfte des Umkreises aus, und eine jede gerade Linie AB oder CD, welche durch den Mittelpunct eines Cirkels gezogen ist, theilet so wohl den Cirkel selbst, als dessen Umkreiß in zwey gleiche Theile. Man kan dieses auch leicht sehen, wenn man einen auf Papier gezeichneten Cirkel dergestalt zusammen leget, daß der Bruch durch den Mittelpunct gehet, und, nachdem dieses geschehen, ihn so dann noch einmal, nach rechten Winkeln zusammen falzet, da denn die vier Ausschnitte, in welche er dergestalt zertheilet worden, auf einander zu liegen kommen, und einander decken werden; doch wem sind diese Dinge unbekannt?

§. 12. Eine gerade Linie AB, welche durch den Mittelpunct eines Cirkels gezogen worden, und die sich zu beiden Seiten an dem Umkreis desselben in A und B endiget, von welcher wir eingesehen, daß sie den Cirkel und seinen Umkreis gleich theile, heisset der **Durchmesser des Cirkels.** Derselbe ist zweymal so groß als der Radius, denn der Mittelpunct theilet den Durchmesser in zwey gleiche Theile, und eben deswegen nennet man den Radius auch den Halbmesser.

F. 122.

§. 13. Man siehet auf eben die Art ein, wenn man einen Ausschnitt von beliebiger Grösse ABC annimmt, und theilet seinen Winkel B in so viele gleiche Theile, als man wil, vermittelst der Halbmesser BD, BE, BF, daß dadurch auch so wohl der Ausschnitt selbst in kleinere Ausschnitte, ABD, DBE, EBF, FBC, die einander gleich sind, getheilet werde, als auch der Bogen AC in gleiche Bogen AD, DE, EF, FC. Denn weil die Winkel bey B alle gleich sind, so müssen auch alle die angezeigten kleinen Ausschnitte so wohl als ihre Bogen gleich seyn V, 7. Wiederum kan man aus der Gleichheit der Bogen AD, DE, EF, FC, oder auch aus der Gleichheit der Ausschnitte ABD, DBE, EBF, FBC, auf die Gleichheit ihrer Winkel bey B schliessen, und wird demnach die Theilung des Winkels ABC, die Theilung des Bogens AC, und die Theilung des Ausschnittes ABC zugleich verrichtet, und so bald man eine von diesen Theilungen zuwe-

ge-

ge gebracht, hat man auch die andere und die dritte, oder man kan sie doch leicht haben, bloß indem man die Halbmesser BD, BE, BF gehörig ziehet.

V. Abschnitt.

§. 14. Wir haben oben IV, 94. gesehen, daß der Umkreis eines Cirkels eine gerade Linie in mehr als einem Punct schneide, aber nicht eigentlich bestimmet, wie oft dieses geschehe, ob nur zweymal, oder ob die gerade Linie den Umkreis mehr als zweymal schneiden könne. Gegenwärtig ist uns daran gelegen, daß wir wissen, wie oft dieses eigentlich geschehen könne. Es sind aber nicht mehr als zween Durchschnitte möglich. Denn wenn um den Mittelpunct A ein Cirkelkreis beschrieben wäre, welcher die gerade Linie DB in den drey Puncten DCB berühret oder schneidet, oder wenn die krumme Linie BCD, welche drey Puncte B, C, D mit der geraden Linie DB gemeinschaftlich hat, ein Cirkel wäre: so könte man von dem Mittelpunct desselben A drey gerade Linien AB, AC, AD ziehen, welche Halbmesser des Cirkels und folgends einander gleich wären. Da nun aber diese Puncte B, C und D der geraden und der krummen Linie gemeinschaftlich sind, so müsten von einem Punct ausser der geraden Linie DB, nemlich von A, an diese, drey andere gerade Linien AB, AC, AD können gezogen werden, welche einander gleich sind. Dieses aber gehet ohnmöglich an, wie wir IV, 249. deutlich gesehen haben. Denn man stelle sich vor, daß aus A auf die gerade Linie DB eine Perpendicularlinie gezogen sey, so fällt diese entweder auf AC oder nicht. Fällt die Perpendicularlinie auf AC das ist, ist AC selbst auf DB perpendicular, so ist nothwendig AB grösser als AC, weil die Perpendicularlinie die kleineste der geraden Linien ist, die aus A an DB fallen. Fällt aber die Perpendicularlinie nicht auf AC, sondern zwischen AC und AD, so ist die AB, so von der Perpendicularlinie weiter abweichet, grösser als die AC, welche ihr näher lieget. Sind aber die drey geraden Linien AB, AC, AD einander nicht gleich, so ist es auch nicht möglich, daß die krumme Linie BCD, welche in dreyen Puncten mit der geraden Linie DB zusammen fället, ein Cirkel sey, denn in einem Cirkel sind alle Halbmesser, dergleichen hier AB, AC, AD wären, einander gleich; oder ist die krumme Linie BCD ein Cirkel, so fällt sie mit der geraden Linie DB nicht in drey Puncten zusammen, und schneidet also oder berühret sie nicht in dreyen Puncten. Noch vielweniger also kan der Cirkelkreis von einer geraden Linie in vier oder noch mehreren Puncten geschnitten werden, welches zu erweisen war.

F. 123.

V. Abschnitt.

§. 15. Hieraus sehen wir wiederum, daß es nicht möglich, daß ein Cirkelkreis irgendwo wie die krumme Linie ABCD in der 115. Figur einwärts gebogen sey, wie wir dieses bereits geschlossen haben, da wir bemerket, daß ein Cirkelkreis um und um auf einerley Art gekrümmet sey V, 2. Denn wäre ein Cirkel irgendwo einwärts gebogen, so müste ihn die gerade Linie in mehr als zwey Puncten schneiden können, wie die eben gebrauchte 123. Figur weiset.

F. 115.

§. 16. Wenn man demnach zwey Puncte A und B in dem Umkreis eines Cirkels nach Belieben annimmet, und ziehet sie mit einer geraden Linie AB zusammen, so fällt diese gerade Linie ganz innerhalb des Cirkels, und theilet sowohl denselben als seinen Umkreis in zwey Theile. Und diese Eigenschaft hat der Cirkel mit einer jeden krumlinichten Figur, deren Umkreis überall auf einerley Art gebogen ist, gemeinschaftlich. Ja eben daraus schliesset man, daß die krumme Linie überall auf einerley Art gebogen sey. Eine solche gerade Linie AB heisset eine Sehne, und die zween Bögen AFB und AGB, in welche sie den Umkreiß theilet, heissen die Bogen dieser Sehne. Die zwey Theile aber in welche sie den Cirkel zerschnitten, oder die Figuren AFB und AGB, welche die Sehnen mit ihrem Bogen einschliessen, heissen Abschnitte.

F. 124.

§. 17. Man kan eine Sehne so ziehen, daß sie durch den Mittelpunct C gehe, wie hier DE. Diese theilet so dann den Cirkel in zwey gleiche Theile, denn sie ist der Durchmesser V, 12. Wir setzen, daß dieser Durchmesser DE mit der Sehne AB parallel lauffe, oder wenigstens sie nicht schneide: Denn man kan ihn allezeit auf die Art ziehen. So ist der eine Abschnitt AFB, welcher von der Sehne AB und dem Bogen AFB beschlossen wird, und in welchen der Mittelpunct C nicht lieget, kleiner als der andere AGB, welchen eben die Sehne AB mit dem Bogen AGB beschliesset, und innerhalb welchem der Mittelpunct C befindlich ist, und der Bogen AFB ist kleiner als der andere AGB. Derowegen wird auch der Abschnitt AFB, in welchem der Mittelpunct nicht lieget der kleinere, und dieser AGB, in welchem der Mittelpunct anzutreffen ist, der grössere Abschnitt genennet.

Von den Sehnen der Cirkel.

§. 18. Ziehet man nun eine Sehne, AB, in einem Cirkel, wie man man wil, nur nicht durch den Mittelpunct, und ziehet aus dem Mittelpunct des Cirkels C zween Halbmesser CA und CB an diese Sehne, und folgends an die Puncte A und B, in welchen die Sehne

F. 125.

den

den Cirkelkreis schneiden würde, wenn man sie verlängerte: So bekommt man ein gleichschenklichtes Dreyeck ABC, von welchem die Sehne AB die Grundlinie ist, und der Mittelpunct C ist die Spitze des Winkels, welcher der Grundlinie entgegen stehet. Denn da die zwo Seiten AC und BC Halbmesser eines Cirkels sind, so sind sie nothwendig gleich. Es wird sich demnach auf dieses Dreyeck alles dasjenige anwenden lassen, so wir von den gleichseitigen Dreyecken längst eingesehen: Nur müssen wir hier die Namen verändern, und die Grundlinie AB nunmehro die Sehne, und das Punct C den Mittelpunct nennen.

§. 19. Man stelle sich vor, daß aus dem Mittelpunct C die gegerade Linie DF auf die Sehne perpendicular gezogen sey. Diese wird so wohl die Sehne selbst, als auch den Winkel ACB in zwey gleiche Theile theilen. Denn dieses ist von allen gleichschenklichten Dreyecken IV, 157. erwiesen worden. Wird aber der Winkel ACB durch die Linie CF in zwey gleiche Theile getheilet, und man verlängert dieselbe bis an den Umkreis in E, so muß eben diese Linie auch den Bogen der Sehne AB in E in zwey gleiche Theile theilen V, 13. Ja weil auch der Winkel ACD, welcher entstehet, indem man die Linie CE auf die andere Seite verlängert, dem Winkel DCB gleich ist, denn sie sind die Ergänzung zweer gleichen Winkel ACE und ECB zu zween rechten Winkeln; so ist auch der Bogen AD dem Bogen DB gleich, und die gerade Linie CF, welche aus dem Mittelpunct eines Cirkels C auf seine Sehne AB perpendicular fällt, theilet nicht nur den einen Bogen derselben AEB, sondern auch den andern ADB in zwey gleiche Theile.

§. 20. Weil, wie wir gezeiget, und wie auch vor sich leicht zu sehen ist, die gerade Linie CE die einzige ist, welche aus C auf AB perpendicular gezogen werden kan, und eben diese einzige Linie auch die AB so wohl als den Winkel ACB, und folgends die Bogen AEB und ADB in zwey gleiche Theile theilet: So kan man diese Linie auf verschiedene Arten bestimmen. Man kan, wie bereits geschehen, sagen, daß DE diejenige Linie sey, welche durch den Mittelpunct auf die Sehne AB perpendicular fället. Man kan eben diese DE die Linie nennen, welche durch den Mittelpunct gehet, und die Sehne in zwey gleiche Theile schneidet. Man kan sie dadurch ausdrücken, daß man angiebt, sie stehe auf der Sehne AB perpendicular, und theile dieselbe in zwey gleiche Theile, oder sie stehe auf der Sehne perpendicular, und

V. Abschnitt.

theile den Bogen AEB oder ADB in zwey gleiche Theile, oder sie gehe durch den Mittelpunct C, und theile den Bogen AEB in zwey gleiche Theile, oder auch sie theile so wohl die Sehne AB als den Bogen AEB oder ADB, welcher zu dieser gehöret, in zwey gleiche Theile. Alles dieses thut die einzige Linie DE, und sie wird durch alle diese Beschreibungen bestimmet.

§. 21. Man kan hieraus verschiedene Sätze machen, welche alle nunmehro keines weitern Beweises benöthiget sind, nachdem wir gesehen, daß sie nichts neues enthalten. Sie sagen nichts anders, als daß, wenn man diese Linie AB auf diese oder jene Art bestimmet, sie alle die Eigenschaften haben müsse, von welchen wir schon eingesehen, daß sie dergleichen Linien zukommen. Doch wollen wir sie zum Ueberfluß berühren, und hin und her etwas anbringen, so zu kurzer Wiederholung des Beweises dienen kan.

§. 22. Wenn man sich vorstellet, daß man die Linie CF durch den Mittelpunct C dergestalt gezogen, daß sie die AB in zwey gleiche Theile theilet, so theilet sie die Grundlinie des gleichschenklichten Dreyecks ABC in zwey gleiche Theile, und ist folgends auf diese Grundlinie AB perpendicular: IV, 156. sie theilet auch den Winkel ACB in zwey gleiche Theile, und folgends auch die Bogen AEB und ADB.

§. 23. Wenn man annimmet, daß die CF auf die Mitte der AB perpendicular gesetzt sey, so siehet man daraus, daß sie auch durch den Mittelpunct C gehen muß, weil, wenn dieses nicht wäre, man aus C eine andere Perpendicularlinie auf AB fallen lassen könte, welche AB in andere zwey gleiche Theile theilen würde, welches widersinnisch ist. Denn man kan eine gegebene gerade Linie nur auf einerley Art in zwey gleiche Theile theilen, und einerley Grösse hat nicht verschiedene Helften. Gehet aber die dergestalt gezogene CF durch den Mittelpunct, so siehet man aus dem vorigen, V, 22. daß sie, wenn sie verlängert wird, auch die Bogen der Sehne AB gleich theilen müsse.

§. 24. Stehet EF auf AB perpendicular, und theilet auch den Bogen AEB in zwey gleiche Theile, so muß sie, wenn man sie verlängert, durch den Mittelpunct gehen, weil man sonst eine andere gerade Linie aus dem Mittelpunct auf AB perpendicular ziehen könte, welche verlängert den Bogen AB in zwey andere gleiche Theile theilen

len würde, so nicht seyn kan. Demnach theilet eben diese EF auch die Sehne AB in zwey gleiche Theile. V, 19.

V. Abschnitt.

§. 25. Gehet die Linie CE durch den Mittelpunct C, und theilet den Bogen AEB in zwey gleiche Theile, so theilet sie auch den Winkel ACB des gleichschenklichten Dreyecks in zwey gleiche Theile. Woraus wieder fliesset, IV, 55. daß sie auf AB perpendicular stehen, und diese gleich theilen müsse.

§. 26. Und wenn endlich FE so wohl die Sehne AB als auch ihren Bogen AEB in zwey gleiche Theile theilet, so siehet man daraus, daß sie auch auf AB perpendicular stehen, und wenn man sie verlängert, durch den Mittelpunct C gehen müsse, weil, wenn dieses nicht wäre, man aus C auf AB eine andere Perpendicularlinie ziehen könte, welche V, 19. so wohl die AB als auch, wenn sie verlängert würde, den Bogen AEB in andere zwey gleiche Theile theilen würde, so ohnmöglich ist.

§. 27. Man siehet hieraus, daß die Theilung eines Cirkelbogens in zwey gleiche Theile nichts erfordere, so nicht bereits da gewesen und gezeiget worden wäre. Es sey der Bogen AB in zwey gleiche Theile zu theilen. Man ziehe seine Sehne AB und setze auf die Mitte derselben die Perpendicularlinie CD, diese wird, wenn man sie gehörig verlängert, auch den Bogen in D in zwey gleiche Theile theilen. Oder hat man den Mittelpunct C, so lasse man nur aus demselben auf AB die Perpendicularlinie CD fallen, und verlängere sie bis sie den Bogen schneidet. Oder man theile AB in zwey gleiche Theile, und ziehe durch den Mittelpunct derselben und durch den Mittelpunct des Cirkels C die gerade Linie CD. Alles dieses kommet in der Anwendung, wenn man Geometrisch verfähret, fast auf eines hinaus, wie man leicht sehen wird, wenn man sich die Mühe geben will, diese Zeichnung würklich zu machen.

F. 126.

§. 28. Es fliesset aber auch aus diesen Sätzen die Anweisung den Mittelpunct eines Cirkels zu finden, welchen man etwa verlohren. Denn es muß ein jeder Cirkel einen Mittelpunct haben, und zwar nur einen einzigen, wie aus dem ersteren Begrif dieser Figur leicht zu sehen ist. Es sey der Cirkel dessen Mittelpunct zu finden ist derjenige, welchen die 125 Figur vorstellet. Man ziehe eine Sehne desselben wie man will AB, und ziehe durch die Mitte derselben die gerade Linie DE auf die Sehne perpendicular. Diese Linie wird gewiß durch den Mittelpunct

F. 125.

telpunct

V. Abschnitt.

telpunct gehen. V, 23. Und hat man DE beyderseits bis an den Umkreiß verlängert, so ist diese Linie ein Durchmesser des Cirkels, und wird folgends von dem Mittelpunct des Cirkels in zwey gleiche Theile getheilet. Man darf also nur die also gefundene DE in C in zwey gleiche Theile theilen, so ist dieser Theilungspunct C auch der Mittelpunct des Cirkels.

§. 29. Fast auf eben die Art findet man den Mittelpunct eines Cirkels, welcher durch drey gegebene Puncte gehen soll. Es müssen aber diese drey Puncte nicht in gerader Linie liegen, sonst wäre kein Cirkel möglich, dessen Umkreiß durch dieselben hindurch ginge. V, 14. Solte er beschrieben werden, so müste er drey Puncte mit einer geraden Linie gemeinschaftlich haben, welches nicht seyn kan. Sind aber drey Puncte gegeben, welche nicht in gerader Linie stehen, als hier A, B und C, und man soll den Mittelpunct des Cirkels finden, welcher durch sie alle dreye durchgehet, so wiederhohle man nur die Arbeit, welche eben gewiesen worden ist. Man ziehe zween dieser Puncte mit einer geraden Linie zusammen, welche man will, zum Exempel A, B, und setze auf AB die Perpendicularlinie DE, welche jene in zwey gleiche Theile theilet. Eben so verfahre man auch mit BC, und setze auf deren Mitte die Perpendicularlinie FG, welche, wie leicht einzusehen ist, die vorige schneiden muß. Der Punct, in welchen sie einander schneiden, ist hier H, und dieser ist der gesuchte Mittelpunct; so daß, wenn man das Cirkelinstrument in H einsetzet, und durch A den Umkreiß eines Cirkels zu beschreiben anfänget, dieser auch durch B und C gehen muß. Denn weil DE an die Mitte der AB, auf diese Linie perpendicular gesetzet worden, so sind alle Puncte dieser Linie, und folgends auch H von A und B gleich weit entfernet, wie wir dieses oben von einer jeden geraden Linie eingesehen, welche auf der Mitte einer andern perpendicular stehet; IV, 165. und weil auch FG auf der Mitte der geraden Linie BC perpendicular stehet, so sind auch alle Puncte dieser FG, und unter diesen wiederum das Punct H, von B und C gleich weit entfernet: und wenn man demnach um den Mittelpunct H durch A einen Cirkel zu beschreiben anfängt, so muß derselbe auch durch B und C gehen.

F. 127.

§. 30. Hieraus siehet man, daß durch drey Puncte A, B und C welche in dem Umkreiß eines Cirkels liegen sollen, dessen Mittelpunct bestimmet werde, und nicht anders als in H fallen könne. Denn kan derselbe weder ausser der DE, noch ausser der FG fallen, das

ist,

ist, fällt der Mittelpunct so wohl in die gerade Linie DE als auch in die andere FG, so fällt er allerdings nothwendig in H. Und daraus folget, daß durch die drey Puncte A, B und C ohnmöglich zween verschiedene Cirkelkreise gehen, und noch vielweniger drey oder mehrere. Denn wenn man sich auch zween Cirkel vorstellen will, die durch diese Puncte A, B und C gehen, so muß man doch zugeben, daß ihre Mittelpuncte zusammen in H fallen. Nun gehen ihre Umkreise beyde durch den gemeinschaftlichen Punct A, oder B, oder C. Zwey Cirkelkreise aber, die um einen Mittelpunct dergestalt beschrieben worden, daß ihre Umkreise durch ein Punct A oder B, oder C gehen, fallen ganz zusammen, und sind nicht verschieden. V, 1.

V. Abschnitt.

§. 31. Oder man setze zu noch grösserer Deutlichkeit, daß die zwo krummen Linien die in der 128 Figur durch die Puncte A, B und C gehen, zween Cirkel seyen. Man ziehe zween dieser Puncte A und B zusammen, und setze auf die Mitte der geraden Linie AB eine Perpendicularlinie DE. Da AB eine Sehne der beyden krummen Linien ist, welche wir betrachten und welche wir indessen vor Cirkelkreise halten müssen, weil noch nicht erwiesen worden, daß sie keine seyn: so gehet die Perpendicularlinie DE, welche auf der Mitte der AB stehet, durch den Mittelpunct so wohl des einen als des andern dieser Cirkelkreise. V, 23. Man kan aber eben diese Arbeit mit eben den Vernunftschlüssen auch mit andern zween Puncten vornehmen, nemlich mit B und C. Man kan die BC ziehen, welche eine Sehne so wohl in dem einen als in dem andern dieser Cirkel seyn wird, man kan auf die Mitte dieser Sehne eine Perpendicularlinie FG setzen, welche wieder durch den Mittelpunct beyder Cirkel gehen muß. Demnach fallen die Mittelpuncte dieser Cirkel in H zusammen, und es sind zween Cirkel um einerley Mittelpunct H durch den Punct A oder B beschrieben, das ist, es ist etwas geschehen, welches nicht seyn kan. Es sind demnach nicht beyde krumme Linien die durch A, B, und C gehen, Cirkelkreise: oder sind sie Cirkelkreise, so gehen sie nicht beyde durch diese drey Puncte.

F. 128.

§. 32. Und zween verschiedene Cirkelkreise können nicht drey Puncte gemeinschaftlich haben; das ist, sie können einander nicht in drey Puncten schneiden. Also noch vielweniger in vieren oder mehrern. Dieses ergänzet wieder einen von unsern ersten Sätzen. Wir haben gesehen, daß zween Cirkelkreise einander in mehr als einem Pucte schneiden können. IV, 96. Jetzt ist gezeiget worden, daß dieser Durchschnitte aufs höchste zween und nicht mehrere seyn können.

V. Abschnitt.

§. 33. Ziehet man zwo Sehnen in einem oder in gleichen Cirkeln, welche Sehnen einander gleich sind, so werden auch ihre Bogen gleich, wie auch ihre Entfernungen von dem Mittelpuncte. Die blosse natürliche Einsicht lässet uns daran nicht zweifeln, so bald wir bedenken, daß der Cirkelkreiß um und um einerley Krümme, einerley Rundung hat. V, 2. Wenn man demnach auf einer Seite desselben eben dasjenige thut, was man auf der andern vornimt, so können ohnmöglich die übrigen Dinge, welche von diesen Zusammensetzungen abhängen, ungleich werden. Wir haben in dem Cirkel der um den Mittelpunct C beschrieben ist, die beyden Sehnen AB, und DE von gleicher Grösse gesetzet. Durch dieselbe sind die beyden Bogen AB und DE abgeschnitten worden. Welcher von diesen beyden soll wohl grösser seyn, und was hat man vor Ursache zu gedenken, daß AB grösser sey als DE, welches einen nicht auch dahin führen könte, daß man DE grösser zu seyn setzte als AB? Eben dieses muß man auch von den Entfernungen dieser Sehnen von dem Mittelpunct C sagen.

F. 129.

§. 34. Die Verknüpfung aber dieser Wahrheit mit dem vorhergehenden kan man dergestalt zeigen. Man ziehe aus dem Mittelpunct C gerade Linien, auf die erst gezeichnete Sehnen perpendicular, und bezeichne sie mit CF, CG. Diese werden die Sehnen in zwey gleiche Theile theilen, V, 19. und wenn man sie fortziehet, bis in H und I, auch ihre Bogen. Da nun aber gesetzet worden, es sey AB = DE, so müssen auch die Helften dieser Linien AF und DG einander gleich seyn. Man ziehe ferner die zween Halbmesser CA und CD, welche einander nothwendig gleich seyn werden, so haben die zwey rechtwinklichte Dreyecke ACF und DCG zwo gleiche Seiten, nemlich AC = CD, und AF = DG. Und sind demnach so wohl ihre übrige Seiten gleich, als auch ihre Winkel, welche zwischen gleichen Seiten liegen. IV, 258. Die dritten Seiten dieser Dreyecke, deren Gleichheit wir eben geschlossen, sind CF und CG, und diese sind die Entfernungen deren Sehnen AB, DE von dem Mittelpuncte, daß also erwiesen ist, daß gleiche Sehnen von dem Mittelpunct der Cirkel, in welchen sie gezogen sind, gleiche Entfernungen haben. Unter den Winkeln aber der Dreyecke ACF und DCG, welche zwischen gleichen Seiten liegen, und demnach ebenfals gleich sind, sind diejenige, deren Spitzen an C reichen. Die Winkel, nemlich ACF und DCG sind einander gleich. Demnach haben die Ausschnitte ACH und DCI einerley Winkel. Also sind auch ihre Bogen AH und DI gleich,

gleich; und weil AH die Helfte ist von AHB, und DI die Helfte von DIE, so müssen auch die ganzen Bogen AHB und DIE gleich seyn. Es ist also richtig daß die Gleichheit der Bogen AHB und DIE so wohl als die Gleichheit der Entfernungen der Sehnen von dem Mittelpunct, oder die Gleichheit der Perpendicularlinien CF und CG aus der Gleichheit der Sehnen in einem oder gleichen Cirkeln fliesse.

§. 35. Aber es fliesset auch hinwiederum die Gleichheit der Sehnen, und ihrer Entfernungen von dem Mittelpuncte aus der Gleichheit der Bogen, welche von den Sehnen abgeschnitten werden, oder wenn man die Bogen AHB und DIE gleich zu seyn setzet, so folget daraus, daß auch so wohl AB und DE als auch die Perpendicularlinien, welche aus dem Mittelpunct auf die Sehnen können gezogen werden, CF und CG einander gleich sind. Denn wenn man diese Perpendicularlinien wiederum bis in H und I fortziehet, so schneiden sie die Bogen in gleiche Theile, und da nun also DIE dem AHB gleich zu seyn gesetzet worden, so müssen auch DI und AH als die Helften jener Bogen gleich seyn. Hat man nun auch, wie vorher die Halbmesser CA und CD gezogen, so sind auch die Winkel der beyden Ausschnitte ACH und DCI einander gleich, und die zwey Dreyecke ACF und DCG haben eine gleiche Seite und zwey gleiche Winkel: Nemlich AC = CD, und ACF = DCG, ferner aber F = G, denn es wird gesetzet, daß diese Winkel gerade sind. Es müssen demnach IV, 126. auch die übrigen Seiten derselben Dreyecke gleich seyn, CF nemlich = CG, und AF = DG. Das erste, daß CF = CG ist eben dasjenige so wir gesetzet, daß nemlich die Entfernungen unserer Sehnen AB und DE von dem Mittelpunct gleich sind; aus dem zweyten aber AF = DG folget die Gleichheit der Sehnen AB und DE gar leicht. Denn weil CF, CG auf dieselbe perpendicular gezogen worden, so sind AF und DG die Helften der Sehnen. V, 19. Diese Helften sind, wie erwiesen worden, gleich, also müssen auch die ganzen Sehnen gleich seyn.

§. 36. Endlich fliesset auch aus der Gleichheit der Entfernungen CG und CF die Gleichheit so wohl der Sehnen als der Bogen; oder wenn CG = CF, so ist auch AB = DE, und AHB = DIE. Wir haben uns nicht lange hierbey aufzuhalten. Weil FC = CG, und AC = CD, so haben die rechtwinklichte Dreyecke AFC und DGC zwo gleiche Seiten, FC = CG, und AC = DC. Demnach sind auch die übrigen Seiten AF und DG einander gleich, IV, 258. welches die Helften sind der Sehnen AB und DE, welche Sehnen demnach einander

V. Abschnitt. ebenfals gleich seyn müssen, aus dieser Gleichheit der Sehnen aber folget die Gleichheit ihrer Bogen, wie V, 33. gezeiget worden.

§. 37. Eine jede Sehne, welche nicht durch den Mittelpunct des Cirkels gehet, und welche folgends keinen Durchmesser desselben abgiebet, ist kleiner als der Durchmesser. Haben aber zwo Sehnen verschiedene Entfernungen von dem Mittelpuncte, so ist allezeit diejenige Sehne kleiner, welche von dem Mittelpuncte weiter entfernet ist. Das erste siehet man aus der bereits betrachteten 129 Figur ein. Denn das Dreyeck AFC ist bey F geradewinklicht, und folgends die Seite AC grösser als AF. IV, 243. Die erste ist der Halbmesser, und die zwote die Helfte der Sehnen AB. Also ist auch der ganze Durchmesser grösser als die ganze Sehne.

§. 38. Um aber das zweyte einzusehen, so ziehe man in einem Cirkel einen Durchmesser AB, und setze auf die eine Helfte desselben verschiedene Perpendicularlinien DE, FG, welche in H und I verlängert, Sehnen des Cirkels abgeben, von welchen sie die Helften sind: so siehet man auch bloß daraus, daß die Helfte der Sehne DE, welche dem Mittelpunct C näher lieget, grösser sey als FG, die von diesem Puncte weiter entfernet ist; weil bey einer jeden krummen Linie die von A nach B gehet, und die, wie der Cirkelkreiß, immer einwärts gekrümmet ist, die Perpendicularlinie, dergleichen DE und FG sind, immer kleiner werden, indem sie sich den Puncten A oder B nähern. Man kan aber auch von den äussersten Puncten der Sehnen D und F nach dem Mittelpunct C gerade Linien sich vorstellen, da denn so gleich klar wird, daß die Linie FG kleiner sey als DE, so bald man nur auf die Art und Weise, wie ein Cirkelkreis beschrieben wird, Acht hat. Indem dieses geschiehet, drehet sich der Halbmesser DC um C, und neiget sich, indem sein äusserstes Punct von D nach F gehet, immer mehr und mehr gegen den Durchmesser AB. Die Perpendicularlinien DE und FG sind die Entfernungen dieses äussersten Punctes des Halbmessers in seinen verschiedenen Lagen DC und FC. Und es ist demnach FG nothwendig kleiner als DE, und folgends auch FI kleiner als DH. Ja es verschwindet endlich die Sehne ganz, indem sie sich von dem Mittelpunct immer mehr und mehr bis an A entfernet, weil der Halbmesser FC endlich gar auf AC zu liegen kommt. Es wachsen also die Sehnen eines Cirkels von nichts bis zu der Grösse des Durchmessers, welcher die gröste Sehne ist, die ein Cirkel haben kan, und die halbe Sehnen wachsen von nichts bis zu der Grösse des Radius.

F. 130.

§. 39. Wil

§. 39. Wil man aber die Sehnen mit ihren Bogen vergleichen, so muß man sagen, daß, indem der Cirkelbogen von dem Punct A an nach und nach zu beyden seiten auf einerley Art wächset, so nemlich, daß die gleichen Stücke AF und AI zugleich erzeuget werden, auch die Sehne des Bogens FI mit wachse, und grösser und grösser werde, bis endlich der Bogen zur Grösse des halben Umkreisses KAL angewachsen, da die Sehne so groß geworden als sie nur hat werden können, und nunmehro dem Durchmesser an Grösse gleich gekommen: und daß, indem der Bogen noch grösser wird als der halbe Cirkel, KAL, und nach und nach an dAh, fAi, und so weiter, kommet, so daß die Sehne auf der andern Seite des Mittelpunctes nach B zu fallen muß, die Sehne auch wieder beständig abnehme, und zwar in einem fort, bis sie endlich fast ganz verschwindet, indem daß die beyden äussersten Puncte des Bogens bey B einander erreichen, und den Cirkel schliessen wollen.

V. Abschnitt.

§. 40. Eben dieses kan man auch von den Helften der Sehnen, oder von den geraden Linien DE, FG mit einer geringen Veränderung sagen. In dem der Bogen von A auf einer Seite des Durchmessers AB, zu wachsen anfängt, wird die Perpendicularlinie FG immer grösser und grösser, bis sie endlich dem Radius KC gleich wird, wenn der Bogen die Grösse des vierten Theils des Umkreises AK erreichet. Wird aber der Bogen grösser als der vierte Theil des Umkreises, so nehmen auch diese Helften der Sehnen beständig ab, wie sie auf der andern Seite zugenommen haben, bis sie endlich fast ganz verschwinden, indem daß sich der Bogen an den Durchmesser bey B anschliessen, und den halben Umkreis vollenden wil.

§. 41. Allein wir haben nicht nur von solchen Sehnen gesprochen die auf einen Durchmesser perpendicular sind, indem wir gesaget; daß in einerley Cirkeln diejenige Sehne allzeit kleiner ist, welche weiter von dem Mittelpunct abstehet, und es ist der Satz in der That von allen Sehnen überhaupt richtig, sie mögen, wie diejenigen, die wir betrachtet, einander parallel liegen, oder nicht. Man begreiffet dieses leicht, wenn man die gleichförmige Rundung des Cirkels, und daß dessen Umkreis um und um auf einerley Art gekrümmet ist, erweget. Noch deutlicher aber siehet man die Sache folgender gestalt ein. Es seyn AB und CD zwo Sehnen eines Cirkels, und die erstere AB sey von dem Mittelpunct E weniger entfernet als die zweyte CD,

F. 131.

V. Abschnitt.

das ist, die Linie EF, die aus dem Mittelpuncte auf die erstere Sehne perpendicular gefallen, sey kleiner als die Linie EG, die aus eben dem Punct auf die andere Sehne CD perpendicular fället: So muß nach unserm Satz AB grösser seyn als CD, und dieses ist zu erweisen. Man verlängere zu dem Ende EF in H, bis EH der EG gleich geworden, und ziehe durch H die Sehne IK mit der vorigen AB parallel. Weil nun die Sehnen IK und CD von dem Mittelpunct E gleich weit entfernet sind, die eine nemlich um EH, und die andere um EG = EH, so sind diese Sehnen einander gleich, V, 36. nemlich IK = CD. Nun ist aber IK kleiner als AB, V, 38. also muß auch CD kleiner seyn als AB.

Gerade Linien, welche einen Cirkel berühren.

§. 42. Wenn man selbst auf das äusserste Punct des Durchmessers AB oder des Halbmessers AC eines Cirkels eine Perpendicularlinie AD setzet, und dieselbe auf der andern Seite nach Belieben bis in E verlängert, so fället diese gerade Linie DAE zwar mit dem Umkreis des Cirkels nothwendig in dem Puncte A zusammen, und berühret denselben eben deswegen, weil sie durch das äusserste Punct des Durchmessers A gezogen ist, welches nothwendig in dem Umkreis lieget. Sonst aber, kan nichts von der dergestalt gezogenen geraden Linie DAE innerhalb den Cirkel hineinfallen, oder die gerade Linie kan den Cirkel nicht schneiden. Dieses können wir auf verschiedene Arten einsehen. Ausser A reichet der Umkreis nicht, und er kan also von dieser Seite kein Stück der Linie DAE umschlingen, oder dieselbe einschliessen. Solte demnach ein Stück dieser Linie innerhalb des Cirkels beschlossen werden, so müste dieses über oder unter dem Puncte A geschehen. Wenn aber dieses seyn solte, müste sich der Umkreis des Cirkels über oder unter dem Puncte A nach der geraden Linie DAE auswärts biegen, damit nemlich ein Theil desselben auf die andere Seite dieser Linie zu liegen käme, welches aber demjenigen widerspricht, so wir von der einförmigen Krümmung des Cirkelkreises eingesehen.

F. 132.

§. 43. Man kan aber auch auf eine andere Art noch viel bündiger einsehen, daß alle Puncte der geraden Linie DAE, welche man nur angeben kan, ausser dem einzigen Puncte A, ausserhalb den Cirkel fallen. Man ziehe die Linie FC von einem nach Belieben angenommenem Puncte dieser geraden Linie nach dem Mittelpunct C. Weil nun das Dreyeck FAC rechtwinkelicht ist, (denn man hat DA auf

AC

A C perpendicular gesetzet); so ist die Seite desselben FC nothwendig grösser als der Radius AC; Ist aber FC, die Entfernung des Punctes F unserer geraden Linie DE von dem Mittelpunct C, grösser als der Radius des Cirkels, so lieget dasselbe Punct F nothwendig ausser dessen Umkreis, und eben so schliesset man von einem jeden andern Puncte der geraden Linie DE.

§. 44. Eine dergleichen gerade Linie DAE, welche zwar einen Cirkel berühret, und ein Punct A mit dem Umkreis desselben gemeinschaftlich hat, von welcher aber nichts innerhalb des Cirkels fället, oder die im übrigen ganz und gar ausser dem Cirkel lieget, und von dessen Umkreis abgesondert ist, heisset eine **Berührungslinie des Cirkels, oder eine gerade Linie, welche den Cirkel oder dessen Umkreis berühret.**

§. 45. Man ziehet, wie wir gar leicht aus dem gesagten schliessen, eine gerade Linie, welche einen Cirkel in einem gegebenen Punct A berühret, wenn man nur erstlich von A eine gerade Linie AC ziehet, welche durch den Mittelpunct gehet, oder gehen würde, wenn man sie verlängerte, und sodann auf dieselbe und an das Punct A eine Perpendicularlinie AB setzet. Diese AB ist die verlangete Berührungslinie.

§. 46. Hat man aber eine gerade Linie DAE, welche den Cirkel in A berühret, wie man wil, gezogen, und man läst aus dem Mittelpunct des Cirkels C auf dieselbe eine Perpendicularlinie CA fallen, so fället diese gewiß auf den Berührungspunct A. Denn wenn die Perpendicularlinie nicht auf den Berührungspunct A ginge, sondern auf ein anderes Punct F fiele, so hätte eben deswegen, weil CF auf DE perpendicular stehet, das Dreyeck FCA einen geraden Winkel bey F, und wäre demnach die Seite AC dem geraden Winkel bey F entgegen gesetzet. Es müste also AC grösser seyn als FC; und weil F ein Punct der Berührungslinie DE ist, und derowegen nicht innerhalb den Cirkel fallen kan, so müste noch vielmehr A ausser dessen Umkreis fallen. Oder die Sache etwas anders auszudrucken: CF ist gewiß nicht kleiner als der Radius des Cirkels, weil F nicht innerhalb des Cirkels fället, denn dieses thut kein Punct einer Berührungslinie. Aus dem aber, so angenommen worden, folget, daß AC grösser sey als FC: also ist AC gewiß grösser als der Radius des Cirkels, und daraus kan nichts anders geschlossen werden, als daß A ausserhalb dessen Umkreis liege. Ist aber dieses, so ist A ohnmöglich der Berührungspunct. Daß

V. Abschnitt. Daß demnach, wenn man setzet, daß A der Berührungspunct sey, und daß doch die gerade Linie, welche man aus C auf DE perpendicular ziehet, nicht in A falle, man sich selbst widerspricht. Denn aus dem letztern folget wie wir gezeiget haben, daß A der Berührungspunct nicht sey. Es kan demnach ohnmöglich A der Berührungspunct seyn, und doch die Perpendicularlinie von welcher wir reden, ausser demselben fallen. Fället aber diese Perpendicularlinie nicht ausser den Berührungspunct, so muß sie in denselben fallen, welches dasjenige ist so gesetzet worden.

§. 47. Die gerade Linie so aus dem Mittelpunct C auf die Berührungslinie DE perpendicular fället, ist nur eine einzige. Denn da durch jedes Punct auf jede gerade Linie nur eine einzige Perpendicularlinie kan gezogen werden, warum solte es hier anders seyn? diese Perpendicularlinie aber gehet; wie eben gezeiget worden, durch den Berührungspunct A, und lieget also zwischen C und A, und zwischen diesen Puncten können wieder nicht mehr als eine gerade Linie gezogen werden. Demnach ist eben die gerade Linie die zwischen C und A lieget, auf DE perpendicular: oder wenn man den Mittelpunct C mit dem Berührungspunct A vermittelst einer geraden Linie AC verknüpfet, so ist diese Linie AC auf die Berührungslinie DE perpendicular. Die Sache ist leicht: solte indessen doch noch einiger Zweifel haften, so versuche man durch den Mittelpunct C auf DE eine Perpendicularlinie zu ziehen. Nach dem, so V, 46. gezeiget worden, muß sie durch den Berührungspunct A gehen, und kan also von der Linie CA, nicht verschieden seyn. Ist aber CA von der Perpendicularlinie nicht verschieden, so ist sie ja nothwendig selbst die Perpendicularlinie.

§. 48. Und also haben wir uns die vornehmsten Eigenschaften der Sehnen und der Berührungslinien bekant gemacht. Wir können nunmehro beyde verknüpfen, und uns dasjenige vorstellen, so aus dieser Verknüpfung folget.

F. 133. §. 49. Es sey durch ein Punct A eines Circelkreises eine Linie BC gezogen, so den Cirkel berühret, und dieser seyn so viele Sehnen DE, FG beygesetzet, als man wil, welche alle mit der berührenden Linie BC, und folgends auch mit einander, parallel laufen, so werden alle Bogen, die zwischen zwoen dieser Parallellinien enthalten sind, das ist AD und AE, wie auch DF und EG einander gleich seyn.

Denn

Denn man ziehe aus dem Mittelpunct H auf die Berührungslinie BC eine Perpendicularlinie HA, welche man, wenn es nöthig ist, auf der andern Seite in I verlängern kan. Diese wird durch den Punct A gehen, in welchem die BC den Cirkel berühret, V,46. und, weil die Sehnen DE, FG mit der BC parallel laufen, so wird eben diese HA auf diese Sehnen alle perpendicular fallen. IV,190. Nun ist die Eigenschaft einer solchen Linie, welche aus dem Mittelpunct eines Cirkels auf eine Sehne desselben perpendicular gezogen worden, daß sie, wenn man sie verlängert, auch den Bogen derselben in zwey gleiche Theile theilet. V, 19. Dieses muß also unsere AHI ebenfals thun, und die Bogen AD und AE, aber auch FDA und GEA einander gleich machen. Das erstere, AD=AE ist eines von denjenigen so angegeben worden, aus beyden zugleich AD=AE, und FDA=GEA aber folget, daß gleiches übrig bleiben müsse, wenn man von den Bogen FDA und GEA, die Bogen AD und AE wegnimmet. Nimmet man aber AD von ADF weg, so bleibet DF übrig, und AE von AEG abgezogen, lässet EG. Diese Bogen DF und EG sind demnach einander ebenfals gleich.

§. 50. Man siehet gar leicht ein, daß sich dieser Satz umkehren lasse, und daß, wenn man annimmet, daß die Bogen DF und EG gleich seyn, daraus folge, daß die Sehnen DE und FG einander parallel liegen. Denn es lässet sich in der Lage solcher Sehnen nichts verändern, ohne daß man zugleich die Grösse der Bogen ändert, welche zwischen ihnen enthalten sind, das ist, wenn man zwo Sehnen DE und FG parallel gezogen, wodurch wir gesehen, die Bogen DF und EG gleich werden, und man wil hernach die eine dieser Parallellinien der andern auf dieser oder auf jener Seite nähern, und sie dadurch ausser den parallelen Stand setzen, so wird eben dadurch auch der Bogen auf der einen Seite kleiner, als auf der andern: verändert man also die Bogen nicht, sondern lässet sie einander gleich, wie sie vorher einander gleich waren, da die Sehnen parallel lagen, so müssen auch die Sehnen nach wie vor parallel bleiben.

§. 51. Solte dieses die Sache noch nicht vollkommen verständlich machen, welche zwar an sich keine Schwierigkeit hat, so kan man auf die eine der Sehnen FG aus dem Mittelpunct eine Perpendicularlinie ziehen, und dieselbe bis an den Umkreis in A verlän- F. 134.

V. Abschnitt.

gern. Diese Perpendicularlinie ist AH. Es wird dadurch der Bogen AF dem Bogen AG nothwendig gleich. Da nun auch gesetzet wird, daß DF dem EG gleich sey, so folget, daß auch die Bogen AD und AE gleich seyn, welche nach Abzug der letztern von der erstern übrig bleiben. Sind aber die Bogen AD und AE gleich, und fället also die Linie HA aus dem Mittelpunct auf die Sehne DE dergestalt, daß sie ihren Bogen DAE in zwey gleiche Theile theilet, so ist diese Linie AH auch auf die DE perpendicular, wie wir V, 25. gesehen haben. Da nun aber eben diese AH auch auf die FG perpendicular gezogen worden, so müssen die Linien FG und DE nothwendig einander parallel seyn.

Von den Winkeln gewisser Sehnen und Berührungslinien.

§. 52. Alle diese Sätze, welche wir bisher von dem Cirkel betrachtet haben, sind gar leicht, und machen dasjenige mit aus, so man sonst die natürliche Geometrie nennet, bey welcher vor der Kunst nichts übrig ist, als daß sie dieselbe etwas in Ordnung bringe. Nun folgen etwas schwerere Sätze von den Winkeln, welche die Sehnen und Berührungslinien bey den Umkreisen der Cirkel machen.

F. 135. 136. 137. 138.

§. 53. Wenn man in verschiedenen Cirkeln die gleiche Halbmesser haben, oder die einander gleich sind, ein Punct A in dem Umkreise nach Belieben annimmet, und durch dasselbe zwo gerade Linien AB und AC ziehet, welche bey A in allen diesen Cirkeln einerley Winkel BAC machen, es mögen nun diese Linien AB und AC die Umkreise der Cirkel berühren oder schneiden wie sie wollen, so sind alle Bogen DE, welche zwischen den Schenkeln dieser Winkel enthalten sind, einander gleich, das ist, es ist DE = DE, in welchen von den gezeichneten Cirkeln man auch die mit DE bezeichnete Bogen nehmen wil. In der 135 und 136 Figur schneiden die geraden Linien AB und AC die Umkreise auf verschiedene Art, in der 137 schneidet AB den Umkreis und AC berühret ihn in E, welches Punct demnach mit A in eines zusammen fället, und in der 138 Figur schneidet AB wieder den Umkreis wie auch AC, aber das Punct E, in welchem die letzte Linie AC den Umkreis schneidet, fället hier auf die andere Seite des Punctes A in Ansehung des B. Es ist bey dem allen, unter den gesetzeten Bedingungen, der Bogen DE überall von einerley Grösse, und so groß als der Bogen DE in der 135 Zeichnung.

§ 54.

§. 54. Man kan dieses folgender gestalt einsehen: Man lege den ersten Cirkel oder die 135 Figur mit samt den in demselben gezogenen geraden Linien, mit seinem Mittelpuncte auf den Mittelpunct des zweiten und des dritten und vierten Cirkels, und drehe ihn um denselben so lange bis BA des ersten Cirkels mit der BA des zweiten, dritten und vierten parallel zu liegen kommt, oder bis BA in ba fället, welche ba der BA parallel lieget. Gesetzet, es falle, nachdem diese Lage der BA erhalten worden, die zweite Linie AC des ersten Cirkels nunmehro in ac, wodurch der Bogen DE des ersten Cirkels dem Bogen de des zweiten, dritten und vierten Cirkels, und der Winkel bac dem Winkel BAC gleich wird; so ist in einem jeden der drey letztern Cirkel, in welchen diese Linien vorkommen, wegen der parallelen Lage der geraden Linien BA und ba, die von der Linie ac geschnitten sind, der Winkel bac gleich dem Winkel bey F, welcher nach unten zu gekehret ist, oder BFc IV, 187. Denn bac lieget inwendig zwischen den Parallellinien AB und ab, und F ausser denselben, und beide stehen nach einerley Seite. Nun aber ist gesetzet worden, daß der Winkel BAC dem Winkel bac gleich sey, und hieraus folget, daß die beiden Winkel, der besagte bey F, und der Winkel BAC beide einem dritten, nemlich dem Winkel bac, und demnach einander selbst, gleich seyn, oder daß BFc = BAC. Siehet man diese Winkel BFc und BAC etwas genauer an, so wird man inne, daß aus ihrer Gleichheit folge, daß auch die geraden Linien ac und AC einander parallel liegen IV, 77. Denn BAC lieget zwischen den geraden Linien AC und ac, welche beide von der AB geschnitten werden, und BFc lieget nach eben der Seite ausserhalb denselben.

§. 55. Nachdem also AB und ab einander mit Fleiß parallel geleget worden, so ist selbst daraus, wegen der Gleichheit der Winkel BAC und bac, die parallel Lage der andern Seiten AC und ac, erfolget. Und hieraus folget ferner V, 49. die Gleichheit der Bogen Aa und Dd, wie auch Aa und Ee, welche letztere zwischen zwo Parallelen Sehnen in der 136. Figur, oder in der 137, zwischen der Sehne ac und der Berührungslinie AC so jener parallel lieget, enthalten sind. Daraus aber, daß Dd = Aa, und Aa = Ee, schliesset man ferner leicht, es sey auch Dd = Ee. In der 138. Figur aber ist aE = Ae, und AE = AE, folgends wenn man gleiches zu gleichem setzet, aE + AE, das ist Aa = Ae + AE, das ist Ee. Woraus mit dem vorigen Aa = Dd, eben das, nemlich Dd = Ee, folget.

§. 56. Nunmehro ist nichts leichter, als ferner einzusehen, daß auch

V. Abschnitt.

die Bogen DE und de einander gleich sind, welches V, 53. gesetzet worden, und zu beweisen ist. Denn es entstehet der Bogen de aus dem Bogen DE, indem man auf der einen Seite von DE den Bogen Ee wegnimmt, und auf der andern Seite den Bogen Dd anstücket, welches man gar leicht siehet, wenn man die Figuren betrachtet. Weil aber das weggenommene Ee dem zugesetzten Dd gleich ist, so wird dadurch in der Grösse des Ganzen nichts geändert. Und es sind demnach überall die Bogen DE dem Bogen de gleich, welcher in allen unsern Cirkeln von einerley Grösse genommen worden; und folgends sind auch alle Bogen DE einander gleich, und der vorgetragene Satz ist richtig. Oder man sage es sey in einem jeden unserer drey Cirkel De = De, und setze beiderseits dasjenige hinzu, dessen Gleichheit erwiesen worden Dd = Ee, so folget wieder de = DE.

§. 57. Man kan auch diesen Satz umkehren, und es folget hinwiederum aus der Gleichheit der Bogen DE in verschiedenen gleichen Cirkeln die Gleichheit der Winkel BAC, die nach einer Seite stehen, deren Spitzen A in den Umkreiß des Cirkels fallen, und deren Schenkel AB und AC die Bogen DE abschneiden. Denn gesetzet, es seyen die Winkel BAC in verschiedenen gleichen Cirkeln einander gleich, und folgends auch, wie wir gesehen, die Bogen DE, und man wil einen der Winkel BAC kleiner machen, so verkleinert man auch den Bogen DE auf welchem er stehet, und ohne diese Verkleinerung des Bogens gehet die Verkleinerung des Winkels ohnmöglich an. Eben so muß man sagen, daß so bald als der Winkel BAC in einem oder dem andern dieser Cirkeln vergrössert wird, der Bogen DE nothwendig zugleich mit vergrössert werde. Oder, daß wir uns anders ausdrücken: Wenn man zween unserer gezeichneten gleichen Cirkel vor sich nimmet, und setzet, daß in einem derselben der Winkel an dem Umkreis bey BAC grösser sey, als in dem andern, so muß man auch nothwendig setzen, daß der Bogen DE auf welchem der grössere Winkel stehet, grösser sey als der andere Bogen DE, auf welchem der kleinere stehet. Nach dieser kleinen Vorbereitung schliessen wir leicht, daß wenn die Bogen zweer Cirkel DE gleich sind, die Winkel an BAC nicht ungleich seyn können. Denn man setze, daß zween Bogen DE gleich sind, und die Winkel BAC ungleich: so ist nothwendig einer dieser Winkel grösser als der andere, sonst wären sie nicht ungleich. Der grössere Winkel hat allezeit einen grösseren Bogen DE zwischen seinen

nen Schenkeln: also sind die Bogen DE in den beiden Cirkeln nicht gleich, welches demjenigen widerspricht, so eben gesagt worden. Mit einem Worte, wer da saget, die Bogen DE seyen in zween gleichen Cirkeln gleich, aber die Winkel DAC seyen ungleich, der widerspricht eben dadurch sich selbst, weil aus der Ungleichheit der Winkel, DAC, die Ungleichheit der Bogen DE folget, und kan also ohnmöglich die Wahrheit sagen. Sind aber bey der Gleichheit der Bogen DE die Winkel DAC nicht ungleich, so ist klar genug, daß sie gleich sind.

V. Abschnitt.

§. 58. Man kan aber eben dieses auch leicht gerade zeigen, ohne den vorhergehenden Satz zum Grunde zu legen. Wir setzen, daß in zween solchen Cirkeln dem zum Exempel in der 135 Zeichnung, und einem der übrigen die Bogen DE gleich seyn, und bringen den erstern mit seinen Mittelpuncte auf den Mittelpunct des andern, und drehen ihn so dann um diesen Mittelpunct so lange, bis die Sehnen BA der zween verschiedenen Cirkeln parallel werden. Wir setzen dieses sey geschehen, nachdem die Sehne BA der 135 Figur in ba gefallen, und daß dadurch die andere Seite AC in ac zu liegen gekommen, wodurch der Winkel bac dem Winkel BAC des Cirkels, welchen wir dergestalt auf die übrigen gebracht, gleich geworden. Weil nun gesetzet wird, daß der Bogen de dem Bogen DE gleich sey; so ist auch Dd so groß als Ee: Welches man leicht einsiehet, wenn man von einem jeden der gleichen Bogen DE, de, den Bogen De, welcher ihnen gemeinschaftlich ist, hinweg nimmet. Denn da bleibet allerdings Dd = Ee übrig. Weil aber auch Dd = Aa, denn dieses erfolget aus der parallelen Lage der geraden Linien AB und ab V, 49. so sind die zween Bogen Aa und Ee, welche einem dritten, nemlich dem Dd gleich sind, auch einander gleich, und es sind folgends auch AC und ac einander parallel. V, 50. Nun ist es keine Schwierigkeit zu zeigen, daß die Winkel BAC und bac einander gleich sind. Denn weil AB und ab zwo Parallellinien sind, die von der Linie ac geschnitten werden, so ist der innere Winkel bac dem äussern BFc, gleich. Und weil auch AC, ac zwo Parallellinien sind, welche beide von der AB geschnitten werden, so ist wieder der besagte Winkel BFc dem Winkel BAC gleich, und da folgends BAC = F, und F = bac, so ist auch BAC = bac, welches zu erweisen war.

§. 59. Hieraus fliesset so gleich, daß wenn man in einem Cirkel einen Bogen annimmet DE, und setzet auf denselben einen Winkel, F. 139.

V. Abschnitt.

dessen Spitze in den Umkreis des Cirkels in A fället, und ferner noch andere Winkel, deren Spitzen in a, α fallen, diese Winkel DAE, DaE, DαE alle, so viel man deren auch machen wil, einander gleich seyn werden.

§. 60. Ja es ist eben dieses richtig, wenn man durch DE eine Sehne ziehet, und an das Ende derselben die gerade Linie EC setzet, welche den Cirkel in E berühret. Der Winkel DEC ist auch dem Winkel DAE gleich, welcher auf dem Bogen DE stehet, und mit seiner Spitze A auf der andern Seite in den Umkreis des Cirkels fället. Denn der allgemeine Satz lässet sich auch hier anwenden. Es stehet auch der Winkel DEC, dessen Spitze in E in den Umkreis des Cirkels fället, auf dem Bogen DE, eben wie DAE, und die Vergleichung dieser Figur mit den vorigen machet alles deutlich. Denn wir haben unsere Sätze so allgemein verfasset und erwiesen, daß sie auch diesen Fall, in welchem eine der geraden Linien, die den Winkel an dem Umkreise einschliessen, eine Berührungslinie ist, mit enthalten.

§. 61. Man kan aber diesen letzten Satz auch also verfassen. Wann man eine gerade Linie EC ziehet, welche einen Cirkel in E berühret, ziehet so dann die Sehne DE durch den Berührungspunct, und setzet auf dieselbe ein Dreyeck DAE, dessen Spitze in den Umkreis des Cirkels fället, so ist der Winkel A, welcher der erst genannten Sehne DE entgegen stehet, dem Winkel DEC gleich, welchen eben die Sehne DE mit der Berührungslinie EC machet.

F. 140.

§. 62. Schneidet aber die Linie CA, welche mit der Sehne AD den Winkel DAC machet, den Umkreis des Cirkels in A und E, so ist DAC dem Winkel DaE gleich, welcher wieder auf dem Bogen DAE stehet, und dessen Spitze a in den Umkreis fället V, 55. Man siehet hieraus, daß dieser Winkel DaE mit dem ihm entgegen gesetzten Winkel DAE zween rechte Winkel ausmachen müsse. Denn die beiden Winkel DAC, und DAE sind ohnstreitig zween rechten Winkeln gleich, weil sie neben einander auf der geraden Linie CAE stehen. Also giebet auch DaE = DAC mit eben dem DAE eine Summe, welche so groß ist, als zween rechte Winkel.

§. 63. Man kan diesen Satz auch so ausdrucken: In einem jeden Vierecke DaEA, welches in einem Cirkel dergestalt beschrieben ist, daß seine Ecken D, a, E, A in den Umkreis des Cirkels fallen, sind die zween einander entgegen gesetzte Winkel DaE, und DAE zusammen genommen zween rechten Winkeln gleich. Denn man kan über-

all

all eine Seite des Vierecks EA in C verlängern, und so dann eben den Beweiß geben, welchen wir jetzo geführet.

V. Abschnitt.

§. 64. Man kan sich eines jeden dieser Sätze bedienen, dasjenige so von dergleichen und anderen Winkeln noch ins besondere zu sagen ist, heraus zu bringen, doch führet uns der Winkel DEC, oder DEc welchen die Berührungslinie cEC mit der Sehne DE machet, insonderheit leicht zu dem vorhabenden Zweck. Wir haben V, 60. gesehen, daß der Winkel DEC dem Winkel gleich sey, welcher in den Abschnitt DAE dergestalt kan beschrieben werden, daß seine Spitze in den Bogen DAE fället, und er mit der DE ein Dreyeck ausmachet: Und aus eben dem Beweise erhellet, daß auch der Winkel DEc einem dergleichen Winkel in DaE gleich seyn müsse. Man ziehe aus dem Mittelpuncte des Cirkels B die zween Halbmesser BD und BE, so wird das Dreyeck BDE, wie bekannt, gleichschenklicht, und die Winkel BDE, BED werden einander gleich. Der Winkel BEC aber, welchen der Halbmesser BE mit der Berührungslinie EC einschliesset, ist ein rechter Winkel V, 47. Nun ist dieser rechte Winkel BEC aus den beiden BED und DEC zusammen gesetzet. Also ist BED + DEC = R, welches R hier wieder wie sonst öfters einen rechten Winkel bedeutet, und demnach die erst gesetzete Summe doppelt genommen, oder 2BED + 2DEC = 2R. In dem Dreyecke BDE aber machen alle Winkel ebenfals zween gerade Winkel aus IV, 217. und es ist auch BED + BDE + DBE = 2R, oder weil BED so groß ist als BDE, und folgends BED + BDE so viel als 2BED, so kan man auch setzen 2BED + DBE = 2R. Vergleichet man dieses mit dem vorigen 2BED + 2DEC = 2R, so siehet man, daß diese Summen, welche beiderseits zween rechten Winkeln gleich seyn, auch ein ander selbst gleich seyn müssen, nemlich 2BED + DBE = 2BED + 2DEC, und wenn man von diesen beiden Summen das gemeinschaftliche 2BED wegnimmet, so bleibet endlich DBE = 2DEC.

F. 141.

§. 65. Und dieses ist der Satz, welchen wir heraus bringen wollen. Der Winkel DBE des Ausschnittes, welchen die zween Halbmesser DB, BE mit dem Bogen DaE machen, ist zwey mal so groß als der Winkel DEC, und folgends auch zweymal so groß als der Winkel in dem Abschnitte DAE, welcher auf eben dem Bogen DaE stehet, und der Winkel in dem Abschnitt DAE, welcher auf dem Bogen DAE stehet, ist die Helfte des Winkels DBE, welcher auf eben dem Bogen DaE stehet, und dessen Spitze an den Mittelpunct B raget.

V. Abschnitt. raget. Wenigstens ist dieses richtig erwiesen, so lange der Winkel an dem Mittelpuncte DBE kleiner ist, als zween rechte Winkel.

§. 66. Daß aber eben dieses auch richtig sey, wenn man sich vorstellet, daß die zween Halbmesser DB und BE einen Winkel nach aussen zu machen, welcher auf dem Bogen DAE stehet, und daß ein dergleichen Winkel, der nothwendig mehr betragen muß, als zween gerade Winkel, ebenfalls doppelt so groß seyn werde, als der Winkel, welcher auf eben dem Bogen DAE stehet, aber mit seiner Spitze den Umkreis des Cirkels, zum Exempel in a, erreichet, kan aus nachfolgendem erhellen. DBE sol nunmehro diesen Winkel bedeuten, welchen wir beschrieben, der nemlich auf dem Bogen DAE stehet. Es ist klar, daß derselbe mit dem eigentlichen Winkel DBE, der den Bogen DaE, ausschneidet, vier gerade Winkel mache IV, 68. Nun ist erwiesen, daß dieser letztere Winkel DBE doppelt so groß sey als DEC. Also ist der äussere Winkel $DBE + 2DEC = 4R$. Nun ist aber auch $DEC + DEc = 2R$; und also $2DEC + 2DEc$ doppelt so viel, und demnach $= 4R$. Folgends $DBE + 2DEC = 4R = 2DEC + 2DEc$. Und nimmet man hier wieder das gemeinschaftliche 2DEC zu beiden Seiten hinweg, so bleibet $DBE = 2DEc$. Da nun also der Winkel DEc dem Winkel in dem Abschnitt DaE gleich ist, so ist auch der Winkel DBE, welcher auf dem Bogen DAE stehet, und dessen Spitze in den Mittelpunct B fället, zweymal so groß als der Winkel, der auf eben dem Bogen DAE stehet, aber mit seiner Spitze in den Umkreis des Cirkels fället.

§. 67. Oder man benenne den Winkel an dem Umkreise der auf DaE stehet, mit dem Buchstaben A, den Winkel an dem Mittelpuncte, der auf eben dem Bogen stehet, mit B, den Winkel an dem Umkreise, der auf dem Bogen DAE stehet, bezeichne man mit a, und den Winkel an dem Mittelpuncte auf eben dem Bogen, mit b, und schliesse etwas kürzer folgender gestalt: $B + b = 4R$, wie leicht einzusehen. Es ist V, 62. aber erwiesen worden, daß $A + a = 2R$, und hieraus folget $2A + 2a = 4R$. Folgends ist $B + b = 2A + 2a$. Nun ist vermöge desjenigen, so von diesen Winkeln V, 65. bereits ausgemacht ist, $B = 2A$, und demnach, wenn man in dem erwiesenen Satz $B + b = 2A + 2a$ das eine dieser Dinge B vor das andere 2A setzet, $B + b = B + 2a$, woraus durch den Abzug des gemeinschaftlichen B kommet $b = 2a$, welches zu erweisen war.

§. 68.

§. 68. Wenn die Sehne DE, welche mit der Berührungslinie EC den Winkel DEC machet, welcher dem Winkel DAE gleich ist, durch den Mittelpunct des Cirkels B gehet, so wird der Winkel DEC gerade, denn die Berührungslinie machet allezeit mit dem Durchmesser einen geraden Winkel. V, 47. Der Bogen DAE aber so wol, als der Bogen DaE werden in diesem Fall halbe Cirkelkreise. Derowegen ist ein jeder Winkel, welcher in einem halben Cirkel DAE beschrieben ist, oder ein Winkel, welcher auf einem halben Cirkelkreise DaE dergestalt stehet, daß seine Spitze in den Umkreiß eben des Cirkels fället, von welchem jener die Helfte ist, ein gerader Winkel. Welches man auch daraus sehen kan, weil ein solcher Winkel die Helfte ist des eingebildeten Winkels DBE, welcher zween geraden Winkeln gleich ist. V, 65.

V. Abschnitt. F. 142.

§. 69. Stehet aber ein solcher Winkel wie DAE auf einem Bogen daE, welcher kleiner ist als ein halber Cirkelkreiß, oder stehet er in einem Bogen dAE, welcher grösser ist als ein halber Cirkelkreiß, so ist er spitzig. Denn die Sehne dE machet in diesem Fall mit der Berührungslinie EC einen Winkel dEC, welcher kleiner ist, als der gerade DEC, und dieser Winkel dEC ist allezeit dem Winkel in dem Bogen dAE gleich. V, 60. Hingegen ist ein Winkel stumpf, wenn er auf einem Bogen ∂aE stehet, welcher grösser ist als ein halber Cirkelkreis, oder in einem Bogen ∂AE, welcher kleiner ist, als ein halber Cirkelkreis. Weil in diesem Fall wenn ∂AE kleiner ist als ein halber Cirkel, die Sehne ∂E mit der Berührungslinie EC einen stumpfen Winkel machet.

§. 70. Diese Betrachtung der Winkel in den Abschnitten der Cirkel, giebt eine Anweisung an die Hand, eine Linie auf eine andere perpendicular zu setzen, welche in vielen Fällen von Nutzen, ja unentbehrlich ist. Zwo gerade Linien, die einen rechten Winkel einschliessen, sind auf einander perpendicular. Ein Winkel in einem halben Cirkel ist allezeit ein rechter Winkel. Dieses sind die Gründe, worauf wir uns gegenwärtig bey Ziehung einer Perpendicularlinie gründen werden.

§. 71. Es sey auf AB eine Perpendicularlinie durch das Punct B zu ziehen, ohne die Linie AB zu verlängern: So setze man auf AB ein gleichschenklichtes Dreyeck ABC, dessen Schenkel AC man nach Belieben annehmen kan, verlängere so dann die eine Seite AC, oben bey der Spitze C, so lange, bis CD so groß wird als AC. Ist dieses

F. 143.

V. Abschnitt.

ses geschehen, so kan man die verlangete Perpendicularlinie ziehen. Die Puncte D und B liegen in derselben, und man darf nur diese Puncte mit einer geraden Linie BD zusammen ziehen, so ist diese BD die gesuchte Perpendicularlinie. Und es ist nicht schwer einzusehen, wie diese Zusammensetzung der Linien, damit DB auf AB perpendicular werde, aus den eben gewiesenen Quellen fliesse. Setzet man einen Fuß des Cirkelinstruments in C ein, und fänget an einen Bogen durch A zu beschreiben, so gehet derselbe, wenn man in der Beschreibung fortfähret, durch B, weil AC der CB gleich ist, und fähret man weiter fort, so gehet eben der Bogen auch durch D. Es ist nunmehro nicht nöthig den Bogen weiter zu beschreiben. Weil der Mittelpunct desselben in C fället, so siehet man, daß ACD ein Durchmesser desselben, und folgends der Bogen ABD ein halber Cirkel sey. Es ist demnach der Winkel ABD ein Winkel in einem halben Cirkel, und folgends ein gerader Winkel, V, 68. und DB stehet auf der AB perpendicular.

§. 72. Dieses war ein Fall, in welchem uns die angegebene Eigenschaft eines geraden Winkels bequem und nützlich seyn kan. Denn es kommet öfters, daß man auf eine gerade Linie eine andere perpendicular zu setzen hat, und die erstere Linie doch nicht wohl verlängern kan, wobey die gegenwärtige Aufgabe zu statten kommet. Noch nothwendiger aber ist uns diese Art Perpendicularlinien zu ziehen, wenn uns ein Punct ausser dem Umkreis eines Cirkels gegeben ist, und wir sollen durch dasselbe Punct eine gerade Linie ziehen, welche den Cirkel berühret.

F. 144.

§. 73. Es sey der Mittelpunct des Cirkels A und ausser dem Umkreise desselben das Punct B gegeben, durch welches man eine gerade Linie ziehen soll, so den Cirkel berühret. Wir wissen schon, daß sie auf einem der Halbmesser des Cirkels perpendicular stehen muß, denn dergleichen Perpendicularlinien auf die Halbmesser können die Cirkel berühren, und berühren sie würklich, wenn sie auf ihren äussersten Puncten stehen. V, 42. Alle andere Linien haben entweder mit dem Umkreise gar keine Gemeinschaft, oder sie schneiden den Cirkel. Was aber dieses vor ein Radius sey, auf welchen die gerade Linie durch B pendicular fallen muß, können wir so gleich nicht wissen. Denselben nun zu finden, ziehe man nur eine gerade Linie zwischen B und A. Diese ist BA. Nachdem man dieselbe in C in zwey gleiche Theile getheilet, so beschreibe man um C durch A und B einen Cirkelkreis, wel-

welcher den erst beschriebenen Cirkel, dessen Mittelpunct in A fället, nothwendig in zweyen Puncten D und d schneiden wird. Diese sind die Berührungspuncte zu den Berührungslinien die durch B können gezogen werden. Man ziehe BD und Bd. Beyde gerade Linien berühren den Cirkel, die eine in D, die andere in d. Beyde gehen durch B.

§. 74. Denn wenn man aus dem Mittelpuncte A auf D und d die Halbmesser AD, Ad ziehet, so sind dieselben nothwendig auf die geraden Linien BD, Bd perpendicular, weil die Winkel BDA, und BdA Winkel in einem halben Cirkel sind, wie aus der Beschreibung klar ist. Denn man hat den Mittelpunct C in der geraden Linie AB genommen, welche AB folgends der Durchmesser des Cirkels BDA ist. Nun aber berühret eine jede gerade Linie einen Cirkel, welche durch das Ende eines Halbmessers gehet, und auf demselben perpendicular stehet. Es müssen derowegen die geraden Linien BD, Bd den Cirkel nothwendig in D und d berühren.

§. 75. Man siehet hieraus, daß durch ein jedes Punct B ausser dem Cirkel zwo gerade Linien BD, Bd können gezogen werden, welche denselben berühren. Denn wenn man die Berührungslinien, wie gewiesen worden, ziehen will, so findet man jederzeit zween Durchschnitte D und d, und man kan durch einen jeden derselben eine Berührungslinie ziehen. Und man hat eben die Gründe zu zeigen, daß Bd den Cirkel berühre, welche man bey BD antrift, und aus welchen man geschlossen, daß ihn BD berühre. Man kan aber auch leicht einsehen, daß durch ein dergleichen Punct als hier D, nicht mehr Berührungslinien an eben den Cirkelkreis können gezogen werden als die zwo BD und Bd. Alle übrige gerade Linien, welche durch das Punct B gehen, fallen entweder innerhalb den Winkel DBd, oder ausserhalb denselben. Die gerade Linien, welche durch B gehen, und ausserhalb den Winkel DBd fallen, haben mit dem Cirkel gar nichts gemein. Sie gehen vor ihn vorbey, und treffen gar kein Punct desselben an: da im Gegentheil die geraden Linien, welche durch B innerhalb DBd gezogen sind, denselben schneiden. Weder die erstern noch die letztern sind demnach Berührungslinien, es sind also derselben nur zwo, nemlich eben diejenigen, welche wir gefunden.

§. 76. Die Theile dieser Berührungslinien, von dem Puncte B an, durch welches sie beyde gehen, bis an die Puncte D, d, in welchen sie den Cirkel berühren, sind einander gleich, BD nemlich = Bd.

V. Abschnitt. Dieses ist aus den rechtwinklichten Dreyecken ABD, und ABd leicht einzusehen. In dergleichen Dreyecken sind alle Seiten und Winkel gleich, welche auf einerley Art liegen, wenn in einem derselben zwo Seiten angetroffen werden, welche zween Seiten des andern gleich sind. IV, 258. Nun sind in unsern Dreyecken ABd und ABD, die Seiten AD und Ad gleich, weil sie Halbmesser von dem Cirkel sind, welcher um A beschrieben worden, und die Seite AB ist beyden Dreyecken gemeinschaftlich. Demnach sind nothwendig auch die dritten Seiten BD, Bd einander gleich. Ja wir sehen aus dem gegebenen Beweiß auch noch etwas mehreres ein, nemlich, daß nachdem man die zwo Berührungslinien BD, Bd durch ein Punct ausserhalb des Cirkelkreises B gezogen, die gerade Linie BA, welche gedachtes Punct B mit dem Mittelpuncte des Cirkels verknüpfet, den Winkel DBd, welchen die Berührungslinien mit einander machen, in zwey gleiche Theile ABD und ABd theilen werde.

Beschreibung der regulären Figuren.

§. 77. Dieses ist dasjenige, so wir von einem Cirkel im Anfang theils zu wissen nöthig hatten, und theils einsehen konten. Denn man muß gestehen, daß noch verschiedene Aufgaben bey demselben übrig sind, welche man vermittelst der Geometrie, welche wir abhandeln, und in welcher keine andere krumme Linie, als der Cirkel selbst, betrachtet wird, gar nicht auflösen können, ob sie zwar einen hauptsächlichen Nutzen haben; und unter diesen ist die Eintheilung des Cirkels, oder seines Umkreises. Wir können einen jeden Bogen in zwey gleiche Theile theilen, und wie dieses zu verrichten sey, ist oben V, 27. gewiesen worden. Wir können einen ganzen Umkreis gar leicht vermittelst des Durchmessers in seine zwo Helften theilen, und eine jede Helfte wieder in zwey Viertheile, und ein jedes Viertheil wieder in zwey Achtel; und eben so kan man auch einen jeden Bogen, welchen man in zwo Helften getheilet, ferner in zwey Viertheile theilen, und so immer weiter fort. Es sind auch noch andere Theilungen des ganzen Umkreises, welche man bloß durch die Anfangsgründe, und vermittelst des Cirkels und Linials, als der einzigen Instrumente, deren man sich dabey bedienet, verrichten kan: und wir werden unten zeigen, wie ein ganzer Umkreiß auch in sechs gleiche Theile könne getheilet werden, ob wir zwar die übrigen Theilungen in fünf und sieben gleiche Theile, welche Euclides ebenfals zu verrichten lehret, anzuführen nicht eben nöthig erachten. Bey dem allen aber hat man keine

Me-

Methode einen Umkreis in so viele gleiche Theile zu theilen, als man will, und es stehet nicht einmal bey der Geometrie, welche wir lehren, daß sie angebe, wie man einen jeden vorgegebenen Bogen in drey oder fünf, oder sieben gleiche Theile theilen soll, und wenn wir also die Gränzen der Wissenschaft so gar genau beobachten solten, wären wir in der That bey dem Zweck, welchen wir uns vorgesetzet, bis auf einige Kleinigkeiten mit der Betrachtung des Cirkels am Ende.

§. 78. Es hat aber die Theilung des Cirkels, welche sich Geometrisch nicht geben lässet, in der Ausübung ungemeinen Nutzen, und es gründen sich viele Auflösungen solcher Aufgaben darauf, welche wir nicht entbehren können. Was ist hier besser, wegen einiger Kleinigkeiten, die uns die strengeste Vernunftlehre bey der Lehrart vorschreibet, nützliche Dinge wegzulassen, oder aber des Nutzens halber diese Banden zu zerreissen? Allerdings ist das letztere dem erstern vorzuziehen: denn der Nutzen allein ist es, weswegen die Wissenschaften gelehret und gelernet werden.

§. 79. Ist gleich die Theilung eines Cirkelkreises in so viele gleiche Theile als man will, Geometrisch zu reden, ohnmöglich, so lässet sie sich doch Mechanisch und durch Versetzung des Cirkels so leicht verrichten, daß wir nicht zweifeln, es werden viele, welche die Kunst mit Cirkel und Linial umzugehen, vor die Geometrie halten, sich sehr wundern, daß wir bey einer, in ihren Augen so leichten Sache, so viel Schwierigkeit machen. Dieses ist bey denjenigen, welche unsern Fußstapfen, oder vielmehr der Anweisung der wahren Geometrie der Griechen, bis hieher gefolget, nicht zu befürchten, und wir können also ohne fernere Erinnerung weiter gehen. Doch dürfte vielleicht nicht unnöthig seyn, die Mechanische Art, nach welcher ein Bogen in so viele gleiche Theile getheilet werden kan, als man will, mit wenigem anzugeben, ob sie zwar an sich keine Schwierigkeit hat.

§. 80. Die Zahl der Theile, welche der Bogen haben soll, ist entweder eine einfache Zahl 3, oder 5, oder 7, oder eine andere, so aus einfachen Zahlen zusammen gesetzt worden, als 12. In dem ersten Fall, wenn zum Exempel der Bogen AB in drey gleiche Theile zu theilen ist, nimmet man den dritten Theil, nach dem Augenmaß AC, fasset so dann mit dem Cirkelinstrumente die Sehne von diesem Bogen AC, (daß man sie zeichne, wie hier der Deutlichkeit halber geschehen, ist eben nicht nöthig) und träget diese Sehne von C weiter

F. 145.

V. Abschnitt.

ter fort in CD, und endlich leget man sie aus D nach B. Fället nun ihr Ende genau in das Punct B, so ist dieses ein Zeichen, daß uns das Augenmaß nicht betrogen, und daß AC würklich der dritte Theil des Bogens AB sey. Denn weil die Bogen AC, CD, DB gleiche Sehnen haben, so sind sie gleich: und weil gesetzet wird, daß sie zusammen den Bogen AB ausmachen, so ist ein jeder derselben der dritte Theil des ganzen Bogens AB. Findet man aber, daß die Sehne AC, nachdem sie dergestalt in den Bogen AB fortgesetzet worden, das dritte mal entweder B nicht erreichet, oder über B hinaus fället, so siehet man leicht, daß man AC entweder zu klein oder zu groß angenommen, und man kan so dann den Fehler entweder ganz und gar verbessern, oder doch vermindern, bis man endlich, nach wiederhohlten Proben, den dritten Theil genau getroffen.

§. 81. Dieses heisset Mechanisch theilen. Der Beweiß von allen solchen Arbeiten gründet sich bloß auf die Sinnen. Will jemand in Zweifel ziehen, ob durch die gewiesenen Handgriffe der dritte Theil des Bogens AB richtig gefunden worden sey, so kan man ihn davon nicht anders überführen, als wenn man zeiget, daß die Sehne AC allerdings sich drey mal in dem Bogen AB fortsetzen lässet, da im Gegentheil die Richtigkeit der Geometrischen Auflösungen durch Vernunftschlüsse dargethan wird, und man nicht nöthig hat, dabey auf den Augenschein, als einen Hauptgrund, es ankommen zu lassen. Es hat auch die Geometrische Auflösung vor der Mechanischen dieses zum voraus, daß durch jene das gesuchte auf einmal gefunden wird, durch diese aber erst durch wiederhohlte Proben, oder doch so, daß man nicht gleich Anfangs gewiß seyn kan, man habe nicht gefehlet. Wiewohl auch dieses nicht zu leugnen ist, daß so lange man bloß auf den Nutzen in der Ausübung siehet, dergleichen Mechanische Auflösungen öfters den Geometrischen vorzuziehen sind. Und dieses darum, weil doch endlich die ganze Richtigkeit in der Ausübung auf ein scharffes Gesicht ankommet, welches aber so wohl bey einer Geometrischen als bey einer Mechanischen Ausübung fehlen kan. Man kan würklich, wenn zu einem richtigen Instrumente, oder sonst zu einem andern Zweck, ein Bogen genau in zwey gleiche Theile zu zerschneiden ist, der Geometrischen Theilung niemals ehe vollkommen trauen, bevor man versucht, ob die Sehnen der Bogen, welche als die Helften des Ganzen gefunden worden, einander vollkommen gleich sind.

§. 82. Solchergestalt verfähret man, wenn die Zahl der Theile die

die der Bogen haben soll, eine einfache Zahl ist; wäre sie aber eine andere Zahl, so könte man sie erst in ihre einfache Zahlen zerfällen, aus welchen sie durch die Multiplication entstanden ist, und so dann nach und nach theilen. Zwölfe ist so viel als 2 × 2 × 3, oder zwölfe ist entstanden, indem man zwey in zwey, und das Product 4 wieder durch drey multiplicirет hat. Soll man also einen Bogen in zwölf Theile theilen, so theile man ihn erstlich in 2 Theile, und eine jede dieser Helften wieder in 2 Theile, so hat man der Theile im ganzen Bogen viere, deren jedes man wieder in 3 Theile theilen muß, damit man in dem Ganzen 12 bekommet. Und so verfähret man in allen dergleichen Fällen. Wir werden eine dergleichen Theilung ins künftige aus den angeführten Ursachen, als möglich und bekannt annehmen.

§. 83. Und dieselbe führet uns erstlich darauf, wie wir in einem jeden gegebenen Cirkelkreise eine gleichseitige und gleichwinklichte Figur von so vielen Seiten als verlanget wird, beschreiben sollen, dergestalt nemlich, daß alle Ecken dieser geradelinichten Figur in den Umkreis des Cirkels fallen. Es sey zum Exempel in dem gegebenen Cirkel der 146 Figur ein Fünfeck zu beschreiben, dessen Winkel und Ecken alle gleich sind: so theile man, wie man kan, den Umkreis in fünf gleiche Theile, in A, B, C, D, E, ziehe so dann jede zwey der nächsten dieser Theilungspuncte mit geraden Linien zusammen, welche Sehnen von dem Bogen, in welche der Umkreis getheilet worden, abgeben werden, und diese Sehnen werden das verlangte Fünfeck einschliessen.

F. 146.

§. 84. Man siehet leicht ein, daß die Figur so viele Seiten haben werde, als viele der Theile sind, in welche man den Umkreis getheilet, das ist, eben so viele als verlanget worden, und nicht viel schwerer ist es zu bemerken, daß diese Seiten alle einander gleich seyn werden. Denn sie sind Sehnen von gleichen Bogen eines Cirkels, welche allezeit einander gleich sind; V, 9. ja in der Mechanischen Theilung des Umkreises, welche wir V, 80. gezeiget, werden eben dadurch die Bogen einander gleich gemacht, daß man ihre Sehnen gleich machet, und ist also die Gleichheit der Sehnen nicht einmal aus der Gleichheit der Bogen zu schliessen. Daß aber auch alle Winkel der also gezeichneten Figur einander gleich sind, siehet man so wohl durch den natürlichen Verstand daraus, weil sie alle auf einerley Art entstanden sind, und derowegen nicht das geringste da ist, worauf man sich vernünftig gründen könte, wenn man einen derselben vor grösser oder kleiner halten wolte, als den andern; als auch durch dasjenige,

so

V. Abschnitt.

so in dieser Geometrie ohnlängst vorher gegangen. Alle Winkel des in dem Cirkel beschriebenen Fünfecks fallen mit ihren Spitzen in den Umkreis des Cirkels, und sie stehen alle auf gleichen Bogen. Nemlich ein jeder derselben stehet in der Figur, welche wir vor uns haben, auf drey Fünfteln des ganzen Umkreises; A auf BC+CD+DE, B auf CD+DE+EA, und so ferner. Oder man kan auch sagen, jeder derselben stehet in gleichen Bogen eben des Cirkels, A in BA+AE, B in AB+BC, und so fort. Da nun alle Winkel, deren Spitzen in den Umkreis des Cirkels fallen, und die auf oder in gleichen Bogen stehen, einander beständig gleich sind, V, 59. so müssen auch die Winkel unserer Figur A, B, C, D, E, alle einander gleich seyn, und ist also die beschriebene Figur so wohl gleichseitig als gleichwinklicht.

F. 147. §. 85. Wenn man aus dem Mittelpuncte des Cirkels F an jede Ecke des Vieleckes einen Halbmesser ziehet FA, FB, FC, u. s. f. so werden die gleichschenklichten Dreyecke FAB, FBC, und so ferner, einander alle gleich, wie aus dem, so wir bey Betrachtung der Sehne gesaget haben, einzusehen ist: und auch ohne Weitläuftigkeit daraus kan geschlossen werden, weil alle Seiten aller dieser Dreyecke einander gleich sind. Denn sie sind theils Halbmesser von einem Cirkel, theils aber Sehnen von gleichen Bogen. Demnach sind auch so wohl die Winkel bey F alle einander gleich, als auch die bey A, B, C, und so ferner, wie man auch diese letztern mit einander vergleichen will. Es ist demnach FBA die Helfte des Winkels ABC, und so ferner. Man übersiehet auch alles dieses gar leicht, bloß mit der natürlichen Vernunft.

§. 86. Es sind aber die Winkel an dem Umkreise, zum Exempel, die bey A, den Winkeln an dem Mittelpuncte F, nicht nothwendig gleich. Man siehet leicht, daß wenn man die Zahl der Seiten vermehret, die Winkel an dem Mittelpuncte immer kleiner und kleiner werden, da im Gegentheil die Winkel an dem Umkreis bey dieser Vermehrung der Seiten des Vielecks, (wenn man nemlich zum Exempel dem Vieleck an statt 5 Seiten, derer 7 oder 9 oder 17 giebt) beständig wachsen. Wie ist es denn möglich, daß die Winkel bey A oder B oder C denen bey F in allen Vielecken gleich seyn solten? Doch ist ein Fall, in welchem diese Winkel gleich werden; und diesen werden wir so gleich zeigen.

§. 87. Die Summe aller Winkel bey F, machet vier gerade Winkel aus, wie dieses bey allen Winkeln, deren Spitzen in einem

Pun-

Puncte zusammen stossen, eintrift. IV, 68. Und weil sie einander gleich sind, so ist ein jeder derselben der so vielste Theil von vier geraden Winkeln, als viele Seiten die Figur hat, das ist, als viele der Bogen AB, BC, &c. sind, in welche der ganze Umkreis getheilet worden. Und wenn demnach, wie in unserer Figur der Seiten des Vieleckes an der Zahl sechse sind, so ist ein jeder der Winkel an dem Mittelpunct F der sechste Theil von vier geraden Winkeln, das ist $\frac{4}{6}$, oder welches eben das ist, $\frac{2}{3}$ von einem geraden Winkel: gleich wie auch AB der sechste Theil des Umkreises ist.

§. 88. Kan man demnach einen Winkel wie man wil, theilen, und nach Belieben den dritten, fünften, siebenden Theil von einem, oder von vier geraden Winkeln, schaffen; so kan man auch leicht den Umkreis des Cirkels eben so theilen. Nemlich so bald in unserer Figur der Winkel an dem Mittelpunct F zwey Dritteln eines rechten Winkels gleich gemachet wird, so ist sein Bogen BC der sechste Theil des ganzen Umkreises. Allein es hat mit der Theilung der Winkel überhaupt eben die Schwierigkeit, welche wir bey der Theilung der Bogen angegeben, und es hänget eines dieser Dinge von dem andern ab, die Theilung des Bogens in einem Ausschnitte, von der Theilung des Winkels, und die Theilung des Winkels von der Theilung des Bogens, wie wir bereits oben V, 13. bemerket.

§. 89. Wenn aber der Winkel an dem Mittelpuncte AFB $\frac{2}{3}$ von einem rechten Winkel ausmachet, welches, wie wir V, 87. gesehen, bey einem Sechseck von gleichen Seiten und Winkeln, und zwar bey diesem alleine, eintrift; so müssen die übrigen beyde Winkel des Dreyecks AFB, nemlich FAB und ABF, zusammen $\frac{4}{3}$ eines rechten Winkels ausmachen, sonst könte die Summe aller Winkel des Dreyecks ohnmöglich $\frac{6}{3}$ von einem geraden Winkel, oder zwey gerade Winkel betragen, so doch in jedem Dreyeck seyn muß. IV, 217. Es sind aber die besagten beyden Winkel bey A und B einander gleich, und da sie also zusammen gesetzet $\frac{4}{3}$ eines geraden Winkels ausmachen, so muß jeder derselben die Helfte hiervon, nemlich $\frac{2}{3}$ eines geraden Winkels seyn. Also sind alle drey Winkel des Dreyecks ABF einander gleich, und demnach auch die Seiten desselben. Oder das Dreyeck BAC ist gleichseitig. IV, 129. Folgends ist die Seite des regulären Sechseckes AB, dem Radius AF des Cirkels gleich, in welchem das Sechseck kan beschrieben werden. Man beschreibet also in einem gegebenen Cirkel ein reguläres Sechseck gar leicht. Man darf nur

V. Abschnitt. den Radius in dem Umkreis herum setzen, er wird denselben genau in sechs gleiche Theile theilen, und man wird, wie überhaupt gezeiget worden, V, 83. so dann das Sechseck ausmachen können.

§. 90. Vermehret man in einer regulären Figur, welche man in dem Cirkel beschrieben, die Zahl der Seiten, und beschreibet zum Exempel an statt eines Sechsecks in eben dem Cirkel ein Zwölfeck, so werden die Bogen in welche man den Umkreis theilen muß, um die Figur zu beschreiben, nothwendig kleiner. Also werden auch die Seiten selbst kleiner, V, 39. sie entfernen sich von dem Mittelpuncte, und nähern sich hingegen dem Umkreise des Cirkels. V, 37. Alles dieses ist aus demjenigen leicht zu schliessen, so wir gleich Anfangs von den Sehnen gesehen. Da aber doch allezeit die Seiten einer in den Cirkel beschriebenen Figur, Sehnen von dem Cirkel sind, so können diese Seiten ohnmöglich, weder ganz noch zum Theil, ausserhalb des Cirkels fallen, und ist also ein jedes Vieleck, so wir nach gegenwärtiger Anweisung beschrieben, ganz und gar innerhalb des Cirkels enthalten, und kleiner als der Cirkel, ob zwar durch die beständig fortgesetzte Vermehrung der Zahl der Seiten das Vieleck dem Cirkel immer näher und näher kommet, und von demselben der Grösse und Figur nach immer weniger und weniger verschieden wird. Man gebe sich die Mühe diese Vermehrung der Zahl der Seiten selbst zu verrichten, so wird man die Sache vollkommen deutlich einsehen.

§. 91. Wil man um einen gegebenen Cirkel herum ein reguläres Vieleck beschreiben, so nemlich, daß alle Seiten des Vieleckes den Cirkel berühren, so kan man es fast auf eben die Art thun, die wir gewiesen haben ein Vieleck in einen Cirkel zu beschreiben. Man theile wieder den gegebenen Cirkel in so viele gleiche Theile, als viele Seiten die Figur haben sol, vermittelst der Puncte A, B, C, und so fort. Wir haben sieben dergleichen Theile gemacht, weil wir ein Siebeneck beschreiben wollen. Ist diese Theilung verrichtet, so ziehe man V, 42. durch ein jedes der Puncte A, B, C und so weiter, eine gerade Linie, welche den Cirkel berühret, und verlängere sie so lange, bis sie die nächste Berührungslinie antrift, wodurch sich die Winkel E, F, G geben werden, die Figur E, F, G und so fort, wird das verlangete Vieleck seyn.

F. 148.

§. 92. Auch hier zeiget der natürliche Verstand die Richtigkeit der Auflösung leicht. Der Cirkel ist um und um von einerley Rundung.

bung. Die Seite des Vieleckes EF ist nicht anders geleget worden als die andere FG, und die dritte und die übrigen. Dadurch sind die Ecken E, F, G entstanden, und die Seiten EF, FG haben dadurch ihre Länge bekommen. Welche Seite sol denn länger seyn als eine andere, und welcher Winkel E, F, G &c. ist grösser als der andere? Es ist nirgends etwas verschiedenes angenommen worden, indem wir das Vieleck verfertiget haben, wodurch solte demnach dasselbe auf einer Seite anders worden seyn, als auf der andern?

§. 93. Ein Geometra aber wird hier, aus den gegebenen Gründen, also schliessen können. Wenn man von den Puncten A, B, C nach dem Mittelpuncte gerade Linien ziehet, und ferner noch andere von den Ecken E, F, G &c., so siehet man, daß die Winkel bey H alle gleich seyn müssen. Denn AHB ist dem BHC gleich, weil die Bogen AB und BC gleich gemachet worden, und so ist es rund herum bey allen solchen Winkeln. Da nun aus dem Puncte E, aus welchem zwo gerade Linien gezogen sind EA, EB, die den Cirkel in A und B berühren, auch die Linie EA nach dem Mittelpuncte gezogen ist, so schneidet diese EH den Winkel AHB in zwey gleiche Theile, V, 76. und eben so theilet FH den Winkel BHC gleich, und so ist es wieder rings herum. Es sind demnach alle Winkel um den Mittelpunct H, AHE, EHB, BHF und so fort, einander gleich, weil ein jeder derselben eine Helfte ist eines der gleichen Winkel AHB, BHC, und so weiter. Da nun also zwey Dreyecke die neben einander auf einer Seite des Vieleckes stehen, als HEB, und HBF, den Halbmesser HB mit einander gemeinschaftlich haben, und ihre Winkel bey H einander, wie erwiesen worden, gleich, ihre Winkel bey B aber gerade, und folgends einander ebensals gleich sind: denn die Berührungslinie EF machet mit dem Halbmesser HB nothwendig gerade Winkel, V, 47. so sind die übrigen Winkel dieser Dreyecke bey E und F einander ebenfals gleich, nemlich HEB = HFB, wie auch ihre übrige Seiten EB = BF. IV, 126. Da aber ausser dem auch die Seiten EA und EB gleich seyn, wie auch die beyden Winkel bey E, V, 76. so ist AE = EB, und EB = BF, und BF = FC, und so rings herum. Wie auch AEH = HEB, und HEB = HFB, und HFB = HFC, und so wieder rings herum. Und wenn man demnach überall zwo von den gleichen Linien EB + BF, wie auch FC + CG und so fort zusammen setzet, so siehet man daß EF, FG und die übrige Seiten unserer Figur einander gleich sind. Man setze ferner die zween gleiche Winkel bey

V. Abschnitt. E, F, G zusammen, so bekommet man die Winkel des Vielecks, welche bey so gestalten Sachen, da ihre Helften gleich sind, auch alle gleich seyn müssen. Und demnach hat das Vieleck, welches wir um den Cirkel herum beschreiben, lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel, wie verlanget worden.

§. 94. Die Puncte E, F, und so ferner, der Berührungslinien, welche die Seiten der Figur abgeben, sind am allerweitesten von dem Umkreise des Cirkels entfernet. Beschreibet man aber um eben den Cirkel ein anderes reguläres Vieleck, welches mehr Seiten hat als das gegenwärtige, so werden die Seiten nothwendig kürzer, und die Ecken dieses Vielecks fallen dem Umkreis des Cirkels näher, und dieses geschiehet immer fort, je mehr man Seiten in das reguläre Vieleck bringet. Doch weil die Seiten eines solchen Vieleckes doch immer Berührungslinien bleiben, so können sie ohnmöglich weder ganz noch zum Theile innerhalb des Umkreises des Cirkels hinein fallen; V, 42. noch weniger können die Ecken der Figur als diejenigen Puncte dieser Berührungslinien, welche jederzeit am allermeisten sich von dem Umkreise entfernen, jemals innerhalb des Umkreises zu liegen kommen, man mag auch die Zahl der Seiten des Vielecks vermehren wie man wil, und demnach ist ein dergleichen Vieleck, so viele Seiten es auch haben mag, immer grösser als der Cirkel.

§. 95. Aus demjenigen, so wir V, 85. von den Winkeln der regulären Vielecke gewiesen, schliesset man auch, wie auf eine gegebene Seite AB ein reguläres Vieleck von so vielen Seiten, als erfordert wird, zu setzen sey. Wir wollen uns vorstellen, daß dieses bereits verrichtet worden, daß man, zum Beyspiele, auf AB ein Fünfeck in einem Cirkul beschrieben, und aus dem Mittelpuncte desselben C nach A und B die zween Halbmesser CA, CB gezogen: so ist C der Winkel an dem Mittelpuncte bey einem Fünfecke, und wird gefunden, wenn man vier rechte Winkel durch die Zahl der Seiten des Fünfecks, das ist durch 5, theilet; er hält demnach $\frac{4}{5}$ eines rechten Winkels. Diesen ziehe man von der Summe aller Winkel des Dreyecks ABC, das ist von zween geraden Winkeln, ab, so bleibet $2-\frac{4}{5}$, das ist $\frac{10}{5}-\frac{4}{5}$, oder $\frac{6}{5}$ von einem rechten Winkel, und so viel beträget die Summe der beyden Winkel bey A und B. Weil sie einander gleich sind, so ist jeder dieser Winkel, die Helfte ihrer Summe, und demnach ist $A=B=\frac{3}{5}$ von einem geraden Winkel. Wir wieder-

F. 149.

derholen hier was bereits gezeiget worden, etwas anders. Denn wir haben bereits IV, 238. eine allgemeine Regel angegeben, den Winkel, welchen die Seiten eines jeden gleichwinklichten Vielecks mit einander machen, zu finden, und von einem solchen Winkel ist, CAB = CBA die Helfte. V, 85. Nach dieser Berechnung ist das Fünfeck leicht beschrieben. Man setze an die gegebene Seite AB beyderseits die Winkel A und B, wie sie gefunden werden, nemlich $\frac{3}{5}$ von einem geraden Winkel, dadurch wird das Dreyeck ACB verfertiget, dessen Spitze in den Mittelpunct des Cirkels fället, in welchem das Fünfeck kan beschrieben werden, dessen Seite AB ist, und in welchem sich die Sehne AB fünfmal herum tragen lässet. Denn weil der Winkel bey C, ein Fünftel ist von vier rechten Winkeln, so muß, wie gezeiget worden, auch der Bogen AB der fünfte Theil des ganzen Umkreises seyn, V, 13. und demnach seine Sehne AB, wenn man sie fort träget, wieder das andere, und so dann das dritte, das vierte, und das fünfte Fünftel von dem Umkreise abschneiden, und folgends diesen in fünf gleiche Theile theilen.

V. Abschnitt.

§. 96. Wenn man demnach nur einen rechten Winkel theilen könte, wie man wolte, so hätten auch alle dergleichen Aufgaben keine Schwierigkeit; da aber, wie V, 75. gesaget worden, eine allgemeine Theilung dieses Winkels wie aller übrigen nicht kan gezeiget werden, so bleibet auch die gegenwärtige Auflösung im Grunde mangelhaft, so doch, daß dadurch die Ausübung nicht das geringste leidet. Denn man kan $\frac{3}{5}$ von einem geraden Winkel leicht angeben, indem man aus der Spitze A des geraden Winkels BAC den Quadranten BC beschreibet, diesen in fünf gleiche Theile theilet, und nach dem dritten Theilungspunct die Linie AD ziehet: so wird der Winkel DAC, dreyen Fünfteln des geraden Winkels BAC gleich, und folgends die Helfte des Winkels, welchen die Seiten eines Fünfeckes einschliessen. Eben so verfähret man in allen dergleichen Fällen.

F. 150.

§. 97. Wäre aber auf die Seite AB, an statt des Fünfeckes ein Sechseck zu beschreiben gewesen, so hätte man den Mittelpunct des Cirkels C, in welchen es zu beschreiben ist, geometrisch finden können, weil in diesem Fall das Dreyeck CAB gleichseitig, und der Halbmesser CA der Seite AB gleich ist. V, 89. Man darf demnach nur auf die gegebene Seite AB ein gleichseitiges Dreyeck beschreiben, so hat man den Mittelpunct des Cirkelkreises zu dem Sechseck. Uebrigens verfähret man, wie gelehret worden.

V. Abschnitt. F. 151.

§. 98. Nehmen wir nun dasjenige, so von den regulären Vielecken gesaget worden ist, zusammen, und beschreiben in einem Cirkel ein reguläres Vieleck von so vielen Seiten als man wil, zum Exempel das Fünfeck ABCDE, und ein anders von eben so vielen Seiten um denselben, und vermehret so dann die Zahl der Seiten beyder Vielecke: (am bequemsten ist es, daß man ihrer doppelt so viel mache): so sehen wir, daß, indem sich der Umkreis des innern Vielecks nach allen Seiten an den Umkreis des Cirkels begiebet, V, 90. und der Umkreis des äussern Vieleckes sich ebenfals mit allen seinen Ecken von aussen dem Cirkel nähert: V, 94. sich auch die Umkreise dieser zweyen Vielecke einander selbst nähern müssen, oder daß sich der Umkreis des äussern Vieleckes, welches mehr Seiten hat, dergleichen in der Figur das äussere Zeheneck ist, von dem Umkreise des innern Vieleckes von eben so vielen Seiten um und um weniger entferne, als der Umkreis des äussersten Vieleckes, von wenigern, nemlich in unserem Fall von fünf Seiten sich von dem Umkreise des innern Vieleckes von eben so vielen Seiten um und um entfernet, daß aber beständig, weil kein Punct des Umkreises des äussern Vieleckes innerhalb des Cirkels, V, 90. und kein Punct des Umkreises des innern Vieleckes ausserhalb des Cirkels fallen kan, V, 94. der Umkreis des Cirkels zwischen beyden Umkreisen der Vielecke in der Mitte bleibe, und von den Umkreisen der Vielecke beschlossen werde. Vermehret man nun die Zahl der Seiten noch weiter, und machet sie wieder doppelt so groß als sie vorher waren, so kommen die Umkreise der Vielecke einander noch näher, es gehet dieses ohne Ende fort, und man kan keine Gränzen setzen, wo diese Näherung aufhören solte.

§. 99. Gesetzet, man habe in Gedanken die Seiten der Vielecke auf die Art bis auf tausend vermehret, so siehet man leicht, daß wenn man zwey Tausendecke, eines um den Cirkel, und eines innerhalb desselben beschreiben wil, der Unterscheid der Umkreise kaum mehr mit den Augen wird können bemerket werden. Man versuche nur ein dergleichen Vieleck von vier und zwanzig Seiten zu beschreiben, so wird man schon sehen, wie wenig ihre Umkreise von einander abstehen, und was ist 24 gegen tausend? Doch ist hier noch ein Unterschied des innern Vieleckes von dem äussern einiger massen merklich, und auch bey einem Tausendecke kan wenigstens der Verstand uns einen Unterschied des äussern Vielecks von dem inneren vorstellen. Und eben so ist es, wenn man auch den Vielecken eine Million von Seiten gäbe; die richtigsten

Schlüsse

Schlüsse werden uns allezeit dahin bringen, daß wir zugeben müssen, daß das äussere Vieleck, welches um den Cirkel beschrieben worden, grösser sey als das innere. Und wie könte sonst jenes das äussere, und dieses das innere seyn? die Seiten des äussern Vieleckes sind allezeit Berührungslinien, und entfernen sich von dem Umkreise des Cirkels, so bald sie sich von den Berührungspuncten entfernen. Und die Seiten des innern Vieleckes sind allezeit Sehnen, welche demnach ganz in dem Cirkel liegen, und bloß mit ihren äussersten Puncten in dessen Umkreis fallen können.

§. 100. Doch fället der Umkreis des Cirkels beständig zwischen die Umkreise zweyer dergleichen in und um denselben beschriebener Vielecke, und ist grösser als der Umkreis des innern, und kleiner als der Umkreis des äussern: und sind der Seiten viele, so ist der Umkreis des Cirkels von keiner dieser beyden eckichten Umkreise sonderlich unterschieden, weil die eckigten Umkreise selbst einander fast gleich sind. Man siehet hieraus, wie man eine Länge angeben könne, welche dem Umkreise eines Cirkels ziemlich nahe kommet. Man beschreibe in dem Cirkel ein reguläres Vieleck von sehr vielen Seiten, je mehr je besser, zum Exempel ein 96 Eck, und um den Cirkel beschreibe man ein reguläres Vieleck von eben so vielen Seiten. Man messe oder suche auf diejenige Art, welche am genauesten zum Zweck führen kan, den Umkreis so wohl des innern als des äussern Vielecks. Man kan den einen oder den andern derselben vor den Umkreis des Cirkels halten. Eigentlich werden durch diese Umkreise der beyden Vielecke die Gränzen bestimmet, zwischen welche der Umkreis des Cirkels gewiß fallen muß, als welcher grösser ist als der Umkreis des innern Vieleckes, und kleiner als der Umkreis des äussern. Man siehet leicht, daß man dadurch ausser den Stand gesetzet wird, bey dem Umkreise sonderlich zu fehlen, und daß man noch über dieses die Fehler immer verkleinern kan, indem man nur den Vielecken mehr Seiten giebet.

Von geraden Linien, so den Cirkel schneiden.

§. 101. Dasjenige, so wir bisher von dem Cirkel gesehen, ist aus der Betrachtung der Sehnen desselben und der Berührungslinien geflossen. Wir haben nur noch etwas weniges von solchen geraden Linien zu sagen, welche keine Sehnen sind, und den Umkreis des Cirkels doch schneiden, wenn sie verlängert werden: oder die von einem

V. Abschnitt. einem gegebenen Puncte, welches der Mittelpunct nicht ist, an den Umkreis des Cirkels gezogen werden. Es sey erstlich das Punct A dergestalt innerhalb des Cirkels gegeben, und von demselben sey durch den Mittelpunct die Linie BCD gezogen. Man ziehe ferner AE, AF, bis an den Umkreis, und an einer Seite des Durchmessers: nicht etwa eine zur Rechten desselben, und die andere zur Linken: so wird allezeit diejenige Linie grösser, welche sich von der Linie AB weiter entfernet, und mit dieser Linie einen grössern Winkel einschliesset, als diejenige, die sich derselben mehr nähert. AF ist grösser als AE, und so ist es immer, man mag dergleichen Linien ziehen wie man wil. Oder man kan eben das ausdrücken, wenn man saget, daß die Linien AE wachsen und grösser werden, indem sie sich dem Theil der Linie AD, in welchem der Mittelpunct C anzutreffen ist, nähere. Denn indem sich AE von der AB entfernet, so nähert sie sich der AD, und ist also dieses mit dem vorigen einerley gesaget. Ist zweytens das Punct A ausserhalb des Cirkels genommen worden; und man hat wieder durch dasselbe und den Mittelpunct die Linie ABCD gezogen, welche den Umkreis in B und D schneidet, und man ziehet zwo andere gerade Linien AE und AF, welche den Umkreis schneiden, und sich in E und F an dessen Hohlung endigen, so ist eben dieses richtig. Diejenige dieser Linien, welche der AD näher lieget, das ist AF, ist grösser als diejenige, welche weiter von derselben ablieget, AE. Und dieses ist wieder beständig richtig, man mag übrigens dergleichen Linien AF, AE ziehen wie man wil. Hat man aber drittens das Punct A noch ausserhalb des Cirkels angenommen, und aus demselben die zwo Linien AE, AF nur so weit gezogen, bis sie den Cirkel erreichet, ohne ihn vorher zu schneiden, so ist diejenige die grössere, welche von der AB weiter ablieget. AF nemlich ist grösser als AE, weil der Winkel FAB grösser ist als EAB. Dieses ist das einzige, so wir von dem Cirkel noch zu erweisen haben, das übrige wird unten vorkommen.

F. 152. F. 153. F. 154.

§. 102. Es lässet sich aber dieses alles gar leicht einsehen, wenn man sich vorstellet, daß von einem dieser Puncte E der Halbmesser EC gezogen sey: und so dann sich die Linie EA in AF, und von dannen weiter bewegen lasse. Indem dieses geschiehet, bleibt die Seite CA, wie auch die Seite EC beständig von einerley Grösse, der Winkel ECA aber wird immer grösser und grösser, indem aus

dem-

denselben der Winkel FCA, und endlich ein noch grösserer wird. Wir haben aber gleich Anfangs IV, 107. gesehen, daß indem dergestalt ein Winkel ECA wächset, auch die Seite wachsen müsse, welche dem Winkel entgegen gesetzt ist, wenn nemlich, wie hier, die übrigen Seiten AC, EC von einerley Grösse bleiben. Und also ist FA grösser als EA, und so weiter.

§. 103. Diese Schlüsse schicken sich zu allen dreien Zeichnungen, welche die besondern Fälle dieses Satzes vorstellen. Man kan aber auch denselben überhaupt dergestalt ausdrücken, daß man nicht nöthig hat auf die besondere Lage des Punctes A Acht zu haben. Nachdem man durch dieses Punct den Durchmesser ABC gezogen, dessen äusserstes Punct B dem Puncte A näher ist, als das entgegen gesetzte: So stelle man sich das Punct E erstlich in B vor, und führe es so dann in den Umkreis durch E, F bis in D, so daß es beständig die Linie AE mit sich nimmet. Es ist in allen Fällen AE die kleinste, wenn E in B fället. Sie wächset, indem E in dem Umkreise sich von B entfernet, beständig, und wird endlich die gröste unter allen Linien, welche von dem Punct A an den Umkreis können gezogen werden, wenn E in D fället.

§. 104. Wil man aber diese Schlüsse etwas bündiger fassen, so ziehe man in der 152. Zeichnung auch nach F, den Halbmesser CF, und hänge die zwey äussersten Puncte dieser Linien E und F mit der Sehne EF zusammen: So ist das Dreyeck ECF gleichschenklicht, und die Winkel CEF und CFE sind einander gleich. Weil nun der Winkel AEF aus dem Winkel CEF wird, indem man diesem den Winkel AEC zusetzet: So ist AEF grösser als CEF = CFE, und folgends ist der Winkel AEF noch vielmehr grösser als AFE, welcher kleiner ist als CFE. Man siehet also, daß in dem Dreyeck AEF der Winkel AEF, welcher der Seite AF entgegen stehet, grösser sey als der Winkel AFE, welcher der Seite AE entgegen gesetzet ist, und demnach ist auch die Seite AF grösser als die Seite AE. Denn in einem jeden Dreyecke ist die grössere Seite dem grösseren Winkel entgegen gesetzet IV, 240.

§. 105. Eben dieser Beweiß ist auch anzuwenden, wenn man zeigen wil, daß AF in der 153 Figur grösser sey als AE. Man wiederhole die Schlüsse, welche wir eben gegeben, und wende sie auf die gegenwärtige 153 Figur an, so wird man von der Richtigkeit des Satzes auch in diesem Fall vollkommen überzeuget werden.

V. Abschnitt. §. 106. Daß aber auch in der 154 Figur AF grösser sey als AE, siehet man, wenn man wieder den Halbmesser CF ziehet, und denselben so wohl als den vorigen CE nach Belieben in G und H verlängert. Weil wider das Dreyeck CEF, welches die Sehne FE mit den Halbmessern CE, CF machet, gleichschenklicht ist, und weil also die Winkel CEF, CFE einander gleich sind; so sind auch ihre Ergänzungen zu zween geraden Winkeln GEF und HFE einander gleich. Nun ist der Winkel AEF grösser als GEF = HFE, und AFE ist kleiner als HFE, also ist auch AEF grösser als AFE, und es ist wieder IV, 240. in dem Dreyeck AFE die Seite AF, welche dem grössern Winkel AEF entgegen stehet, grösser als die Seite AE, welche dem kleinern Winkel AFE entgegen gesetzet ist.

§. 107. Da nun also in der 152 und 153 Figur, die Linie AE immer wächset, indem sie sich nach und nach gegen der AD neiget, so muß nothwendig diese Linie, welche aus A durch den Mittelpunct bis an den Umkreis in D gezogen ist, die grösseste unter allen geraden Linien seyn, welche aus A an den Cirkelkreis können gezogen werden. Denn es kan die Linie AE nachdem sie in AD gefallen, sich dieser Linie AD nicht noch weiter nähern. Und man siehet leicht, daß in der andern Helfte des Cirkels zur rechten, eben dasjenige statt habe, so wir von den Linien AE, AF in der linken Helfte gezeiget haben. Im Gegentheil ist in der 152 und 154 Figur die Linie AB, welche den Umkreis erreichet, ohne daß sie durch den Mittelpunct gegangen, die kleineste unter allen AE, AF. Denn weil die Linie AF immer kleiner wird, indem sie sich dieser Linie AB nähert, und dadurch nach und nach bis zur Grösse AE, und so weiter abnimmet, so kan es nicht fehlen, es muß AB die kleineste unter allen diesen Linien seyn. Denn näher als AB sich selber ist, kan AE der AB nicht werden. Entfernet sich aber AE von der AB auf der andern Seite des Durchmessers zur Rechten, so wächset sie wieder, wir sie auf der linken Seite abgenommen, daß also überall AB die kleineste der beschriebenen Linien bleibet.

Sech-

VI. Abschnitt.

Sechster Abschnitt.
Von den Verhältnissen, und deren Gleichheit.

Grund-Begriffe.

§. 1.

Wir haben bisanhero die einfachsten Grössen, so wohl die Zahlen, als die geraden Linien, vor sich betrachtet, und die vornehmsten Eigenschaften derselben, die auf die Art eingesehen werden konten, uns bekannt gemacht. Oder wenn wir sie mit einander vergleichen, so haben wir bloß auf die Gleichheit oder Ungleichheit derselben gesehen, ohne uns bey der Grösse der einen dieser Zahlen oder Linien, die man ihr in Ansehung der andern zuschreiben muß, aufzuhalten, und dieselbe zu untersuchen. Es ist nöthig, daß wir nunmehro auch einige derselben auf die andere beziehen lernen, und uns dasjenige ebenfals vorstellen, was von den Grössen gesagt werden kan, wenn man sie dergestalt mit einander vergleichet. Diese Betrachtungen sind etwas schwerer als die vorigen. Wir werden uns indessen alle Mühe geben dieselbe so leicht zu machen, als es uns möglich seyn wird.

§. 2. Man vergleichet zwo Grössen, zum Exempel zwo gerade Linien A und B mit einander, wenn man sich vorstellet, daß die eine derselben A eben so groß sey als die andere B, oder daß A grösser oder kleiner sey als B; und wie groß eigentlich A in Ansehung der B, oder B in Ansehung der A sey. Alles dieses kan nicht geschehen, wenn nicht A durch beständiges wachsen oder abnehmen der B endlich gleich, und so dann grösser oder kleiner werden kan als B. Ist aber dieses, und kan die A, indem sie beständig wächset oder abnimmet, endlich der B gleich, und nach Belieben grösser oder kleiner werden als B, so kan man diese zwo Grössen allerdings mit einander vergleichen.

F. 155.

§. 3. So ist es mit allen geraden oder krummen Linien beschaffen, welche man alle mit einander vergleichen kan, weil sie alle entstehen, indem ein Punct aus seiner Stelle fortfliesset. Dadurch wird die

Linie

VI. Abschnitt.

Linie beständig vergrössert, und man kan sich vorstellen, daß sie hinwiederum verkleinert werde, indem das Punct, welches die Linie beschrieben, in seinem vorigen Wege zurücke gehet, und in demselben sich dem Orte nähert, von welchem es zu erst ausgegangen. Man siehet leicht, daß indem dergestalt eine Linie beständig wächset oder abnimmet, sie endlich einer jeden andern Linie, sie mag so groß oder so klein seyn, als sie wil, gleich werde, und daß sie grösser werde als diese, wenn sie so dann noch weiter wächset, oder kleiner, wenn sie noch mehr abnimmet. Eben so ist es mit allen Grössen, von einerley Art beschaffen. Wenn man zwey Gewichte annimmet, wie man wil, so kan das kleinere durch beständiges Wachsen dem grössern gleich werden, und das grössere dem kleinern, indem es beständig abnimmet. Und man kan also alle Grössen von einerley Art mit einander vergleichen.

§. 4. Wie groß aber eigentlich eine gegebene Grösse in Ansehung der andern sey, erkennet man auf zweyerley Arten. Es sey die Grösse der Linie A in Ansehung der Linie B zu bestimmen, oder, man sol nicht nur sagen, ob A in Ansehung der B sehr groß, oder nicht gar groß, oder sehr klein, oder nicht sonderlich klein sey; sondern auch, was A eigentlich vor eine Grösse in Ansehung der Grösse der Linie B habe: so können entweder die beiden Linien in gleiche Theile getheilet werden, so groß oder so klein diese auch seyn mögen, oder es gehet dieses nicht an. Daß das erstere öfters seyn könne, ist kein Zweifel, denn man kan ja zwo Linien aus gleichen Theilen zusammen setzen, indem man einer jeden eine gewisse Zahl solcher Theile giebet, wie auf die Art AB und CD in der 156 Zeichnung entstanden.

F. 156.

§. 5. Das andere, daß nicht alle Linien sich dergestalt aus gleichen Theilen zusammen setzen lassen, siehet man folgender Gestalt ein: Gesetzet, man habe die Linien AB und CD in gleiche Theile getheilet, oder aus gleichen Theilen zusammen gesetzet, so verlängere man die zweite derselben CD um das Stück DE, so kleiner ist als eines dieser Theile: so ist so gleich klar, daß die beiden Linien AB und CE sich nun nicht mehr aus solchen Theilen werden zusammen setzen lassen, aus welchen man die Linien AB und CD zusammen setzen konte. Wolte man aber sagen, man könne sie doch vielleicht aus kleineren Theilen zusammen setzen, so muß man zwar zugestehen, daß dieses zuweilen seyn könne: denn es kan würklich DE entweder die Helfte, oder der dritte, oder der vierte Theil derjenigen Linie seyn, durch deren Wiederholung man die

AB

AB und CD heraus gebracht hat, oder es kan DE $\frac{2}{3}$, oder $\frac{3}{4}$, oder $\frac{2}{7}$, oder etwas dergleichen von derselben Linie betragen, in welchen Fällen man allezeit so wohl die Linie DE als auch ein jedes dergleichen Theile, aus welchen AB und CD zusammen gesetzet worden ist, wieder in gleiche Theile zertheilen kan, wodurch hernach auch die ganze AB so wohl als die CE in lauter gleiche Theile getheilet wird. Allein es kan auch DE kleiner seyn als eine Helfte eines solchen Theiles der AB, kleiner als ein Drittel, kleiner als ein Viertel, ein Zehentel, ein Tausendtel, ein Milliontausendtel, ja kleiner als ein jeder Bruch, welcher genennet und angegeben werden kan, wie man leicht siehet. Und in diesem Fall ist es nicht möglich, daß die beiden Linien AB und CE in Theile getheilet werden, die einander gleich sind, man mag sie vergleichen, wie man wil. Denn wie wil man eine Linie in solche Theile theilen, die kleiner sind, als eine jede Grösse, welche auszusprechen ist?

§. 6. Es ist wahr, man kan ein Theilchen als DE, wenn dasselbe kleiner ist als alles so genennet oder gegeben werden kan, in Ansehung einer jeden begreiflichen Grösse, AB oder CD, vor nichts halten, ob es zwar an sich selbst etwas ist. Es bedienen sich dieses Begriffs heut zu Tage viele grosse Männer. Sie nennen dergleichen Theilchen unendlich kleine Theilchen, und wenn man dieselbe annimmet, so folget, daß jede zwo gerade Linien sich in gleiche Theile zertheilen lassen, wenn nemlich nicht von einer solchen Theilung die Rede ist, die wir würklich bewerkstelligen können, sondern von einer solchen, die wir nur begreiffen, und uns in Gedanken vorstellen.

§. 7. Denn man kan sich in der That in der Linie AB so wohl als in der Linie EC so viele Theilchen vorstellen, als man wil, und von was Grösse man wil. Werden der Theilchen in AB unendlich viele, so werden sie auch unendlich kleine. Das ist, wenn man der Theilchen in AB sich immer mehrere und mehrere vorstellet, so werden dieselben auch immer kleiner und kleiner: und gleichwie man in der Vermehrung der Zahl der Theile ohne Ende fortgehen kan, so kan man auch in der Verkleinerung eines jeden dieser Theilchen beständig fortfahren, so daß man niemals auf Theilchen kommet, welche nicht weiter könten getheilet werden. Wenn man nun aus den Theilen der Linie AB die CE zusammen setzen wil, so kan es zwar allerdings kommen, daß eine gewisse Zahl dieser Theilchen eine Linie giebet, die kleiner ist als CE, und wenn man noch ein solches Theilgen hinzu setzet, diese Linie CE übertreffen wird. Wie in der Figur sichtlich ist;

VI. Abschnitt.

da man AB in 5 gleiche Theile getheilet hat, deren sieben weniger geben als EC, und deren achte mehr als EC ausmachen. Allein man kan doch, indem man dergestalt eine Linie, wie EC, aus den Theilen einer andern AB zusammen setzet, niemals um ein Ganzes solches Theilchen fehlen. Und sind demnach die Theilchen unendlich klein, so fehlet man nicht mehr als um einen Theil eines unendlich kleinen Theilchens. Da nun das Ganze unendlich kleine Theilchen in Ansehung der CE vor nichts zu halten ist, VI, 6. so wird noch vielmehr ein Theil desselben vor nichts zu halten seyn, und man kan also sagen, daß man die Linie CE allezeit aus solchen Theilen zusammen setzen könne, welche entstehen, indem man eine jede andere Linie AB genau in gleiche Theile theilet.

§. 8. Wolte jemand sagen, man fehle in einer dergleichen Zusammensetzung dennoch, so klein als auch dieser Fehler seyn mag, so kan man zwar nicht in Abrede seyn, daß dieses geschehe, wenn man sich genau an den Verstand der Worte binden will. Allein gleichwie man weniger fehlet als vorher, wenn man die Linie AB in 30 Theilchen theilet, und aus diesen Theilchen eine Linie zusammen setzet, welche der CE so nahe kommet, als nur bey dieser Theilung und Zusammensetzung möglich ist, und wieder ungemein weniger, wenn man sich in AB hundert oder tausend Theilchen vorstellet, und überhaupt die Linie CE immer genauer heraus bringet, je mehr Theilchen man der AB giebet, und je kleiner folgends ein jedes derselben wird: also kan man auch, wenn man sich bey einer noch so grossen Zahl der Theile in AB einiges Fehlers befürchtet, indem man aus solchen Theilchen die CE zusammen setzen will, ein jedes der Theilchen der AB zu wiederhohlten malen in noch mehrere, und folgends noch kleinere, Theile theilen, und dadurch den Fehler noch immer kleiner und kleiner machen, weil er niemals so groß werden kan, als eines der Theilchen der AB. Auf die Art kan man den Fehler so sehr vermindern als man will, so daß er endlich so klein wird, daß er würklich vor nichts, und vor keinen Fehler, zu halten ist.

§. 9. So richtig aber diese Begriffe an sich sind, so muß man doch gestehen, daß sie nicht bey allen Beyfall finden. Insonderheit stossen sich öfters solche Anfänger an denselben, welche gewohnet sind auf alles genau Acht zu haben. Und man kan nicht in Abrede seyn, daß sie sich von der Deutlichkeit, welche in der Geometrie überall herrschen soll, einiger Massen entfernen, und die vollkommene Uebereinstim-

stimmung aller Theile dieser Wissenschaft durch solche Redensarten aufheben, welche einigen Sätzen derselben zu widersprechen scheinen. Derowegen haben sich auch die Alten, welche nicht die blosse Wahrheit, sondern die augenscheinlichste Wahrheit und eine vollkommene Evidenz in ihren Geometrischen Schriften zum Augenmerke hatten, derselben niemals bedienet. Sie nehmen nichts als möglich an, so nicht würklich kan bewerkstelliget werden, und nennen also eine Theilung einer geraden Linie niemals möglich, wenn sie nicht zeigen können, wie sie zu verrichten sey. Dieses aber gehet bey einer Theilung ohne Ende nicht an, in diesem Verstande, in welchem das Wort hier genommen wird. Es ist zwar richtig, und wir sehen es aus dem, so gewiesen worden, vollkommen ein, daß eine jede gerade Linie in zwey gleiche Theile getheilet werden kan, welche Theile wiederum gerade Linien sind, und daß demnach ein jeder solcher Theile wieder dergestalt getheilet werden könne, und dieses ohne Ende fort, das ist, ohne daß man von der innern Beschaffenheit des Dinges gezwungen wird, jemals aufzuhören, wie dieses zum Exempel geschehen würde, wenn man durch eine dergleichen Theilung endlich auf würkliche Puncte käme, welche keine Grösse und Theile haben, und sich also auch nicht in Theile zertheilen lassen. Allein man kan doch durch eine noch so oft wiederhohlte Theilung niemals auf unendlich kleine Theile kommen, und wenn man auch seine ganze Lebenszeit anwenden wolte, eine Linie immer fort dergestalt zu theilen, und so scharffe Sinnen hätte, daß man alle diese Theilungen bey den kleinsten Linien auf das genaueste verrichten könte: so würde doch die Zahl dieser Theile endlich, und weit kleiner seyn, als die Zahl der Zeitsecunden eines menschlichen Alters, und man könte die Grösse des kleinesten Theilchens aus der Grösse des Ganzen durch einen Bruch bestimmen. Dieses wolten die Alten sagen, indem sie eine Theilung ohne Ende dadurch vor ohnmöglich angaben, indem sie erwiesen, daß es gerade Linien gäbe, welche nicht wie die AB und CD aus gleichen Theilen könten zusammen gesetzet werden.

VI. Abschnitt.

§. 10. Wir wollen uns also an diese alten Begriffe, als die leichter und deutlicher sind als diejenigen, so eine unendliche Theilung zum Grunde haben, halten: und zeigen, wie man so wol solche Grössen genau vergleichen soll, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind, als auch die Gründe der Vergleichung derjenigen Grössen angeben, bey welchen diese Theilung entweder nicht statt findet, oder doch nicht geschehen ist. Dieser letztern werden diejenigen entbehren kön-

VI. Abschnitt. können, welche annehmen wollen, daß alle Grössen aus unendlich kleinen gleichen Theilen zusammen gesetzet werden können.

F. 155. §. 11. Vergleichet man nun zwo Linien A und B mit einander, und bestimmet die Grösse der ersten A aus der Grösse der andern B alleine, ohne was fremdes anzunehmen; indem man sich einen Begrif von dieser Grösse machet, oder denselben auf diese oder jene Art durch Worte oder Zeichen ausdrücket: so saget man, man habe die **Verhältniß** der Linie A gegen die Linie B bestimmet oder ausgedrücket. Eben dieses hat bey allen Grössen von einerley Art statt, VI, 3. und man kan hieraus sehen, was das Wort Verhältniß, bedeute, wenigstens so viel zum ersten Anfang genug ist, denn wir werden in dem Verfolg dieser Abhandlung alles deutlicher einsehen. Die beyden Grössen welche man mit einander vergleichet, wie hier A und B, heissen die **Glieder** der Verhältniß. Und zwar das erstere oder **vorhergehende Glied**, dasjenige, so man zuerst nennet, das **nachfolgende** oder **zweyte** aber, dasjenige, so man jenem nachsetzet.

Welche Verhältnisse einander gleich oder ungleich sind.

F. 157. 158. §. 12. Wenn die Grösse der Linie A aus der Grösse der Linie B eben so bestimmet wird, wie die Grösse der C aus der Grösse der Linie D, so saget man, die Verhältniß der A gegen die B sey der Verhältniß der C gegen die D gleich oder ähnlich, oder jene Verhältniß sey mit dieser einerley. Alle diese Redensarten bedeuten eben das. Zum Exempel, wenn A der B gleich ist, und C der D; so wird die Verhältniß der A gegen die B eben dadurch angezeiget, wenn man saget, die A sey der B gleich. Eben so aber und nicht anders wird auch die Verhältniß der C gegen die D bestimmet, und diese beyden Verhältnisse sind demnach einerley oder einander gleich, und ähnlich. Man muß sich in Acht nehmen, aus diesem Exempel zu schliessen, daß bey allen gleichen Verhältnissen auch die Glieder derselben gleich seyn müssen, $A = B$, und $C = D$. Dieses ist nicht nothwendig. Die A kan in Ansehnng der B eine jede andere Grösse haben, und die Verhältniß der A gegen die B bleibet doch der Verhältniß der C gegen die D gleich, wenn nur die C in Ansehung der D eben die Grösse hat.

§. 13. Wenn die Verhältnisse A zu B und C zu D einander gleich sind, und A ist grösser oder kleiner als B, so muß auch C grösser oder kleiner seyn, als D, und ist A der B gleich, so muß auch C der D gleich seyn.

seyn. Alles dieses fliesset so gleich aus den Begriffen, welche wir gegeben haben, und wir haben uns dabey nicht aufzuhalten.

§. 14. Eine jede Grösse, welcher die A gleich ist, E zum Exempel, kan an die Stelle des Gliedes A in der Verhältniß A zu B, oder B zu A gesetzet werden, ohne die Verhältniß zu ändern, das ist: wenn A = E, so ist die Verhältniß der A zu B der Verhältniß der E zu B gleich, wie auch die Verhältniß der B zu A gleich der Verhältniß der B zu E. Auch dieses braucht keines Beweises. Weil in der Grösse des ersten Gliedes der Verhältniß der A zu B keine Veränderung vorgehet, wenn man an die Stelle der A die ihr gleiche E setzet, so kan auch die Grösse des ersten Gliedes in Ansehung des zweyten durch diese Verwechselung der E mit der A nicht verändert werden. Eben so ist es, wenn A die Stelle des zweyten Gliedes vertritt.

F. 159.

§. 15. Ob aber zwo Verhältnisse einander gleich sind, oder nicht, siehet man am allerleichtesten, wenn die zweyten oder nachfolgenden Glieder derselben einander gleich sind, wie bey den Verhältnissen der 160 Figur, da die Linie B der Linie D gleich genommen worden. Ist in diesem Falle auch das Glied A dem Gliede C gleich, so ist die Verhältniß der A zu der B, der Verhältniß der C zur D gewiß gleich. Wie kan in den Grössen A und C einige Verschiedenheit statt haben, wenn man sie auf die Grössen der B und D beziehet, da so wohl diese B und D, als auch jene A und C einander gleich sind?

F. 160.

§. 16. Sind aber bey der Gleichheit der Glieder B und D die Glieder A und C einander ungleich, so kan die Verhältniß der A zur B, der Verhältniß der C zur D, ohnmöglich gleich seyn. Wie ist es möglich, daß verschiedene Grössen A und C, wenn man sie auf einerley Grösse B oder D beziehet, einerley seyn solten? Gesetzet, C ist der B oder D gleich, so kan A ohnmöglich eben der B oder D gleich seyn; da sie grösser ist als C = B = D. Dieses aber oder etwas dergleichen müste möglich seyn, wenn die A gegen die B = D, eben die Verhältniß haben könte, welche die C gegen eben die B = D hat, ob zwar A der C ungleich ist.

§. 17. In diesem Falle, wenn zwo Verhältnisse A zur B, und C zur D, deren zweyte Glieder B und D einerley Grösse haben, ungleich sind, nennet man diejenige Verhältniß die grössere, deren erstes Glied grösser ist, die andere wird die kleinere genennet. In unserer Figur ist A grösser als C, und demnach die Verhältniß der A zur

VI. Abschnitt.

B grösser als die Verhältniß der C zur D. Eine jede andere Verhältniß, welche der Verhältniß A zur B gleich ist, ist auch grösser als die Verhältniß der C zur D. Wie könte sie sonst der Verhältniß der A zur B gleich seyn? Gesetzet die Verhältniß der E zur F sey der Verhältniß der A zur B gleich, so ist diese Verhältniß der E zur F grösser als die Verhältniß der C zur D.

§. 18. Hieraus siehet man, daß, wenn die zweyten Glieder zweyer gleichen Verhältnisse gleich sind, die erstern Glieder derselben ohnmöglich ungleich seyn können, denn wären sie ungleich, so wären auch die Verhältnisse ungleich. Wiederum wenn eine Verhältniß A zur B grösser ist als eine andere C zur D, und die zweyten Glieder dieser Verhältnisse sind einander gleich, B=D, so ist das erste Glied der grössern Verhältniß, A, grösser als das erste der zweyten, C. Denn wäre A=C, so wären auch die Verhältnisse A zur B, und C zur D einander gleich. VI, 15. Wäre aber A kleiner als C, so wäre auch die Verhältniß A zur B kleiner als die Verhältniß C zur D. VI, 17. Beydes widerspricht demjenigen so gesetzet worden, daß die Verhältniß der A zur B grösser sey als die Verhältniß der C zur D. Auf eben die Art siehet man ein, daß, wenn die Verhältniß der C zur D kleiner ist, als die Verhältniß der A zu B, und die zweyten Glieder derselben B und D sind einander gleich, auch das erste Glied der kleinern Verhältniß C kleiner seyn müsse als das erste Glied der grössern A. Dieses ist in der That von demjenigen, so eben gesaget worden, nicht verschieden, und kan gar leicht von vorne eingesehen werden, wenn man sich vorstellet, daß wenn C der A gleich wäre, oder grösser als A, auch die Verhältniß der C zur B oder D, der Verhältniß der A zu der B oder D gleich seyn müsse, oder grösser als diese, welches demjenigen widerspricht, so gesetzet worden.

§. 19. Es ist aber auch in dem Fall nicht schwer zu sagen, welche Verhältnisse einander gleich, oder ungleich seyn, und welche die grössere oder kleinere sey, wenn die ersteren Glieder derselben einerley Grösse haben. Wir haben dieses in der 161 Figur vorgestellet, da bey den Verhältnissen der A zur B, und der C zu D, die Glieder A und C einander gleich sind. Sind in diesem Fall auch die zweyten Glieder B und D einander gleich, so sind auch die Verhältnisse gleich: denn worinne solten sie verschieden seyn? Sind aber die Glieder B und D ungleich, so sind auch die Verhältnisse ungleich. Denn es ist ohnmöglich, daß die gleichen Grössen A und C aus den ungleichen B

F. 161.

und

und D auf einerley Art sollen können bestimmet werden. Es kan B grösser seyn als A = C, und D kleiner als A = C. Ist es bey diesem Umstand möglich, daß die kleinere A auf die grössere B sich eben so beziehe, wie sich die grössere C = A auf die kleinere D beziehet? Dieses aber oder etwas dergleichen müste man zugeben, wenn man setzen wolte, A und C könten einander gleich seyn, und doch gegen die verschiedene Grössen B und D einerley Verhältnisse haben.

§. 20. Sind aber bey den ungleichen Verhältnissen A zur B, und C zur D, die ersteren Glieder A, C gleich, und die zweyten B, D ungleich, so ist diejenige Verhältniß die grössere, in welcher das zweyte Glied kleiner ist, und wenn die B kleiner ist als die D, so ist die Verhältniß der A zur B grösser, als die Verhältniß der C zur D, und diese im Gegentheil ist kleiner als jene. Man kan dieses, daß man eine Verhältniß unter den bemerkten Umständen grösser oder kleiner nehnet, als eine andere, als eine beliebige Redensart ansehen.

§. 21. Daß aber diese Redensart mit derjenigen Benennung nicht streite, der wir zuerst VI, 17. erwehnet, und daß bey beyderley Umständen einerley Verhältnisse grösser oder kleiner genennet werden, siehet man ein, wenn man überhaupt bemerket, daß eine Verhältniß A zur B grösser genennet werde, als eine andere C zur D, wenn das erste Glied der erstern Verhältniß A in Ansehung des zweyten Gliedes B derselben Verhältniß grösser ist, als das erste Glied C der zwoten Verhältniß in Ansehung des zweyten Gliedes D eben der Verhältniß. Nun kan man nicht nur wenn B so groß ist als D, und A grösser als C, schliessen, es sey A in Ansehung der B oder D grösser, als C in Ansehung eben der B oder D: sondern man kan auch eben das folgern, wenn A und C gleich sind, B aber ist kleiner als D. Denn es ist klar, daß einerley Grösse A in Ansehung der kleinern B grösser seyn müsse, als eben diese A oder C in Ansehung der grössern D ist. Ein Pferd ist in Ansehung einer Maus viel grösser als in Ansehung einer Ziege.

F. 160.

F. 161.

§. 22. Hieraus schliessen wir wiederum, daß wenn in zwo gleichen Verhältnissen, A zu B, und C zu D, die ersteren Glieder A und C gleich sind; die zwey letzteren B und D ohnmöglich ungleich seyn können. Denn wäre dieses, so wären auch die Verhältnisse ungleich. Und, daß wenn die Verhältniß A zu B grösser ist als die Verhältniß C zu D, die ersten Glieder aber derselben A und C einander gleich

 sind,

VI. Abschnitt.

sind, auch B kleiner seyn müsse als D. Denn wenn dieses nicht wäre, sondern B wäre so groß als D, so wären die Verhältnisse A zu B und C zu D einander gleich, oder wenn B grösser wäre als D, so wäre die Verhältniß der A zu B kleiner als die Verhältniß der C zu D. VI, 20. Beydes streitet mit demjenigen so angenommen worden.

§. 23. Es können aber Grössen von verschiedener Art gleiche Verhältnisse gegen einander haben. Es hindert nichts, daß ein Gewicht dem andern gleich sey, eben wie eine Länge einer andern gleich ist. Und in diesem Fall verhält sich das erste Gewicht zu dem zweyten, wie die erste Länge zu der zwoten. Es hindert nichts, daß das erste Gewicht in Ansehung des zweyten eben so groß sey, als eine Länge in Ansehung einer andern, in welchem Fall die Verhältniß der Gewichte wiederum der Verhältniß der Längen gleich ist. Aber man kan nicht sagen, daß ein Gewicht, ein Centner zum Exempel, gegen eine Länge, wenn man will, von einer Meile, sich so verhalte, wie ein anderes Gewicht gegen eine andere Länge. Denn das Gewicht hat gegen die Länge gar keine Verhältniß. VI, 11. Wie groß ist ein Centner in Ansehung einer Meile Weges? Ist der Centner grösser oder kleiner als die Meile, oder ist der Centner der Meile gleich? Welch ungereimte Frage! Dennoch findet man die Beantwortung derselben in Büchern.

F. 157. 158.

§. 24. Es können aber auch die vier Grössen A, B, C, D, deren erste zu der zwoten sich verhält, wie die dritte zu der vierten, alle von einerley Art seyn. Ist dieses, so siehet man bloß aus dem gezeigeten, daß wenn die erste A grösser ist als die dritte C, auch die zwote B grösser seyn müsse als die vierte D, und daß, wenn A kleiner ist als C, auch B kleiner seyn müsse als D, woraus man leicht folgern könte, daß wenn A der C gleich ist, auch B der D gleich seyn müsse, wenn dieses nicht bereits da gewesen wäre, und wir nicht VI, 22. gezeiget hätten, daß bey gleichen Verhältnissen, deren erstere Glieder A, C von einerley Grösse sind, auch die zweyten B und D von einerley Grösse seyn müssen.

§. 25. Ist aber A grösser als C, so ist nothwendig die Verhältniß der A zur B grösser als die Verhältniß der C zur B; denn die grössere A hat allezeit, wie wir VI, 17. gezeiget haben, zu einer jeden Grösse, und folgends auch zur B, eine grössere Verhältniß, als die kleinere C. Nun wird gesetzet, daß die Verhältniß der C zur D der Verhältniß der A zur B gleich sey: demnach ist auch die Verhältniß

der

der C zur D grösser als die Verhältniß der C zur B. Das ist, man hat zwo Verhältnisse der C zur D, und der C zur B, deren erstere grösser ist als die zwote, und deren erstere Glieder C von einerley Grösse sind. Wir haben gesehen daß in solchen Fällen allezeit das zweyte Glied der grössern Verhältniß, kleiner sey, als das zweyte Glied der kleinern. VI, 22. Demnach ist D kleiner als B, und folgends B grösser als D, welches zu erweisen war.

§. 26. Eben so siehet man, daß, wenn A kleiner ist als C, auch nothwendig B kleiner seyn müsse als D, wenn man nemlich wiederum, wie vorher setzet, daß die Verhältniß der A zur B, und der C zur D einander gleich seyn. Denn wenn A kleiner ist als C, so ist die Verhältniß der A zur B kleiner als die Verhältniß der C zu eben der B, aus der Ursache, die wir eben angezogen haben; weil nemlich eine kleinere A gegen eben die B eine kleinere Verhältniß hat, als eine grössere C. VI, 17. Da nun wieder die Verhältniß der A zur B der Verhältniß der C zur D gleich gesetzet wird, so ist auch diese Verhältniß der C zu D kleiner als die Verhältniß der C zu B. Und demnach, da die erstern Glieder dieser Verhältnisse C einerley sind, so ist auch das zweyte Glied D der kleinern Verhältniß grösser als das zweyte Glied der grössern Verhältniß B. VI, 20.

§. 27. Wir können aber diesen Beweiß auch etwas natürlicher fassen. Wir setzen noch daß die Verhältniß der A zur B der Verhältniß der C zur D gleich sey, und daß die A grösser sey als C. Wil man nun setzen daß bey diesen Bedingungen die zwoten Grössen B und D einander gleich seyn, so siehet man leicht, daß daraus folgen würde, es sey die erste Verhältniß der A zur B grösser als die zwote, VI, 17. welches dem gesetzten widerspricht, und also nicht statt haben kan. Wolte man aber annehmen, daß die B kleiner wäre als die D, so wird dadurch die erste Verhältniß der A zur B noch grösser, als die andere C zur D. Denn je kleiner das zweyte Glied einer Verhältniß wird, je grösser wird das erste in Ansehung desselben, und je grösser wird auch die Verhältniß, und umgekehret, je grösser das zweyte Glied wird, je kleiner wird die Verhältniß. VI, 20. Also kan in diesem Falle, wenn A grösser ist als C, und B kleiner als D, die Gleichheit der Verhältnisse der A zur B, und der C zur D noch vielweniger statt haben, und bleibet also nichts anderes übrig so man sagen könte, als daß auch B grösser sey als D.

§. 28. Nimmet man an, es sey A kleiner als C, so kan man auf

VI. Abschnitt.

eben die Art schliessen, daß auch B kleiner seyn müsse als D. Oder es lieget dieses vielmehr schon in dem vorigen. Denn wenn man annimmet es sey A grösser als C, so saget man zugleich es sey C kleiner als A, und wenn die Verhältniß der A zur B der Verhältniß der C zur D gleich ist, so ist auch die letztere dieser Verhältnisse, der C nemlich zur D der erstern A zur B gleich. Da nun erwiesen worden, daß unter den erwehnten Bedingungen B grösser seyn müsse als D, das ist, D kleiner als B, so siehet man auch, daß sich eben dasjenige, so gesetzet und erwiesen worden, auch so ausdrücken lasse: Wenn zwo Verhältnisse C zur D, und A zur B einander gleich sind, und das erste Glied der erstern C ist kleiner, als das erste Glied der zwoten A, so ist auch das zweyte Glied der erstern D kleiner als das zweyte Glied der zwoten B. Man darf nur die Ordnung der Verhältnisse ändern, die Verhältniß C zur D vor die erste, und die Verhältniß A zur B vor die zwote annehmen, so wird dieser Satz mit dem vorigen VI, 25. einerley.

Merkmale der Gleichheit der Verhältnisse bey Zahlen und getheilten Grössen.

§. 29. Dieses alles konten wir so gleich aus dem Begriffe der Verhältniß, welchen wir gegeben, herleiten. Das Uebrige wird ungemein deutlicher, wenn wir die Merkmale der Gleichheit der Verhältnisse, so wohl bey solchen Grössen die aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind, als auch bey solchen, welche man sich nicht dergestalt zusammen gesetzet vorstellet, genauer angeben, zu welcher Betrachtung wir uns also nunmehro wenden.

F. 162. §. 30. Wenn zwo Grössen aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind, wie die zwo Linien A und B, deren erstere A aus so grossen Theilen zusammen gesetzet ist als die zwote B, so beurtheilet man die Grösse der ersten A genau aus der Zahl der Theile, welche in der zwoten dieser Grössen, B, enthalten sind, und aus der Zahl der gleichen Theile, welche die erstere A ausmachen. Es bleibet nichts zu fragen übrig, wenn man mir saget, B sey in drey gleiche Theile getheilet, und A enthalte fünf dergleichen Theile. So bald ich dieses weiß, so weiß ich die Grösse der A in Ansehung der B, und es wird mir die Grösse der A auch an sich bekant, so bald man mir die eigentliche Grösse der B bekant machet, indem man sie mir nemlich vorleget, oder sonst, wie man kan, anzeiget.

§. 31. Und

§. 31. Und man stellet sich demnach die Verhältniß der A zur B in diesem Falle, wenn diese Linien beyde in gleiche Theile getheilet sind, vor, wenn man die Zahl der gleichen Theile in B anmerket, und wie viele derselben die Linie A ausmachen. Derowegen kan man sagen, die Verhältniß der A zur B sey nichts anders, als die Art und Weise wie A aus der B entstehet, wenn man diese vor eine Einheit annimmet. Denn hält man B vor Eins, und will aus derselben die A machen, so muß man B in gleiche Theile theilen, aber in solche, aus welchen sich auch A zusammen setzen lässet, und so dann die A aus dergleichen Theilen der B würklich zusammen setzen.

§. 32. Alle Zahlen lassen sich auf diese Art aus andern machen, wenn sie aus einerley Einheiten bestehen. Ja da man, wie gleich Anfangs erinnert worden, bey den Zahlen auf die Grösse ihrer Einheiten selten Acht zu haben pfleget, sondern bloß die Vielheit derselben in den Zahlen betrachtet: so kan man sagen, daß überhaupt eine jede Zahl aus einer jeden andern entstehen könne, indem man jene in gleiche Theile theilet, und aus solchen Theilen die erste Zahl zusammen setzet. Nemlich man darf nur die zwote Zahl in ihre Einheiten theilen, und aus diesen Einheiten die erste Zahl zusammen setzen, so hat man erhalten, was hier verlanget wird. Doch darf man eben nicht allezeit die Zahlen würklich in ihre Einheiten theilen. Man kan zuweilen bey grössern Theilen stehen bleiben, zuweilen aber muß man auch gar auf Theile der Einheit gehen. So wird die Zahl 5 aus der Zahl 3, wenn man die letztern 3 in drey gleiche Theile theilet, und fünfe dieser Theile zusammen setzet. Wil man aber sechse aus drey machen, so hat man nicht nöthig die drey zu theilen, sondern man kan nur dieselbe zweymal nehmen, so ist die 6 da. Zwölfe wird aus 8, wenn man achte in zwey gleiche Theile theilet, deren jedes 4 ist, und dieser Theile dreye zusammen nimmet. Um aber endlich die Zahl 2 aus $\frac{3}{4}$ zu machen, muß man $\frac{3}{4}$ in drey gleiche Theile theilen, deren jedes $\frac{1}{4}$ betragen wird, und dieser Theile achte zusammen setzen, so kommen $\frac{8}{4}$, welches eben so viel ist als die erste Zahl 2.

§. 33. Man siehet hieraus, daß in dem Falle, welchen wir hier betrachten, wenn nemlich die Grössen A und B aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind, man die Grösse der A in Ansehung der B durch einen Bruch ausdrucke, welcher sich auf die zwote dieser Grössen B, als auf seine Einheit beziehet, und dessen Nenner die Zahl der Theile in B ausdrucket, der Zehler aber anzeiget, wie viele solcher Theile in A ent-

VI. Abschnitt.

enthalten sind. Der Bruch $\frac{5}{3}$ drücket die A, aus der B, dergestalt aus: Er zeiget daß die B, auf welche man ihn beziehet, und welche als die Einheit angenommen wird, in drey gleiche Theile zu theilen sey, und daß man fünf dieser Theile nehmen müsse, die Linie A zusammen zu setzen. Eben so drücket der Bruch $\frac{7}{5}$ die Grösse der Zahl 7 in Ansehung der Zahl 5 aus, weil man würklich die letztere Zahl 5 in fünf gleiche Theile theilen, und dieser Theile sieben zusammen setzen muß, wenn man aus der Zahl 5 die Zahl 7 heraus bringen wil.

§. 34. Dieser Bruch, welcher die Verhältniß einer getheilten Grösse gegen eine andere, die aus eben so grossen Theilen bestehet, so nett ausdrucket, und welcher allzeit zu seinem Nenner die Zahl der Theile der zwoten Grösse, auf welche man die erste beziehet, und zu seinem Zehler die Zahl der Theile der erstern Grösse hat, die man auf die zwote beziehet und aus derselben ausdrucket: Dieser Bruch, sage ich, heisset derowegen der Name der Verhältniß.

§. 35. Zwo Verhältnisse, bey dergestalt getheilten oder theilbaren Grössen, sind einander gleich, wenn die ersteren Glieder derselben aus den letzteren, als aus ihren Einheiten auf einerley Art entstehen: Oder wenn man die letzteren Glieder beyderseits in gleich viele Theile theilen, und aus einerley Zahl dieser Theile die ersteren Glieder zusammen setzen kan: das ist, wenn sie gleiche Namen haben. So ist es mit den Linien der 163 Figur beschaffen, deren erstere A wir auf die zwote B beziehen: und die dritte C auf die vierte D, und uns die Verhältniß der A zur B, wie auch die Verhältniß der C zu der D vorstellen. Wil man die A aus der B machen, so theile man die B in drey gleiche Theile, und setze fünf dieser Theile zusammen, so hat man die A. Auf eben die Art aber entstehet auch die C aus der D. Die D muß ebenfals in drey gleiche Theile getheilet werden, und man muß dieser Theile 5 zusammen setzen, wenn man C aus D machen wil. In B und D sind gleich viele Theile, wie auch in A und C. Die A wird aus der B durch den Bruch $\frac{5}{3}$ ausgedrucket, welcher sich auf B als die Einheit beziehet, und A enthält $\frac{5}{3}$ dieser Einheit B. Eben so wird auch C durch den Bruch $\frac{5}{3}$ angezeiget, welchen man auf die Einheit D beziehen muß, von welcher C $\frac{5}{3}$ enthält. Die Namen dieser beyden Verhältnisse A zur B, und C zur D sind einerley, weil sie beyde $\frac{5}{3}$ sind.

F. 163.

§. 36. Im Gegentheil wären die Verhältnisse A zur B, und C zur D ungleich, wenn man A nicht dergestalt aus B machen könte, wie C aus

C aus D entstehet. Nemlich, wenn auf C, wie in der Figur, fünf solche Theile gehen, deren drey die D ausmachen, und es gingen auf A nicht fünf, sondern vier oder sechs Drittel der B, oder A bestünde aus etwas mehr oder weniger als $\frac{5}{3}$ der B, so könte die Verhältniß der A zur B, der Verhältniß der C zur D ohnmöglich gleich seyn. In diesem Falle sind auch die Namen der Verhältnisse ungleich. Denn wenn A nicht dergestalt aus der B entstehen kan, wie die C aus der D entstehet, so ist es nicht möglich, daß die beyden A und C durch einerley Brüche solten ausgedrucket werden, welche sich auf die Einheiten B und D beziehen. Brüche von gleichem Werthe können allezeit, wie alle andere, zu gleichen Benennungen gebracht werden, in welchem Falle auch ihre Zehler gleich seyn müssen, sonst könten die Brüche ohnmöglich gleichen Werth haben. II, 18. Wie kan aber dieses seyn, wenn die Einheiten B und D nicht können in eine gleiche Zahl solcher Theile getheilet werden, welche, wenn man sie in gleicher Zahl zusammen setzet, die grösseren A und C bringen? Ist in diesem Falle ein Bruch möglich, welcher so wohl die Grösse A aus der B, als auch die C aus der D ausdrucke? kan ich sagen daß so wohl A fünf Drittel der B betrage, als auch C durch diesen Bruch $\frac{5}{3}$ ausgedrucket werde, wenn ich sie auf D beziehe, und aus dieser Linie messe, wenn zwar C aus fünf Dritteln der D würklich bestehet, die A hingegen nicht aus fünf Dritteln der B zusammen gesetzet werden kan?

VI. Abschnitt.

§. 37. Und man kan also aus der Ungleichheit der Namen zwoer Verhältnisse allezeit auf die Ungleichheit der Verhältnisse selbst schliessen. Denn weil, wenn die Verhältnisse gleich sind, auch ihre Namen gleich sind, und im Gegentheil ungleiche Verhältnisse auch ungleiche Namen haben, so folget, daß wenn die Namen zwoer Verhältnisse ungleich sind, auch die Verhältnisse ungleich seyn müssen: denn wären die Verhältnisse nicht ungleich, sondern gleich, so wären auch ihre Namen gleich.

§. 38. Und zwar ist diejenige Verhältniß (wir reden noch immer von der Verhältniß solcher Grössen, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind), grösser als die andere, welche einen grösseren Namen hat. Denn wenn die zweyten Glieder der Verhältnisse B und D einander nicht allein an der Zahl ihrer Theile, sondern auch würklich gleich sind, welches erfordert, daß auch die Theile in B den Theilen in D gleich seyen; so ist klar, daß wenn A $\frac{5}{3}$ der B beträget, und C hingegen beträget weniger, zum Exempel $\frac{4}{3}$ der D, so ist, sage ich,

F. 164.

VI. Abschnitt.

klar, daß auch A grösser seyn werde als C. Denn $\frac{5}{3}$ der B=D, ist mehr als $\frac{4}{3}$ eben der B oder D. Nun aber hat die grössere A gegen eben die B allezeit eine grössere Verhältniß als die kleinere C gegen B oder D hat: VI, 17. also ist leicht einzusehen, daß die Verhältniß der A zur B grösser seyn werde, als die Verhältniß der C zur D. Hieraus aber fliesset, daß wenn man an die Stelle der vorigen Verhältniß A zur B eine andere setzet, welche ihr gleich ist, nemlich E zur F, auch diese Verhältniß grösser seyn werde, als die Verhältniß C zur D VI, 17. Nun ist der Name der Verhältniß A zur B, dem Namen der Verhältniß E zur F gleich, weil wir setzen, daß diese Verhältnisse gleich seyn VI, 35. und demnach der Name der Verhältniß E zur F grösser als der Name der Verhältniß C zur D. Die Verhältniß also, welche einen grössern Namen hat, E zur F, ist auch selbst grösser als die Verhältniß C zur D mit dem kleineren Namen. Und umgekehret ist die Verhältniß mit dem kleineren Namen C zur D kleiner, als die Verhältniß E zur F, deren Name grösser ist.

§. 39. Da nun also die Gleichheit zwoer Verhältnisse zwischen Grössen von dieser Art aus dem Namen derselben jederzeit geschlossen werden, und wenn der Name einer Verhältnisse grösser ist als der Name der andern, die Verhältniß selbst grösser ist: So hat man eine Verhältniß kurz zu bezeichnen, nur diese Gleichheit der Namen anzuzeigen. Nun kommet der Name der Verhältniß A zur B allezeit, wenn man die Zahl der gleichen Theile in A durch die Zahl der gleichen Theile in B dividiret; oder welches auf eben das hinaus kommet, wenn man die Zahl der gleichen Theile in A vor den Zähler eines Bruches annimmet, dessen Nenner die Zahl der gleichen Theile in B ist. Und eben so kommet der Name der Verhältniß der C zur D, wenn man die Zahl der gleichen Theile in C, durch die Zahl der gleichen Theile in D theilet, oder aus diesen Zahlen wieder einen Bruch machet, wie man den vorigen gemachet I, 136. Demnach kan $\frac{A}{B}$ nichts anders als den Namen der Verhältniß der A zur B bedeuten, wenn man sich unter A die Zahl der gleichen Theile in A vorstellet, und unter B die Zahl der gleichen Theile in B, und eben so bedeutet $\frac{C}{D}$ den Namen der Verhältniß der C zur D. Folgends bedeutet $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nichts anders, als daß die Namen der beiden Verhältnisse A zur B und C zur D, gleich seyn, und daß folgends diese Verhältnisse selbst einerley seyn.

§. 40.

VI. Abschnitt.

§. 40. Und wenn zween Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{6}{9}$ einander gleich sind, so sind die Namen der Verhältnisse der Zähler zu den Nennern gleich, folgends ist, die Verhältniß der Zahl 2 zu der Zahl 3 gleich der Verhältniß der Zahl 6 zu der Zahl 9. Und umgekehret, wenn die Verhältnisse zwoer Zahlen, 2 zur 3 der Verhältniß zwoer andern Zahlen 6 zu 9 gleich ist, so ist auch der Name der ersten Verhältniß $\frac{2}{3}$, dem Namen der zwoten Verhältniß $\frac{6}{9}$ gleich, das ist, die Brüche sind gleich, welche man machet, indem man die ersten Glieder dieser Verhältnisse vor die Zehler und die zweyten vor die Nenner annimmet.

F. 163.

§. 41. Es verändert in diesem nichts, wenn man die Einheiten der Zahlen A und B von der Grösse annimmet, welche die Theile der Linie A und B würklich haben, und hinwiederum die Einheiten in den Zahlen C und D so groß zu seyn setzet als die Theile in der C und D sind, welche von den vorigen verschieden seyn können. Denn wenn man die Zahl der Theile in A durch die Zahl der Theile in B dividiret, oder diese Zahlen in Form eines Bruchs schreibet $\frac{A}{B}$, so wird der Quotient einerley, von was Grösse man auch die Einheiten in B und A annimmet, wenn sie nur in der Zahl A nicht anders genommen werden, als in der Zahl B, weil nemlich wenn A fünfe und B drey bedeutet, drey Ellen in 5 Ellen nicht öfter enthalten sind, als drey Centner in fünf Centnern. Der Quotiente aber, der durch die Division der A durch B kommet, ist der Bruch $\frac{A}{B}$ I, 136. welcher demnach einerley Werth behalten muß, man mag die Einheiten der Zahlen A und B annehmen wie man wil. Demnach kan man auch die Einheit der Zahlen A und B so groß annehmen, als die Theile in A und B sind; und so überall.

§. 42. Und demnach könte man allezeit dergleichen Verhältnisse in allen Stücken eben so bezeichnen, wie die Brüche gezeichnet werden. Es wäre aber dieses im Druck etwas unbequem, weil die Zeilen öfters gebrochen werden müsten. Derowegen hat man noch ein anderes Zeichen der Division angenommen, welches dieses ist (:) und man schreibet vermittelst desselben $\frac{A}{B}$ auch also A : B, daß demnach auch A : B den Namen der Verhältniß A zur B ausdrücket, und A : B = C : D nichts anders bedeuten kan, als daß die Namen der Verhältnisse, der A zur B, und der C zur D, und folgends die Verhältnisse der A zur B, und der C zur

VI. Abschnitt. zur D selbst einander gleich seyn. Wir werden uns künftig überall dieser Art zu zeichnen bedienen.

F. 162. §. 43. Alle Verhältnisse gleich getheilter Grössen lassen sich durch ganze Zahlen ausdrucken, oder: man kan zwo ganze Zahlen schaffen, welche sich gegen einander verhalten wie A zur B, wenn diese Grössen A, B in Theile zertheilet werden können, die einander gleich sind. Diese Zahlen sind allezeit selbst die Zahlen der Theile in A, B, oder andere, welche eben diese Verhältniß gegen einander haben. Die Verhältniß der Grösse A zu der Grösse B ist der Verhältniß der Zahl 5 zu der Zahl 3 gleich, weil A in in fünf und B in 3 gleiche Theile zertheilet ist, und über dieses die Theile in A den Theilen der B gleich sind. Es entstehet A aus der B, wie die Zahl 5 aus der Zahl 3 entstehet. Aber man kan auch andere Zahlen schaffen, deren erstere aus der zweyten, wie 5 aus 3 entstehen kan, und wir haben oben I. 101. gewiesen, daß alle Zahlen, welche kommen, wenn man 5 und 3 durch eine beliebig angenommene Zahl multipliciret, diese Eigenschaft haben. Es verhält sich also 5 zu 3, wie 2+5 zu 2+3, das ist, wie 10 zu 6, und eben diese Verhältniß 10 : 6 drücket auch die Verhältniß A : B aus, wenn man unter A und B die Linien der 162. Figur verstehet, welchen diese Buchstaben beygeschrieben sind.

§. 44. Oder man stelle sich vor, daß man ein jedes Theilchen der A wieder in eine Zahl anderer gleicher Theile theile, und ein jedes Theilchen der B in eben so viele. Man theile zum Exempel ein jedes Theilchen in den beiden Linien A, B wieder in drey gleiche Theile, so ist klar, daß dieselben Theile ebenfals alle gleich seyn werden. Es sind aber nunmehro der Theile in A, 15, und der Theile in B, 9, und es verhält sich demnach A zur B nicht nur wie 5 zu 3, sondern auch wie 15 zu 9. Und man siehet, daß man noch ohne Ende andere Zahlen finden könte, welche eben diese Verhältniß A : B ausdrucken.

§. 45. Dergleichen ganze Zahlen, welche einerley Verhältniß A : B ausdrucken, haben alle einerley Verhältniß gegen einander, es sind aber immer einige derselben grösser als andere. Die Verhältniß 5 : 3 ist der Verhältniß 15 : 9 gleich. Die Zahl 5 entstehet aus 3 eben so wie 15 aus der 9 entstehet. Und die Namen dieser Verhältnisse $\frac{5}{3}$ und $\frac{15}{9}$ sind einerley, weil der letzte Bruch keinen andern Werth hat, als der erste, wie man findet, wenn man die Glieder desselben durch

durch 3 theilet. Es entstehet demnach hierbey die Frage, in welchem Falle die Zahlen, welche einerley Verhältniß ausdrücken, die kleineste unter allen sind, die eben diese Verhältniß haben, und wie die grösseren Zahlen von eben dieser Verhältniß aus der kleinesten entstehen?

VI. Abschnitt.

§. 46. Wir können dieses aus demjenigen herleiten, so von den Brüchen bereits gewiesen worden. Wenn die Verhältnisse 5 : 3 und 20 : 12 gleich sind, so sind auch die Brüche $\frac{5}{3}$ und $\frac{20}{12}$ gleich, und sind die Brüche gleich, so sind auch die Verhältnisse gleich VI, 40. Eines folget aus dem andern, oder man saget vielmehr in diesen Redens-Arten einerley mit verschiedenen Worten. Ist nun der Bruch durch die kleinesten der Zahlen ausgedrucket, durch welche er sich ausdrücken lässet, so ist auch die Verhältniß des Zehlers zu dem Nenner in den kleinesten Zahlen dargestellet. Es lässet sich aber ein Bruch nicht durch noch kleinere Zahlen ausdrücken, wenn die Glieder desselben sich auf einander wie einfache Zahlen beziehen II, 95. Es sind demnach auch solche Zahlen, die sich auf einander wie einfache Zahlen beziehen, die kleinesten unter allen, die eben die Verhältniß haben. Aus der Ursache kan die Verhältniß 5 : 3 nicht durch noch kleinere ganze Zahlen ausgedrücket werden.

§. 47. Doch es wird dieses und was noch hievon zu zeigen ohnfehlbar deutlicher, wenn wir uns an die gegebene Begriffe unmittelbar halten, ohne auf die Bruch-Rechnung zurück zu gehen. Wir wollen demnach setzen, daß die Verhältniß der Zahl A zu der Zahl B durch andere Zahlen C, D auszudrucken sey, dergestalt, daß die Verhältniß A : B der Verhältniß C : D gleich sey: so muß man A und B in gleiche Theile theilen, wie in der 165 Figur geschehen, da ein jedes Theil dieser Zahlen A und B zwey ist, und so dann der C so viele Theile geben, als die A hat, und der D so viele, als deren in B enthalten sind: so verhält sich ohnstreitig A zur B, wie sich C zur D verhält. Denn es entstehet A aus der B, wie die C aus der D entstehet VI, 35. Sind nun die Theile der Zahlen C und D von den Theilen der Zahlen A und B nicht verschieden, so sind diese letztern Zahlen C und D mit den erstern vollkommen einerley, und es ist A = C, und B = D. Und wenn man demnach andere Zahlen haben wil, deren erstere sich gegen die andere wie A zur B verhält, so muß man die Theile dieser Zahlen C und D kleiner oder grösser annehmen als die Theile sind, in welche die Zahlen A und B zertheilet worden ist,

F. 165.

VI. Abschnitt. wie wir gethan, indem wir vor die Theile der Zahlen C und D die Einheit genommen.

§. 48. Ist dieses letztere geschehen, und hat man die Einheit vor den Theil der C und D angenommen, so entstehen die Zahlen A und B aus den Zahlen C und D, wenn man diese letztere Zahlen C und D durch einen der Theile, in welche man A und B zerfället hat, multipliciret; Als in unserer Figur wird A aus C und B aus D, wenn man diese letztere Zahlen durch 2 multipliciret, und im Gegentheil kommen die Zahlen C und D, wenn man die erstere A und B durch eben die Zahl 2 dividiret. Je grösser man die Theile der Zahlen A und B annimmet, und je kleiner die Theile sind, aus welchen man die Zahlen C und D zusammen setzet, je kleiner werden auch diese letztere Zahlen C und D. Man kan aber die Theile in C und D nicht kleiner machen als die Einheit, weil C und D ganze Zahlen seyn sollen. Denn wenn man vor einen jeden Theil in A und B einen Bruch in die Zahen C und D setzen wolte, zum Exempel $\frac{1}{3}$, so würde $C = \frac{4}{3}$ und $D = \frac{3}{3}$, dieses aber wollen wir nicht haben. Und wenn man demnach die Zahlen A und B in so grosse Theile theilet, als nur möglich ist, und setzet vor einen jeden solchen Theil in A die Einheit in C, und vor einen jeden solchen Theil in B die Einheit in D, das ist, II, 65. wenn man die Zahlen A und B durch den grössesten gemeinschaftlichen Theiler dividiret, welchen sie haben können, und bemerket die Quotienten bey C und D, so sind C und D die kleinesten Zahlen, welche eben die Verhältniß ausdrucken die A zur B hat.

§. 49. Ist nun aber dieses alles dergestalt geschehen, hat man die Zahlen A und B in so grosse Theile getheilet, als sie nur haben können, und vor einen jeden dieser Theile die Einheit in C und D gesetzet, und folgends die Verhältniß A : B durch die kleinesten Zahlen C und D ausgedrucket, so beziehen sich die Zahlen C und D nothwendig als einfache Zahlen auf einander, und sie haben keinen andern gemeinschaftlichen Theiler als die Einheit. Denn wenn die Zahlen C und D einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, welcher grösser wäre als die Einheit, zum Exempel 2, wie die Zahlen C und D der 166 Figur, da wir diese Theilung durch die gedoppelten Striche bemerket, so müsten auch die Zahlen A und B sich durch einen gemeinschaftlichen Theiler theilen lassen, welcher gedoppelt so groß ist, als der vorige, weil vor eine jede Einheit der Zahlen C und D ein solcher gedoppelter Theil in A und B stehet. Dieses aber widerspricht demjenigen, so wir

F. 166.

An-

Anfangs gesetzet, daß man die Zahlen A und B mit den grösten Theilern getheilet, welche sie gemeinschaftlich haben können. Es ist demnach nicht anders möglich, C und D müssen sich als einfache Zahlen auf einander beziehen.

F. 165.

§. 50. Und ist eine Verhältniß C : D durch zwo Zahlen ausgedrucket, die sich auf einander wie einfache Zahlen beziehen, so kan sie nicht durch andere, und von den vorigen verschiedene Zahlen ausgedrucket werden, die sich ebenfals auf einander wie einfache Zahlen beziehen. Denn will man zwo Zahlen A und B machen, deren erstere A sich zu der zwoten B verhält wie C zur D; so muß VI, 35. man C und D in gleiche Theile theilen. Diese Theile aber sind hier keine andere als die Einheit, weil C und D sich als einfache Zahlen auf einander beziehen. Vor einen jeden Theil in D, das ist, vor eine jede Einheit dieser Zahl, muß man nachhero einen nach Belieben angenommenen Theil zum Exempel 2 in B setzen, und vor eine jede Einheit, die in C angetroffen wird, eben den Theil 2 in A bringen: so verhält sich A zur B, wie C zur D, und man kan auf keine andere Art ganze Zahlen heraus bringen, welche von den Zahlen C und D verschieden sind, und deren Verhältniß doch der Verhältniß C zur D gleich ist, als auf diese, wie aus dem Begriffe der Verhältniß überflüssig klar ist. Und hieraus folget, daß alle Zahlen welche sich gegen einander verhalten wie C zur D, aus der Multiplication dieser zwo Zahlen durch einerley dritte Zahl entstanden sind, wenn gesetzet wird, daß C und D sich auf einander als einfache Zahlen beziehen.

§. 51. Demnach sind die Zahlen A und B keine einfache Zahlen, sie beziehen sich auch nicht auf einander als einfache Zahlen, weil sie durch die Multiplication der Zahlen C und D, die sich als einfache Zahlen auf einander beziehen, entstanden sind. Ist es aber nicht möglich, daß einerley Verhältniß durch verschiedene Zahlen ausgedrucket werden solte, die sich auf einander als einfache Zahlen beziehen, so ist noch vielweniger möglich, daß einerley Verhältniß durch verschiedene würklich einfache Zahlen solte können ausgedrucket werden. Denn alle einfache Zahlen beziehen sich auf einander als einfache Zahlen.

§. 52. Man pfleget die Verhältniß solcher Grössen die aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind, durch die Verhältniß der kleinesten Zahlen auszudrucken, durch die sie ausgedrucket werden kan. Man saget eine Linie, die wir A nennen wollen, verhalte sich zu einer

Linie

VI. Abschnitt.

Linie B, wie 2 zu 1, wenn A doppelt so groß ist als B, oder A verhalte sich zu B, wie 3 zu 2, wenn A drey Theile enthält, deren zwey die B ausmachen: oder wenn A sechs Theile hat, deren viere in B enthalten sind. Dasjenige so wir gezeiget, giebt uns an die Hand, was dieses vor Zahlen sind, durch welche eine dergleichen Verhältniß ausgedrucket wird. Sie sind entweder einfache Zahlen, oder beziehen sich auf einander als einfache Zahlen, und werden gefunden, wenn man die Verhältniß A zur B durch beliebige Zahlen ausdrucket; zum Exempel, wenn A aus 18 Theilchen bestünde, deren 12 die B ausmachen, durch die Verhältniß 18 : 12, und die Glieder dieser Verhältniß so dann durch den grösten gemeinschaftlichen Theiler theilet, welchen sie haben können. Dieser ist im gegenwärtigen Fall 6, und die Verhältniß 18 : 12 wird, wenn man beyde Glieder durch 6 dividiret, durch die Verhältniß 3 : 2 ausgedrucket, welche also auch die Verhältniß A : B darstellet.

§. 53. Die Gleichheit zwoer Verhältnisse wird mit einem Wort die **Proportion** genennet, welche also allezeit aus vier Gliedern bestehet, deren erstes sich zu dem zweyten verhält, wie das dritte zu dem vierten. Doch kan auch ein Glied die Stelle von zweyen vertreten, oder es können zwey Glieder einer Proportion einander gleich seyn. Man siehet hieraus leicht, daß $A : B = C : D$ nichts anders bedeuten könne, als daß die vier Grössen die durch die Buchstaben A, B, C, D, bedeutet werden, sie mögen nun Zahlen oder Linien, oder was anders bedeuten, eine Proportion haben, oder, wie man auch anders zu reden pfleget, daß diese Grössen A, B, C, D in der Ordnung, in welcher sie stehen, proportional sind. VI, 42.

§. 54. Das erste Glied einer Proportion A muß nothwendig mit dem zweyten B von einerley Art seyn, sonst kan es gegen dasselbe keine Verhältniß haben, und das dritte C muß von der Art des vierten D seyn. Es ist aber nicht nothwendig, daß C und D von der Art der Glieder A und B seyn, wie wohl auch nichts hindert, daß dieses nicht ebenfals statt haben könte. Wir haben dieses bereits oben VI, 23. eingesehen, und wiederholen es bloß hier mit andern Worten.

F. 167.

§. 55. Wenn aber bey einer Proportion eines der Glieder der ersten Verhältniß, zum Exempel B, von der Art eines Gliedes der zwoten Verhältniß als des C ist; so sind nothwendig alle vier Glieder von einerley Art. Dieses ist gewißlich so, wenn B der C gleich ist. Denn gleiche Dinge können nicht verschiedener Art seyn. Ist aber dieses,

F. 168.

ses, und ist in der Proportion A : B = C : D das Glied B dem Gliede C gleich, so saget man, die Proportion gehe in einem fort, sie sey stetig, oder zusammenhängend. Nemlich die Glieder A, B, C, D, das ist (wenn man B vor C, oder C vor B setzet, welches in diesem Falle allezeit geschehen kan,) die Glieder A, B und B, D, oder A, C, und C, D seyen in einer stetigen oder zusammenhängenden Proportion. Man pfleget in diesem Falle auch das mittlere Glied B oder C, nur einmal zu nennen, und zu sagen, A, B und D, oder A, C und D seyen in einer zusammenhangenden Proportion, oder auch, die Proportion der Glieder A, B, und D, oder A, C und D gehe in einem fort. In welchem Falle man sich einbilden muß, daß das mittlere Glied der Proportion B oder C die Stelle so wohl des zweyten Gliedes der ersten Verhältniß A : B, als auch die Stelle des ersten Gliedes der zwoten C : D vertrete. Es werden aber dergleichen Proportionen nicht anders bezeichnet als die übrigen. Man schreibet A : B = B : D, oder A : C = C : D. Die mittlern Buchstaben sind einerley, und bedeuten, daß das zweyte Glied der ersten Verhältniß mit dem ersten Glied der zwoten einerley sey. Dieses ist ein gnugsames Kennzeichen, daß die Proportion zusammen hange.

Merkmahle, woraus die Gleichheit der Verhältniß ungetheilter Grössen geschlossen wird.

§. 56. Sind die Grössen, welche man mit einander vergleichet, nicht aus gleichen Theilen zusammen gesetzt, oder betrachtet man sie wenigstens nicht so, als ob sie aus gleichen Theilen zusammen gesetzet wären, so muß man, wie wir gleich Anfangs VI, 9. erinnert, ein anderes Kennzeichen haben, woraus man die Gleichheit zwoer Verhältnisse und die Proportion der Glieder dieser Verhältnisse schliesset, welches wir nunmehro deutlich vorzutragen bemühet seyn werden.

§. 57. Gesetzet, es seyen die vier Grössen AB, AC, und ab, ac gegeben; man soll sagen, ob die Verhältniß AC : AB der Verhältniß ac : ab gleich sey oder nicht: so theile man die Grössen AB, ab in eine beliebige Zahl gleicher Theile, welche in unserer Figur fünfe ist, und trage diese Theile auf die verlängerten AB, ab fort, bis man über die Puncte C, c hinaus kommet; wenn nemlich AC, ac grösser sind als AB, ab, denn sonst ist dieses nicht nöthig. Findet man, daß zwischen A und C eine andere Zahl dieser Theilchen liege, als zwischen a und c, so siehet man so gleich, daß die Verhältniß AC : AB der

F. 169. 170.

 Ver-

Verhältniß ac:ab ohnmöglich gleich seyn könne. VI, 36. Findet man aber, daß zwischen A und C eben so viele Theilchen liegen, als zwischen a und c, so ist man zwar nicht gesichert, daß die Proportion AC:AB = ac:ab vollkommen richtig sey, aber so viel weiß man doch, daß die Verhältnisse AC:AB und ac:ab nicht sonderlich ungleich seyn können. Und zwar kommen sie der Gleichheit desto näher, je mehrere der Theilchen in AB sind, und je kleiner also diese Theilchen angenommen worden. VI, 8.

§. 58. Will man aber darthun, daß die Verhältnisse AC:AB und ac:ab vollkommen gleich seyn, so muß man zeigen, daß, was von einer Theilung richtig ist, auch bey allen übrigen statt habe, und daß nicht nur, wenn man AB und ab in fünf gleiche Theile theilet, und dergleichen Theilchen aus A nach C, und aus a nach c fort träget, zwischen A und C so viele Theile zu liegen kommen, als ihrer zwischen a und c liegen, sondern daß eben dieses erfolge, wenn man AB und ab in 15, in 29, in 377, und mit einem Wort, in so viele gleiche Theile theilet als man will.

§. 59. Man kan dieses auch also ausdrucken: Wenn die Grössen AC, AB, ac, ab proportional seyn sollen, und man theilet AB in eine beliebige Zahl gleicher Theile, und ab in eben so viele gleiche Theile, so muß eine jede Zahl der Theile, in welche AB getheilet worden, weniger bringen als AC, wenn eben die Zahl der Theile der ab weniger giebt als ac, und giebt die Zahl der Theile der AB, welche man angenommen hat, eben so viel als AC, so muß auch eben die Zahl der Theile der ab so viel ausmachen als ac. Giebet aber eine nach Belieben angenommene Zahl der Theile, in welche AB getheilet worden, mehr als AC, so muß auch eben die Zahl der Theile der ab mehr betragen als ac. In der 169 Figur ist AB in fünf gleiche Theile getheilet, und ab in eben so viele Theile. Ein Theilchen der AB ist kleiner als AC, und ein Theilchen der ab ist auch kleiner als ac. Zwey Theilchen der AB bringen weniger als AC, und zwey Theilchen der ab bringen auch weniger als ac. Hingegen geben drey Theilchen der AB mehr als AC, und drey Theilchen der ab geben ebenfals mehr als ac. Hieraus schliesset man, daß die Verhältniß AC:AB von der Verhältniß ac:ab so sonderlich nicht abgehen könne, und wenn eben dergleichen eintrift, man mag der Theilchen in AB, ab so viele machen als man will, so sind die Verhältnisse AC:AB, und ac:ab würklich gleich. Man kan

kan eben dieses auf den Fall anwenden, wenn die AC, ac grösser sind als die AB, ab, welchen die 170 Figur vorstellet.

§. 60. Oder noch anders. Wenn man der AB eine beliebige Zahl gleicher Theile giebet, und die ab in eben so viele gleiche Theile theilet, eben diese Theile aber, so oft es nöthig ist, von B, b weiter über C, c fortträget, und findet, daß die Puncte C, c zwischen gleichnahmige Theilungspuncte fallen, die nemlich von dem Anfange der Linien A, a um einerley Zahl von Theilchen ab stehen, und dieses trift beständig zu, wie viele Theile man auch den Linien AB, ab geben mag: so kan man sicher schliessen, daß die Verhältniß AC : AB der Verhältniß ac : ab gleich, und die Proportion AC : AB = ac : ab richtig sey.

§. 61. Erweget man dieses genau, so siehet man, daß man diese Begriffe auch nachfolgender gestalt ausdrucken könne. Es kan m eine jede ganze Zahl bedeuten, was man vor eine annehmen will, und eben so ist es mit einem jeden andern Buchstaben n, folgends wird $\frac{1}{m}$ einen jeden Bruch bedeuten, dessen Zehler die Einheit ist, und $\frac{n}{m}$ bedeutet überhaupt einen jeden Bruch, dessen Glieder so groß oder so klein seyn mögen, als man will. Und demnach drucket $\frac{1}{m}$ AB einen Theil der AB aus, welcher entstanden, indem man AB in so viele gleiche Theile getheilet, als viele Einheiten in der Zahl m enthalten sind, und $\frac{1}{m}$ ab bedeutet einen eben dergleichen Theil der Grösse ab, welche in so viele gleiche Theile getheilet wird als AB, weil man dem Buchstaben m in einerley Satze, und so einem jeden andern, keine andere Bedeutung giebt, als diejenige, welche man zuerst angenommen, oder, weil man bey jedem Satze gleiche Zahlen mit einerley Buchstaben bezeichnet, ob zwar übrigens diese gleiche Zahlen nach Belieben angenommen werden können. Und will man demnach anzeigen, man soll so wohl AB als ab in eine beliebige Zahl gleicher Theile theilen, so kan man nur schreiben, man soll so wohl $\frac{1}{m}$ AB als $\frac{1}{m}$ ab nehmen. Soll nun aber dieser Theile beyderseits die Zahl n angenommen werden, so benennet man diese Zahl der Theile also $\frac{n}{m}$ AB, $\frac{n}{m}$ ab. Und $\frac{n}{m}$ ist der Bruch welcher durch seinen

VI. Abschnitt.

Nenner m angezeiget in wie viel gleiche Theile die Grössen AB, ab getheilet werden müssen, und durch seinen Zehler n wie viele solcher Theile man annehmen müsse, um dasjenige zu erhalten, welches $\frac{n}{m}$ AB, oder $\frac{n}{m}$ ab ausgedrucket. Demnach ist $\frac{n}{m}$AB, in der 169 Figur überhaupt ein jeder Bruch der Linie AB, in wie viel gleiche Theile man auch AB mag getheilet haben, und $\frac{n}{m}$ab ist ein eben dergleichen Bruch der Linie ab, welcher Bruch allezeit grösser ist als das ganze AB, wenn n grösser ist als m. Und demnach kan man sagen, ohne in den Begriffen etwas zu ändern, welche wir mit Worten ausgedrucket: die Proportion AC : AB = ac : ab habe ihre Richtigkeit, wenn bey einer jeden Bedeutung, die man den Buchstaben m, n geben mag, fals $\frac{n}{m}$AB grösser ist als AC, auch zugleich $\frac{n}{m}$ab grösser ist als ac: und fals $\frac{n}{m}$AB kleiner ist als AC, auch zugleich $\frac{n}{m}$ab kleiner ist, als ac: und fals $\frac{n}{m}$AB so groß ist als AC, auch zugleich $\frac{n}{m}$ab so groß ist als ac. Man erwege alles genau, so wird man finden, daß dieser Ausdruck nichts anders bedeuten könne, als was vorher mit Worten vorgetragen worden.

§. 62. Dieses ist das Merkmal, woraus die Alten die Proportion geschlossen. Sie tragen aber dasselbe etwas anders vor, vielleicht weil sie die Brüche vermeiden wollen. Sie haben bemerket, daß wenn $\frac{n}{m}$AB grösser ist als AC, auch nAB grösser seyn müsse als mAC. Denn diese Grössen nAB und mAC entstehen, wenn man die erstern $\frac{n}{m}$AB und AC beyderseits durch die Zahl m multiplicíret; I, 147. und wenn man zwo Grössen durch einerley Zahl multiplicíret, so entstehet aus der Multiplication der grösseren allezeit was Grösseres, als aus der Multiplication des Kleineren. Aus eben der Ursache ist nAB kleiner als mAC, wenn $\frac{n}{m}$AB kleiner ist als AC, und nAB = mAC, wenn $\frac{n}{m}$AB = AC. Man kan aber auch umgekehret schliessen, von

nAB

$nAB = mAC$ auf $\frac{n}{m}AB = AC$, und so bey den übrigen, und sind also diese zwo Arten sich auszudrucken, im Grunde einerley. Denn aus $nAB = mAC$, wird $\frac{n}{m}AB = AC$, wenn man beyderseits durch die Zahl m dividiret. Und diesem zufolge kan man sagen, daß, wenn nAB grösser ist als mAC, und zugleich nab grösser als mac; oder wenn nAB kleiner ist, als mAC, und zugleich nab kleiner als mac, oder wenn $nAB = mAC$, und zugleich $nab = mac$, so sind die Grössen AC, AB, ac, ab proportional. Das ist, wenn man vier Grössen hat AC, AB, ac, ab und man findet, daß wenn man die erste AC und dritte ac mit einer beliebigen Zahl m und die zwote AB wie auch die vierte ab durch eine ebenfals nach Belieben angenommene Zahl n multipliciret, niemals mAC grösser werde als nAB, wenn nicht auch mac grösser ist als nab, oder kleiner, wenn nicht auch mac kleiner ist als nab, oder der nAB gleich, wenn nicht auch mac der nab gleich ist: so kan man eben so, wie vorher VI, 59. schliessen, es seyn die vier Grössen AC, AB, ac, ab proportional. Die Anwendung dieses Merkmals ist so schwer nicht, als sie Anfangs scheinen kan. Doch werden wir uns des erstern Ausdrucks durch Brüche VI, 61. lieber bedienen, weil selber wenigstens etwas einfachere Figuren giebet.

VI. Abschnitt.

§. 63. Es kan uns dabey nicht aufhalten daß wir angenommen, es könne eine jede Grösse, dergleichen die Linien AB, ab sind, in eine beliebige Zahl gleicher Theile getheilet werden. Denn daß dieses geschehen könne, ist an sich selbst klar, und muste in der Rechenkunst überall zum Grunde geleget werden. Von geraden Linien aber, mit welchen wir hier meist umgehen, haben wir auch gewiesen, auf was Art ihre Theilung möglich sey, als wir IV, 194. gezeiget, daß jede zwo gerade Linien durch eine beliebige Zahl von Parallellinien, welche gleich weit von einander entfernet sind, in gleiche Theile getheilet werden. Man kan daraus leicht die Anweisung herleiten, wie diese Theilung würklich zu verrichten ist. Es sey AB in der 171 Figur in fünf gleiche Theile zu theilen. Man ziehe durch A eine beliebige Linie, ohne ihr Ende zu bestimmen, und trage auf dieselbe von A an eine Linie von beliebiger Länge fünf mal. Dadurch wird die ganze Linie AC aus fünf gleichen Theilen zusammen gesetzet. Man ziehe BC von dem Ende dieser Linie, an das Ende der vorigen AB, welche man theilen sol: und durch alle Theilungspuncte der AC ziehe man mit dieser BC Parallellinien. Die-

F. 171.

se werden die AB in fünf gleiche Theile theilen. Denn wenn man auch durch A die Linie AD den übrigen parallel ziehet, so siehet man, daß AB zwischen den äussersten der Parallellinien liege, welche AC in fünf gleiche Theile theilen. Demnach wird AB ebenfals in fünf gleiche Theile getheilet, und eben so kan man eine jede andere gerade Linie in fünf oder viele gleiche Theile theilen, als aufgegeben wird.

§. 64. Uebrigens kan man dasjenige, so bisher VI, 61. gesaget worden, wieder als eine Erklärung einer beliebigen Redensart ansehen. Daß aber dieser Begrif der Proportion mit demjenigen überein komme, welchen wir gleich Anfangs VI, 11. gegeben, kan aus nachfolgenden erhellen. Man kan bey den Umständen, die wir angegeben, sich vorstellen, daß die zwo Grössen AB und AC, wie auch die zwo andern ab und ac gleichförmig anwachsen, und daß AB mit der ab, und AC mit der ac zugleich entstanden sey: Woraus nothwendig fliesset, daß die Verhältniß AC : AB der Verhältniß ac : ab gleich sey, wie man hoffentlich einsehen wird, wenn wir uns noch etwas deutlicher werden erkläret haben.

F. 169. 170.

§. 65. Eine Linie entstehet durch die Bewegung eines Punctes, und wenn diese Bewegung von A anfänget, und das Punct gehet von dannen nach B zu, so wächset die Linie beständig. Alle andere Grössen können auf die Art entstehen, nicht zwar durch die Bewegung der Puncte, denn dadurch entstehen bloß die Linien, sondern durch die Bewegung anderer Grössen; oder sie können doch durch ein beständiges Wachsthum eben so zunehmen, wie eine Linie durch die Bewegung des Punctes, welches sie beschreibet, immer grösser und grösser wird. Diese Bewegung des Punctes aber und das daraus entstehende Wachsthum der Linie kan auf verschiedene Art eingerichtet seyn. Die Linie kan bald geschwinder bald langsamer wachsen, und das Wachsthum kan nach verschiedenen Regeln abwechseln. Es kan aber auch eine Linie und überhaupt eine jede Grösse gleichförmig anwachsen, so nemlich, daß jede gleiche Theile derselben in gleicher Zeit entstehen. Geschiehet dieses bey zwo Linien AB und ab zugleich, dergestalt, daß wenn jede derselben in eine beliebige Zahl gleicher Theile getheilet ist; das erste Theil der Linie AB anwächset, indem das erste Theil der Linie ab erzeuget wird, und entstehet das zweyte Theil der Linie AB zugleich mit dem zweyten Theil der Linie ab; das dritte mit dem dritten, und so immer fort, so entstehen die Linien AB, und ab durch ein gleichförmiges Wachsthum zugleich. Jede zwo gerade Linien können durch ein

gleich-

gleichförmiges Wachsthum zugleich entstehen, und wenn die Puncte, welche die Linien AB, ab auf die Weise beschreiben, zugleich in C, c angelanget sind, es mögen nun diese C, c auf dieser oder jener Seite der Puncte B, b liegen, so sind auch die Linien AC, ac durch ein gleichförmiges Wachsthum zugleich entstanden.

§. 66. Es ist aber ohne sonderliche Schwierigkeit einzusehen, daß die Puncte, welche die Linien AC und ac so wohl als AB, ab durch eine gleichförmige Bewegung beschreiben, in dem Falle zugleich in C und c kommen, wenn die Puncte C, c in den beyden Linien AB, ab immer zwischen solchen Theilungspuncten liegen, welche von A, a um eine gleiche Zahl von gleichen Theilen der AB und ab entfernet sind, von was Grösse diese Theile auch seyn mögen, und daß bey dieser Bedingung die Linien AC, ac durch eben die gleichförmige Bewegung, welche AB und ab zugleich beschreibet, zugleich entstehen. Und demnach kommet das Merkmal, aus welchem wir VI, 60. geschlossen, daß die Grössen AC, AB, ac ab proportional sind, endlich darauf hinaus, daß AB und AC durch ein gleichförmiges Wachsthum entstehen, wie auch ab und ac, und daß indem AB entstehet, auch ab erzeuget wird, wie auch das AC und ac mit einander zugleich anwachsen, und zugleich die Grösse erreichen, welche sie haben.

§. 67. Ist nun aber AC durch eben das gleichförmige Wachsthum entstanden, durch welches AB erzeuget worden, und hat die beyden Linien ac und ab ebenfals einerley gleichförmiges Wachsthum hervor gebracht, ist über dieses AB entstanden, indem ab erzeuget worden, und ist auch AC mit der ac zugleich angewachsen; so muß allerdings die Verhältniß AC : AB der Verhältniß ac : ab gleich seyn. Man hat bey so gestalten Sachen nicht den geringsten Grund, aus welchem man schliessen könte, daß AC in Ansehung der AB grösser sey, als ac in Ansehung der ab ist, welcher nicht zugleich dienen könte, darzuthun, es sey ac in Ansehung der ab grösser als AC in Ansehung der AB, welches dem vorigen gerade entgegen gesetzet ist. Denn es ist alles auf einer Seite vollkommen wie auf der andern. Durch die Grösse AB wird das gleichförmige Wachsthum bestimmet, durch welches so wohl AB als AC entstehen, und eben so bestimmet ab das Wachsthum, durch welches ab und ac erzeuget wird. Indem dieses geschiehet, wächset so wohl AB und ab, als auch AC und ac zugleich an, und ihre Grössen werden dadurch bestimmet. Also werden auch die Grössen, welche man ihnen geben muß, wenn man sie auf einan-

der

der beziehet, durch eben das Wachsthum bestimmet, und weil die Grösse AC aus der AB nicht anders entstanden ist, als die Grösse ac aus der ab, so kan auch AC sich gegen AB nicht anders verhalten, als sich ac gegen ab verhält.

§. 68. Dieses gleichförmige Wachsthum ist der rechte Grund der Gleichheit zwoer Verhältnisse, und man kan auch umgekehret sagen, daß wenn die Verhältniß AC:AB der Verhältniß ac : ab gleich ist, und man stellet sich vor, daß AC und AB durch einerley gleichförmiges Wachsthum entstehen, und ac und ab ebenfals; und daß AB und ab mit einander zugleich entstehen; auch AC und ac zugleich entstehen werden. Denn wäre dieses nicht, und AC entstünde bey den bestimmeten Umständen langsamer als ac, so wäre ohnstreitig AC in Ansehung der AB grösser als ac in Ansehung der ab, weil eine kleinere Grösse als die AC, die nemlich, welche mit der ac zugleich entstanden, gegen AB sich verhielte, wie sich ac gegen ab verhält.

§. 69. Man siehet auch, daß sich dieser Begrif einer Verhältniß, welchen wir hier zum Grunde legen, mit demjenigen vollkommen reime, welchen wir oben VI, 31. angegeben, da wir gesaget, die Verhältniß der AC zur AB sey die Art und Weise wie AC aus der AB entstehen kan. Nun muß man hier annehmen, daß AC durch ein gleichförmiges Wachsthum erzeuget wird, welches auch die AB bestimmet, und nicht durch die Zusammensetzung der Theile der AB. Denn durch diese Zusammensetzung kan AC bloß in dem Fall entstehen, wenn das Punct C eben in einen Theilungspunct der AB fället, wenn man nemlich diese Theilchen, so oft es nöthig ist, ausserhalb B fortsetzet. Es fället aber C nicht nothwendig in einen solchen Theilungspunct, denn wir haben gesehen daß AC von einer solchen Länge seyn könne, daß, man mag AB theilen in so viele gleiche Theile als man wil, und dieser Theile wie man wil von A nach B und so weiter fortsetzen, dennoch niemals das Ende eines solchen Theilchens genau in C falle. VI, 5. Indessen ist der Fall, in welchem C mit einem Theilungspuncte überein kommet, bey welchem Umstande AC aus AB entstehen kan, wie eine ganze Zahl aus einer andern, oder wie eine gebrochene Zahl aus der Einheit, unter dem allgemeinen Begriffe enthalten, welchen wir aus dem gleichförmigen Wachsthume hergenommen haben, und was aus diesem allgemeinen Begriffe wird hergeleitet werden, lässet sich überhaupt auf alle Proportionen anwenden. Doch wollen wir grösserer Deutlichkeit halber die Beweise, welche nunmehro einzusehen seyn wer-

werden, auch insbesondere auf solche Grössen einrichten, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind; welche diejenigen vor allgemein annehmen können, welche sich alle Grössen, als aus gleichen Theilen zusammen gesetzet, vorstellen, indem sie diese Theile, wenn die Zusammensetzung nicht anders geschehen kan, von unendlicher Kleinigkeit annehmen.

VI. Abschnitt.

§. 70. Wir werden uns bey diesen Beweisen und sonst zuweilen des Zeichens > bedienen, welches, wenn man es zwischen die Buchstaben setzet, welche gewisse Grössen andeuten, allezeit bedeutet, daß diejenige Grösse, welche an der Spitze des Zeichens bezeichnet ist, kleiner sey als die andere, welche man ihr entgegen gesetzet. $A > B$, oder $B < A$ bedeutet es sey die Grösse, welche B bedeutet, kleiner als diejenige, welche der Buchstab A anzeiget, oder es sey die A grösser als B. Wir werden auch zuweilen schreiben, wenn $A >=< a$, so ist auch $B >=< b$. In welchem Falle wir anzeigen wollen, daß wenn A grösser ist als a, so sey auch B grösser als b, und wenn A der a gleich ist, so sey auch B der b gleich, und wenn A kleiner ist, als a, so sey auch B kleiner als b.

§. 71. Es betreffen aber diese Beweise gewisse Regeln, vermittelst welcher man aus einer Verhältniß auf andere schliessen, und aus einer oder etlichen Proportionen, andere herleiten kan, welche allezeit richtig sind, wenn die ersten ihre Richtigkeit haben. Sie sind von ungemeinen Nutzen und müssen vollkommen bekannt seyn. Dieses ist eben die Ursache, warum wir den Leser so lange bey dieser Sache aufhalten, und uns bemühen alles aus den ersten Gründen herzuleiten.

Regeln zur Verwandelung der Proportion. Die erste.

§. 72. Die erste dieser Regeln ist so natürlich und so leicht, daß sie kaum eines Beweises bedarf. Wenn die vier Grössen AC, AB und ac ab proportional sind, und folgends $AC:AB=ac:ab$; so sind sie auch verkehrt gesetzet proportional, und der Satz welchen diese Zeichnung ausdrucket $AB:AC=ab:ac$, ist ebenfals richtig. Denn diese beyden Sätze $AC:AB=ac:ab$ und $AB:AC=ab:ac$ zeigen nichts anders an, als daß AB und AC durch einerley gleichförmiges Wachsthum entstanden, wie auch die ac und ab, und daß die AB und ab wie auch die AC und ac durch dieses Wachsthum zu gleicher Zeit erzeuget worden. VI, 68. Ist nun der erste Satz $AC:AB=ac:ab$

F. 169. 170.

VI. Abschnitt. wahr, so sind würklich AC und AB, wie auch ac und ab, durch ein gleichförmiges Wachsthum; AC, ac aber, wie auch AB, ab zugleich, entstanden: oder haben doch so entstehen können, welches auf eines hinaus kommet: also muß auch der andere Satz AB: AC = ab: ac richtig seyn, welcher eben das, und nichts anders, ausdrucket.

F. 163. §. 73. Bedeuten die Buchstaben A, B, C, D die getheilten Grössen der 163 Figur, und ist A: B = C: D, so siehet man eben so leicht, daß auch diese Proportion B: A = D: C richtig sey, wenn man sich der Gründe bedienen wil, die wir von der Proportion solcher Grössen ins besondere angegeben VI, 35. B und D bestehen aus gleich vielen Theilen. Aus den Theilen der B ist A zusammen gesetzet, und aus den Theilen der D die C, und in A sind so viele Theile als in C. Also kan man sich auch vorstellen, daß A und C in eine gleiche Zahl Theile getheilet seyn, und daß man aus gleichen Zahlen dieser Theile B und D zusammen gesetzet, die B nemlich aus den Theilen der A und die D aus den Theilen der C. Und wenn man die Sache auf der Seite betrachtet, so muß man sagen, es verhält sich B zur A, wie D zur C. Doch wem ist es unbekannt, daß wenn A in Ansehung der B eben so groß ist, als C in Ansehung der D, auch wiederum B in Ansehung der A so groß sey als D in Ansehung der C. Dieses aber und nichts anders wil man sagen, wenn man angiebet, daß sich die Glieder zwoer gleichen Verhältnisse versetzen lassen, das zweyte in die Stelle des ersten, und das erste in die Stelle des zweyten, ohne daß dadurch die Gleichheit der Verhältnisse, oder Proportion anfhöre.

Die zweyte Regel.

F. 172. §. 74. Die zweyte Regel, welche verschiedene besondere Fälle unter sich begreiffet, ist diese. Man setzet, daß in der 172 Figur, die Verhältniß AB : CD der Verhältniß ab : cd gleich sey, wie auch daß BC : CD = bc : cd diese Bedingungen sind wohl zu bemerken. Die hintern Glieder dieser Verhältnisse CD, und cd, sind gleich, und damit dieses desto deutlicher in die Augen fallen möge, haben wir diese Proportionen unter einander gesetzet:

AB : CD = ab : cd

BC : CD = bc : cd, die vordern Glieder AB, BC, ab, bc aber können verschieden seyn. Man mache die Summe der zweyen ersten Glieder der Verhältnisse AB + BC, wie auch ab + bc, und setze diese Summe an die Stelle der ersten Glieder der Verhältnisse, mit Bey-

be-

behaltung der zweyten, dergestalt $AB + BC : CD = ab + bc : cd$. Diese Proportion, wie wir sie gesetzet, wird richtig seyn.

VI. Abschnitt.

§. 75. Man kan die Richtigkeit aller dieser Sätze mit Zahlen versuchen; und ob es zwar keinen vollständigen Beweiß giebet, wenn die Zahlen eintreffen, weil man glauben kan, daß dieses von ohngefehr geschehe: so dienen doch dergleichen Versuche, die Sätze selbst besser einzusehen, und sich zu überführen, daß man sie eingesehen. Zum gegenwärtigen Falle dienen alle Proportionalzahlen, wenn die letztern Glieder der Verhältnisse einerley sind: zum Exempel diese:

$$5 : 2 = 10 : 4$$
$$7 : 2 = 14 : 4$$

Nach dem Satze verhält sich $7 + 5$, das ist 12 zu 2, wie $10 + 14$, das ist 24 zu 4, und man siehet leicht, daß dieses richtig sey.

§. 76. Auch hat der Beweiß bey Zahlen oder getheileten Grössen nicht die geringste Schwierigkeit. Man stelle sich eine solche Verhältniß unter dieser Zeichnung vor, $nA : mA = nB : mB$, wie man allezeit thun kan. Es bedeutet nemlich n die Zahl der Theile in den vorhergehenden zweyen Gliedern der Verhältnisse, welche in der 163 Zeichnung 5 ist, A bedeutet einen Theil der Glieder der ersten Verhältniß, und B einen der Theile, aus welchen die Glieder der zweyten Verhältniß bestehen, m aber die Zahl der Theile, welche in den nachfolgenden Gliedern der Verhältnisse enthalten sind, die in der Zeichnung 3 ist. Man nehme noch eine andere Proportion, in welcher die ersten Glieder der Verhältnisse von beliebiger Grösse seyn können, die zweyten aber mit den vorigen einerley sind. Diese Proportion sey $sA : mA = sB : mB$, Wenn man nun diese Proportionen unter einander zeichnet,

F. 163.

$nA : mA = nB : mB$,

$sA : mA = sB : mB$, und wie der Satz lehret, die Glieder zusammen setzet, so bekommet man $nA + sA : mA = nB + sB : mB$, Man siehet aber leicht, daß diese Proportion richtig sey. Denn die zweyten Glieder mA, mB derselben haben einerley Zahlen von Theilen m, und die ersten Glieder ebenfals. Denn die Zahl der Theile A in dem ersten Glied $nA + sA$ ist $n + s$, und eben so groß ist auch die Zahl der Theile B in dem dritten Gliede $nB + sB$.

§. 77. Erweget man dieses etwas genauer, so siehet man, daß die

VI. Abschnitt.

zweyten Glieder der letztern Proportion, nicht eben mA seyn müssen. Man hätte an die Stelle derselben auch tA setzen, und so dann alle Glieder, wie sie unter einander stehen, zusammen setzen können. Die Proportion $nA + sA : mA + tA = nB + sB : mB + tB$ ist ebenfals richtig. Alleine dieses ist nicht unser gegenwärtiger Satz, und er wird auch sonst nicht angemerket, weil er von geringem Nutzen ist, und in der Anwendung aus den allgemeinen Sätzen leicht gefolgert werden kan.

§. 78. Wil man aber sich den Beweiß allgemein, und dergestalt vorstellen, daß er auch auf die ungetheilten Grössen angewendet werden kan, so muß man wieder die 172 Figur vor sich nehmen und erwegen, daß eben dadurch indem wir gesetzet, daß die Verhältniß AB : CD der Verhältniß ab : cd gleich sey, wir angenommen, daß AB und CD, wie auch ab und cd durch ein gleichförmiges Wachsthum entstanden; und daß AB mit der ab, wie auch CD mit der cd zugleich angewachsen sey VI, 68. Eben so wird auch gesetzet, daß das Wachsthum, durch welches die beiden Grössen BC, CD entstanden sind, gleichförmig sey, wie auch dasjenige, durch welches die zwo bc, cd entstanden sind, und daß die BC, und bc durch dieses Wachsthum zugleich entstanden, so wol als CD, cd. Denn dieses fliesset aus der ebenfals als richtig angenommenen Proportion BC : CD = bc : cd. Hieraus aber folget, daß auch das Wachsthum, durch welches die ganze AC entstanden ist, demjenigen gleichförmig sey, durch welches die CD entstanden: wie auch dasjenige, durch welches die ac erzeuget worden, dem Wachsthume, durch welches cd geworden, und daß die erstern dieser Linien AC und ac zugleich angewachsen. Weil nun auch diese letztern Linien CD und cd zugleich entstanden sind: so ist allerdings AC : CD = ac : cd. VI, 67. Welches zu erweisen war.

F. 172.

§. 79. Es begreiffet dieser Satz verschiedene andere in sich, welche man als besondere Proportionsregeln ansehen kan. Vor allen Dingen sehen wir, daß er nicht von zween Proportionen allein richtig sey, sondern von so vielen als man wil. Der Satz lässet sich dergestalt ausdrucken:

Wenn A : B = C : D, und
E : B = F : D,

so ist A + E : B = C + F : D. Man kan diesen Schluß nunmehro als einen bekannten Satz annehmen, und ausser dem setzen, G : B =

H

H : D, so folget aus beyden, es sey auch A + E + G : B = C + F + H : D, und wenn man diesem wieder die Proportion J : B = K : D beysetzet, so kan man aus beiden ferner die nachstehende schliessen, A + E + G + J : B = C + F + H + K : D, und so immer fort. Man muß demnach sagen, daß wenn man so viele Proportionen annimmet, als man annehmen wil, deren nachfolgende Glieder von einerley Grösse sind, sich allezeit die Summe aller ersten Glieder zu dem zweyten verhalten werde, wie sich die Summe der dritten Glieder aller dieser Verhältnisse zu dem vierten verhält. Aus den Proportionen A : B = C : D

E : B = F : D

G : B = H : D

J : B = K : D kan man allezeit schliessen A + E + G + J : B = C + F + H + K : D, es mögen der angenommenen oder gegebenen Proportionen so viele seyn als man wil.

VI. Abschnitt.

§. 80. Es verstehet sich, ohne daß wir es erinnern, daß die Richtigkeit der Proportionen, aus welchen eine neue sol geschlossen werden, erst zu erweisen sey, ehe man aus denselben schliesset. Im nachfolgenden Falle ist nur von der ersten Proportion nothwendig, daß sie erwiesen werde, wenn man nemlich setzet,

A : B = C : D und

B : B = D : D, denn es ist die andere überall richtig: Hieraus aber folget, wie beständig, A + B : B = C + D : D. Und weil also diese Folge bey einer jeden Proportion gemacht werden kan, ohne etwas weiter zum Grunde zu setzen als daß dieselbe richtig sey: So kan man sagen, daß bey einer jeden Proportion A : B = C : D sich die Summe der zwey ersten Glieder A + B zu dem zweyten Gliede B verhalte, wie die Summe der zwey letzteren Glieder C + D, sich zu dem letzten Gliede D, verhält. So ist zum Exempel 3 : 2 = 6 : 4, folgends 3 + 2 : 2 = 6 + 4 : 4, oder 5 : 2 = 10 : 4.

§. 81. Wiederum wenn A : B = C : D, so kan man diese Proportion wiederholen, und so oft setzen, als man wil

A : B = C : D

A : B = C : D

A : B = C : D Hieraus folget wieder nach dem allgemeinen Satze A + A + A : B = C + C + C : D, das ist in unserm Falle 3A : B = 3C : D. Und weil man die Proportion so oft

VI. Abschnitt.

wiederholen kan als man will, oder so oft, als viele Einheiten in der Zahl, die wir uns unter dem Buchstaben n vorstellen, enthalten sind, so kan man überhaupt sagen, wenn $A : B = C : D$, so sey auch $nA : B = nC : D$. Das ist, wenn man das erste und das dritte Glied einer Proportion durch einerley ganze Zahl multipliciret, so wird dadurch die Proportion selbst nicht aufgehoben. Nemlich die Verhältniß $nA : B$ ist freylich grösser als die Verhältniß $A : B$, aber bey dem allen ist die Verhältniß $nA : B$ der Verhältniß $nC : D$ gleich, gleichwie die Verhältniß $A : B$ der Verhältniß $C : D$ gleich ist. Die Verhältniß $3 : 2$ ist der Verhältniß $6 : 4$ gleich; multipliciret man die ersten Glieder dieser Verhältnisse durch 4, so wird auch: $12 : 2 = 24 : 4$.

§. 82. Und da sich bey einer jeden Proportion die Glieder versetzen lassen, das zweyte in die Stelle des ersten, und das vierte in die Stelle des dritten VI, 72. so siehet man leicht, daß was von dem ersten und dritten Gliede einer Proportion erwiesen worden, auch von dem zweiten und vierten gelten müsse. Nemlich überhaupt, wenn man setzet:

$$B : A = D : C$$
$$B : E = D : F$$
$$B : G = D : H,$$ so ist auch $B : A + E + G = D : C + F + H$ VI, 79. Und in einer jeden Proportion $B : A = D : C$ ist $B : A + B = D ; D + C$ VI, 80. wie auch $B : nA = D : nC$ VI, 81.

§. 83. Setzet man aber die beyden letzteren Sätze zusammen und bemerket, daß in einer jeden Proportion man so wohl das erste und das dritte, als auch das zweyte und vierte Glied durch einerley Zahl multipliciren könne, ohne die Proportion aufzuheben; so folget auch, daß wenn man beides zugleich thut, und so wohl das erste und dritte, als auch das zweyte und vierte Glied einer Proportion, durch einerley Zahl multipliciret, die Proportion dennoch bleibe. Und wenn man also hat $A : B = C : D$, so ist allezeit $nA : mB = nC : mD$, was auch n und m vor Zahlen bedeuten mögen.

§. 84. Wenn die Proportion $A : B = C : D$ richtig ist, und man setzet zu einem dieser Glieder etwas hinzu, so groß oder so klein es auch seyn mag, welches wir E nennen wollen, so können die Verhältnisse $A : B$ und $C : D + E$ ohnmöglich gleich seyn. Denn dasjenige Glied, welchem etwas zugesetzet worden, ist nach Proportion zu groß,

groß, eben deswegen, weil die Proportion ohne diesen Zusatz richtig war. Wenn man nun die Glieder dieser verdorbenen Proportion eben so durch die Zahlen m und n multipliciret, wie wir in dem vorhergehenden Satze gethan, und schreibet $nA : mB$ und $nC : mD + mE$, so sind diese Verhältnisse wieder nicht gleich, weil die Proportion $nA : mB = nC : mD$ richtig ist, und dem vierten Gliede derselben mE zugesetzet worden. Und es folget hieraus, daß wenn zwey Verhältnisse ungleich sind, und man multipliciret ihre vorhergehende und nachfolgende Glieder durch einerley Zahlen n, m, ohnmöglich gleiche Verhältnisse kommen können. Denn man kan alle ungleiche Verhältnisse ansehen, als ob sie aus gleichen Verhältnissen entstanden wären, indem einem Gliede der gleichen Verhältnisse etwas zugesetzet worden.

§. 85. Hieraus aber folget, daß wenn die Proportion $A : B = C : D$ richtig ist, und man dividiret das erste und dritte Glied derselben durch einerley Zahl 3 oder n, oder das zweyte und vierte durch die Zahl 2 oder eine jede andere m, auch die Proportion $\frac{1}{3}A : \frac{1}{2}B = \frac{1}{3}C : \frac{1}{2}B$ richtig seyn werde. Denn man multiplicire wieder das erste und dritte Glied durch die Zahl 3 durch welche man sie vorher dividiret, und das zweyte und vierte durch die Zahl 2, nach welcher diese Glieder getheilet worden: so kommet $A : B = C : D$ wiederum, und man weiß zum voraus, daß die Proportion der Grössen, welche durch diese Multiplication entstanden sind, richtig sey, weil nemlich dieses eben die Proportion ist, die man zuerst angenommen. Da nun aber durch eine dergleichen Multiplication ohnmöglich eine richtige Proportion kommen kan, wenn nicht auch die Proportion richtig ist, deren Glieder dergestalt multipliciret worden sind VI, 83. so muß man schliessen, daß die Proportion $\frac{1}{3}A : \frac{1}{2}B = \frac{1}{3}C : \frac{1}{2}B$, oder überhaupt $\frac{1}{n}A \frac{1}{m}B = \frac{1}{n}C : \frac{1}{m}D$ allerdings richtig sey, wenn die Proportion $A : B = C : D$ richtig ist.

§. 86. Was wir VI, 74. von der Addition angezeiget, ist auch von der Subtraction richtig, und man kan dasjenige, was von dieser Art die Proportion zu ändern zu sagen ist, noch mit dem vorigen unter eine allgemeine Regel bringen. Wenn die Proportion $AC : CD = ac : cd$ richtig ist, aber auch diese: $AB : CD = ab : cd$, und die zweyten Glieder dieser Proportionen CD, cd sind wieder beiderseits einerley. Die ersten, und dritten wie auch die vierten aber sind verschieden; so ist auch diese Proportion richtig: $AC - AB : CD =$

F. 172.

ac

$ac - ab : cd$, oder $BC : CD = bc : cd$, deren erstere Glieder BC, bc nemlich der Unterschied sind der ersten Glieder der vorigen Proportionen AC, AB, und ac, ab, und bey welcher man die zweyten Glieder der vorigen Proportionen an ihren Stellen stehen lassen. So ist es bey den Zahlen:

$$5 : 4 = 15 : 12.$$

$$3 : 4 = 9 : 12,$$ die Proportion $5-3 : 4 = 15-9 : 12$, oder $2 : 4 = 6 : 12$ hat ihre Richtigkeit.

§. 87. Und der Beweiß bey solchen Zahlen oder Grössen, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind, ist mit dem vorigen, welchen wir bey der Addition gebrauchet, IV, 76. meist einerley. Es sey $nA : mA = nB : mB$, und $sA : mA = sB : mB$. Die Zahl aber, welche s bedeutet, sey kleiner als die Zahl n, und folgends $sA < nA$, und $sB < nB$, und man ziehe die kleineren Glieder von den grössern ab, so werden die Unterschiede $nA - sA$, und $nB - sB$, oder $n - s.A$, $n - s.B$. Man siehet aber leicht VI, 35. daß die Proportion $n - sA : mA = n - sB : mB$ richtig sey. Denn die nachfolgenden Glieder mA, mB bestehen aus der Zahl m der Theile A und B, und die vorhergehenden Glieder $nA - sA$, $nB - sB$ sind beide aus der Zahl $n - s$ eben dieser Theile A und B in gehöriger Ordnung zusammen gesetzet.

§. 88. Es ist aber auch der allgemeine Beweiß von dem vorigen gar wenig unterschieden. Weil die Verhältniß $AC : CD$ der Verhältniß $ac : cd$ gleich ist, so kan man sich vorstellen, daß AC und CD durch einerley gleichförmiges Wachsthum entstanden, wie auch ac und cd, und daß AC mit der ac und CD mit der cd zugleich erwachsen. Und weil auch $AB : CD = ab : cd$, so ist AB durch eben das Wachsthum entstanden, welches die CD und AC erzeuget, und ab durch dasjenige, mit welchem cd und ac angewachsen, und AB, ab sind zugleich entstanden. Da nun auch AC, ac zugleich entstanden sind, so ist auch BC mit der bc zugleich entstanden, und es ist also $BC : CD = bc : cd$, welches zu erweisen war.

§. 89. Man kan hieraus wieder schliessen, daß wenn man eine Proportion hat $A : B = C : D$ und die letztern Glieder der Verhältnisse B und D sind kleiner als die erstern, man auch werde sagen können $A - B : B = C - D : D$. Denn es ist allezeit $B : B = D : D$. Wenn man nun zum Grunde setzet $A : B = C : D$, und schliesset aus diesen beiden Verhältnissen, nach dem allgemeinen Satze VI, 88. so bekom-

bekommet man allerdings $A - B : B = C - D : D$. Es sey $6 : 2 = 12 : 4$, so ist nach dem Satz $6 - 2 : 2 = 12 - 4 : 4$, das ist $4 : 2 = 8 : 4$, und die Richtigkeit dieser Proportion ist leicht einzusehen.

VI Abschnitt.

§. 90. Versetzet man die Glieder dieser Verhältnisse, und schreibet $B : A = D : C$, und $B : A - B = D : C - D$ VI, 72. so bekommet man eine neue Regel, welche von der vorigen kaum unterschieden ist. Man kan sagen, wie das erste Glied einer Proportion B zu dem Unterschied des zweyten und des ersten $B - A$; so das dritte zu dem Unterschied des dritten und des vierten $D - C$. Man siehet leicht, daß man durch die Versetzung der Glieder auch noch andere Proportionen auf eben den Grund bauen könne. Weil aber dieses gar etwas leichtes ist, und in der Anwendung keine Schwierigkeit machet, so wollen wir uns dabey nicht aufhalten.

§. 91. Und weil also bey den Bedingungen, welche wir angenommen, weder die Addition noch die Subtraction der vorhergehenden Glieder der Verhältnisse die Proportion ändert, so folget, daß wenn man hat:

$$A : B = C : D, \text{ und}$$
$$E : B = G : D, \text{ und}$$
$$H : B = J : D, \text{ und so weiter wenn man will,}$$

und setzet sodann die erstern Glieder mit ihren Zeichen zusammen, oder subtrahiret einige der in zwo gleichen Verhältnissen vorhergehenden Glieder, als E und G, von der Summe der übrigen; es folget sage ich, daß auch die Proportion $A - E + H : B = C - G + J : D$ richtig seyn werde.

§. 92. Wir können noch eine Regel unter diese bringen, deren Beweiß von demjenigen, dessen wir uns bisher bedienet, nicht verschieden ist, und welche auch aus dem bereits erwiesenen folget. Es sey die Proportion $AC : CD = ac : cd$ richtig, und BC sey so groß als CD, wie auch $bc = cd$. So werden AC, CD durch einerley gleichförmiges Wachsthum erzeuget, wie auch ac, cd, und AC, ac, wie auch CD, cd entstehen zugleich. Demnach entstehen auch $BC = CD$, und $bc = cd$ zugleich, und folgends auch AB und ab, aber auch AD und ad. Und demnach ist die Proportion richtig $AD : AB = ad : ab$. Wil man aber die Glieder derselben aus den Gliedern der zum Grunde gelegeten Proportion $AC : CD = ac : cd$ ausdrücken, so ist $AD = AC + CD$, und $AB = AC - BC$, oder weil $BC = CD$, so ist

F. 172.

VI. Abschnitt.

ist $AB = AC - CD$. Eben so ist $ad = ac + cd$, und $ab = ac - cd$, und wenn man diese Benennungen an die Stelle der einfachen in der Proportion $AD : AB = ad : ab$ setzet, so bekommet man $AC + CD : AC - CD = ac + cd : ac - cd$. Diese Proportion lässet sich demnach allezeit aus der Proportion $AC : CD = ac : cd$ herleiten, und man kan bey einer jeden Proportion sagen, wie die Summe der ersten zwey Glieder, zu ihrem Unterschiede, so die Summe der zwey letzten Glieder zu ihrem Unterschiede, oder wenn man die Glieder versetzet, wie den Unterschied zur Summe, so der Unterschied zur Summe. Zum Exempel, man hat $7 : 3 = 14 : 6$, so ist $7 + 3 : 7 - 3 = 14 + 6 : 14 - 6$, das ist $10 : 4 = 20 : 8$.

§. 93. Von getheilten Grössen ist dieser Beweiß wieder gar leicht. Wenn man hat $nA : mA = nB : mB$, und man machet $nA + mA : nA - mA = nB + mB : nB - mB$, oder welches auf eines hinaus kommet $n + m . A : n - m . A = n + m . B : n - m . B$, so siehet man leicht daß das erste Glied, aus der Zahl $n + m$ der Theile A bestehe, und daß das dritte aus eben so vielen Theilen von der Grösse B zusammen gesetzet sey, wie auch daß das zweyte Glied die Zahl $n - m$ der Theile A, und das vierte eben die Zahl $n - m$ der Theile B enthalte. Es sind demnach die Glieder der beiden Verhältnisse $n + m . A : n - m . A$ und $n + m . B : n - m . B$ aus gleichen Theilen zusammen gesetzet, und die vorhergehenden Glieder derselben bestehen aus gleich vielen Theilen, wie auch die nachfolgenden. Demnach hat es mit der Gleichheit dieser Verhältnisse seine Richtigkeit VI, 35.

§. 94. Wir hätten auch diesen Satz auf eine allgemeinere Art ausdrucken können als wir gethan haben. Wir vermeiden dieses aber nach dem Exempel derjenigen, welche uns in diesen Wissenschaften vorgegangen sind, weil die Sätze von einem gar sehr weitläuftigen Inbegriffe nicht allezeit so sehr an Nutzbarkeit zunehmen, als schwer sie anzuwenden werden. Und wir erinnern dieses hier nur deswegen, damit unsere Leser nicht aufgehalten werden, wenn sie bey genauerer Ueberlegung finden, daß aus unseren Beweisen etwas allgemeineres fliesse, als wir aus denselben hergeleitet. Man darf nemlich nicht eben BC der CD gleich annehmen, wenn nur $BC : CD = bc : cd$, und ausser dem $AC : CD = ac, cd$, so ist auch $AD : AB = ad, ab$, das ist $AC + CD : AC - BC = ac + cd : ac - bc$.

§. 95. Wil man aber diese Regel, nach welcher man aus $A : B = C : D$ schliesset $A + B : A - B = C + D : C - D$ aus den bereits erwiesenen Regeln herleiten, so kan man also verfahren. Weil $A : B = C : D$, so ist $A + B : B = C + D : D$, VI, 80. und $A + B : 2B = C + D : 2D$, VI, 82. Nimmet man aber hier den Unterschied der Glieder der zwo Verhältnisse, und beziehet die vorhergehende Glieder auf denselben VI, 90. so erhält man $A + B : A + B - 2B = C + D : C + D - 2D$, das ist; $A + B : A - B = C + D : C - D$, und diese ist die Proportion, deren Richtigkeit wir erweisen solten.

Die dritte Regel.

§. 96. Die dritte Proportionsregel, nach unserer Einrichtung, ist nicht schwerer einzusehen, als die zweyte, wenn wir dieselbe auf dasjenige gründen, so gleichfals angemerket worden, indem wir den allgemeinen Begriff der Proportion anzugeben bemühet gewesen: daß nemlich, wenn man die zweyten Glieder zweyer gleichen Verhältnisse in gleich viele gleiche Theile theilet, und diese Theile fort träget, bis sie die ersteren Glieder der Verhältnisse übertreffen, die äusserste Gränzen dieser ersteren Glieder zwischen gleichnahmigte Theilungspuncte fallen müssen, und daß hinwiederum, wenn das letzte geschiehet, auf die Gleichheit der Verhältnisse zu schliessen sey VI, 57. Es sey die Verhältniß $AC : AB$ der Verhältniß $ac : ab$ gleich; man setze die ersten Glieder dieser Verhältniß zusammen, und mache $AC + ac$, man setze auch die zweyten Glieder eben dieser Verhältniß zusammen, und mache $AB + ab$. Die Verhältniß der ersten Summe gegen die letzte $AC + ac : AB + ab$ wird der Verhältniß $AC : AB$ oder der Verhältniß $ac : ab$ gleich seyn. Dieses ist unsere dritte Regel, welche aber noch etwas zu erweitern seyn wird, und wieder verschiedene besondere Regeln unter sich begreiffet. Man siehet leicht, daß hier AC und ac, und folgends auch AB und ab Grössen von einerley Art seyn müssen, weil sie sich sonst nicht zusammen setzen lassen.

F. 173. 174.

§. 97. Den Beweiß derselben einzusehen, theile man die zweyten Glieder der gleichen Verhältnisse $AC : AB$, und $ac : ab$, nemlich AB und ab in eine beliebige Zahl gleicher Theile, und wenn die ersten Glieder AC, ac grösser sind als die zweyten, wie in der 173 Figur, so trage man die Theilchen der AB, ab fort, bis man AD, ad erhalten, welche die AC, ac unmittelbar übertreffen: so fallen die Puncte C, c

VI. Abschnitt. zwischen solche Theilungs-puncte der AD, ad, welche von A, a an um eine gleiche Zahl von Theilchen entfernet sind. In der 173 Figur fället C, in das fünfte Theilchen der AD, und c in das fünfte Theilchen der ad und in der 174 Zeichnung liegt C so wol als c in dem dritten Theilchen, der AB oder ab, und dergleichen geschiehet immer, man mag der AB und der ab so viele Theilchen geben als man wil. Wenn dieses nicht wäre, so könten die Verhältnisse AC : AB, und ac : ab einander nicht gleich seyn VI, 57. Nun setze man erstlich AB und ab zusammen, aber, um die Sache, welche wir erweisen sollen, einzusehen, verfahre man in dieser Zusammensetzung auf eine besondere Art. Weil nemlich in AB so viele Theilchen sind als in ab, so setze man immer einen Theil der AB zu einem Theile der ab, und mache auf die Art wieder gleiche Theile, deren jedes die Summe ist eines Theilchens der AB und eines Theilchens der ab. Mit einem Worte, wenn die Zahl der Theilchen in AB und in ab durch m angedeutet wird, und folgends $\frac{1}{m}$ AB ein Theilchen der AB, und $\frac{1}{m}$ ab ein Theilchen der ab bedeutet, so mache man $\frac{1}{m}$ AB + $\frac{1}{m}$ ab zu einem der neuen Theilchen, und setze aus diesen Theilchen die Grösse EF zusammen, welche demnach alle Theilchen der AB, zusamt allen Theilchen der ab, enthalten, und in so viele gleiche Theile abgetheilet seyn wird, als viele der Theile in AB und ab sind. Nun trage man die übrigen Theilchen der AD, ad aus F auf eben die Art weiter fort, bis man EH erhält, welche aus den erwehnten Gründen so groß seyn wird als AD + ad. Folgends ist EH grösser als AC + ac, und wenn man EG so groß machet als AC + ac, so siehet man, daß das Punct in unserer 173 Figur ebenfals in das fünfte Theilgen der AH fället, wie C in das fünfte Theilchen der AD, und c in das fünfte Theilchen der ad gefallen. Man siehet dieses aller mit geometrischen Augen, wenn man alles, was hier gesaget worden überleget, aber noch deutlicher, wenn man sich selbst die Mühe giebet, die Linien nach dieser Anweisung zu theilen und zusammen zu setzen, und alles genau erweget, was bey dieser Arbeit vorkommet. Man übersiehet zugleich alle Fälle und machet den unstreitigen Schluß, daß dieses bey einer jeden Zahl der Theile der AB und ab richtig eintreffen müsse, und daß demnach, wenn man EF = AB + ab in so viele Theile theilet, als viele Theile man der AB oder der ab gegeben, und träget diese Theile bis in H fort, bis nemlich EH grösser wird als EG = AC + ac, das Punct G jederzeit zwischen die Theilungspuncte fallen müsse, welche denjenigen gleichnamig sind, zwischen welche C in AD,

und

und c in ad fället. Demnach ist die Verhältniß EG : EF, das ist AC + ac : AB + ab der Verhältniß AC : AB, oder der Verhältniß ac : ab gleich, welches wir erweisen solten.

§. 98. Wenn man diesem Beweise etwas nachdenket, so findet man bald, daß er sich auch vor die Subtraction schicke: wenigstens kan man dadurch auf die Gedanken kommen, daß wenn die Verhältniß EG : EF der Verhältniß AC : AB gleich ist, und man subtrahiret die kleineren Glieder dieser Verhältnisse von den grössern, in der Ordnung in welcher sie stehen, und machet EC — AC, und EF — AB, die Verhältniß dieser Ueberbleibseln EG — AC : EF — AB einer jeden der vorigen Verhältnisse EG : EF, und AC : AB, gleich seyn werde. Und so ist es auch, wie man finden wird, wenn man sich die Sache umständlich vorstellet.

§. 99. Denn man theile EF in eine beliebige Zahl gleicher Theile, und gebe der AB eben so viele Theile. Man setze die Theilchen der EF, wenn es nöthig ist, fort, bis man EH bekommet, welche unmittelbar grösser ist als EG, und eben dieses thue man auch bey AD; so haben EH und AD eine gleiche Zahl von Theilen, VI, 57. und die Puncte G und C fallen zwischen gleichnamigte Theilungspuncte. Wäre dieses nicht, so könte die Verhältniß EG : EF der Verhältniß AC : AB ohnmöglich gleich seyn. Nun subtrahire man einen jeden Theil der AB von einem jeden Theile der EF, welcher ihm nach der Ordnung zugesetzet worden, den ersten von dem ersten, den zweyten von dem zweyten, und so fort, und aus den gleichen Ueberbleibselen setze man die Grösse ab zusammen, welche demnach so viele gleiche Theile haben wird, als EF oder AB. Eben diese Grösse ab aber wird auch der Unterscheid seyn der beyden Grössen EF und AB, weil sie entstanden ist, indem man alle Theile der kleinern von allen Theilen der grössern abgezogen. Man fahre in dieser Arbeit weiter fort, (wenn nemlich wie in der 173 Figur EG grösser ist als EF, sonst hat man dieses nicht nöthig) und mache auf eben die Art ad = EH — AD, und ac = EG — AC, so siehet man wieder, daß ad so viele Theile bekommet als deren in EH oder AD anzutreffen, und daß c zwischen diejenige Theilungspuncte fället, welche von a um so viele Theilchen entfernet sind, als viele der Theilchen sind, um welche die Theilungspuncte zwischen welchen G lieget von E, oder die Theilungspuncte, zwischen welchen C lieget, von A entfernet sind. Demnach ist die Verhältniß ac : ab der Verhältniß AC : AB, oder der Verhältniß EG : EF gleich.

 Und

VI. Abschnitt. Und da nun $ac = EG - AC$, und $ab = EF - AB$, so ist allezeit die Verhältniß $EG - AC : EF - AB$ der Verhältniß $EG : EF$ oder $AC : AB$ gleich, wenn die erste dieser Verhältnisse $EG : EF$ der zwoten $AC : AB$, gleich ist.

§. 100. Man siehet leicht, daß diese Beweise, wie sie da stehen, ohne überflüssige Weitläuftigkeit, auch auf die Verhältniß solcher Grössen angewendet werden können, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind. In diesem Falle können die Puncte C und D, c und d, wie auch G und H zusammen fallen, das übrige aber bleibet einerley. Wil man sich etwas anders ausdrucken, so kan man den Beweiß von dergleichen Grössen auch folgender gestalt fassen. Die Verhältniß $nA : mA$ ist der Verhältniß $nB : mB$ gleich, und alle gleiche Verhältnisse solcher Grössen die aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind, lassen sich dergestalt ausdrucken. Man setze die ersteren wie auch die letzteren Glieder dieser Verhältnisse zusammen, und mache $nA + nB$, wie auch $mA + mB$. So siehet man daß $nA + nB$ so viel sey als $n . \overline{A + B}$, und heraus komme, wenn man die Summe der Theile $A + B$ durch die Zahl n multipliciret. Und eben so ist $mA + mB = m . \overline{A + B}$. Stellet man sich nun die Verhältniß $n . \overline{A + B} : m . \overline{A + B}$ vor, so siehet man ferner, daß dieselbe der Verhältniß $nA : mA$ oder $nB : mB$ gleich sey, weil in allen diesen Verhältnissen einerley Grösse A oder B, oder $A + B$ durch die Zahl n multipliciret worden, um das erste Glied zu erhalten, und durch m, wodurch das zweyte Glied heraus gekommen. VI, 35. Eben so siehet man, daß die Verhältniß $nA - nB : mA - mB$, das ist $n . \overline{A - B} : m . \overline{A - B}$ von der Verhältniß $nA : mA$, oder $nB : mB$ nicht verschieden sey.

§. 101. Zum Exempel: die Verhältniß $9 : 3$ ist der Verhältniß $6 : 2$ gleich. Addiret man die Glieder dieser Verhältnisse in der Ordnung, so kommet die Verhältniß $15 : 5$, von welcher leicht zu sehen ist, daß sie jeder der vorigen gleich sey; weil in allen diesen Verhältnissen das erste Glied dreymal so groß ist als das zweyte. Subtrahiret man aber die kleinern Glieder von den grössern; so kommt die Verhältniß $3 : 1$, welche ebenfals der gegebenen gleich ist.

§. 102. Also verändert weder die Addition der Glieder gleicher Verhältnisse, noch die Subtraction derselben, die Verhältniß. Es ist dieses genugsam erwiesen, wenn man nur zwo gleiche Verhältnisse annimmet. Daß es aber auch mit so vielen gleichen Verhältnissen angehe,

gehe, als man annehmen wil, siehet man daraus, weil, wenn die Verhältniß nicht verändert wird, wenn man die Glieder zwoer gleicher Verhältnisse dergestalt zusammen setzet, sie auch nicht verändert werden kan, wenn man die Glieder der dritten Verhältniß, welche den vorigen gleich ist, zu der Summe der Glieder setzet, welche dergestalt heraus gebracht worden sind. Eben dieses ist auch zu sagen, wenn man sich an statt der Addition der Subtraction bedienet. Die Sache wird am deutlichsten, wenn wir sie durch Zahlen erläutern. Es sey $6:3 = 4:2 = 8:4 = 14:7$. Setzet man die Glieder der ersten zwo gleichen Verhältnisse $6:3$ und $4:2$ zusammen, so kommet die Verhältniß $10:5$, welche von der ersten oder von der zwoten, und folgends auch von der dritten $8:4$ nicht verschieden ist. Und wenn man demnach die Glieder dieser dritten Verhältniß $8:4$ von den Gliedern der Verhältniß $10:5$, welche wir dergestalt heraus gebracht haben, abziehet, so kommet die Verhältniß $2:1$, welche noch der vorigen, und folgends auch der vierten Verhältniß $14:7$ gleich ist, deren Glieder sich demnach wieder zu den Gliedern dieser letzten Verhältniß addiren, oder von denselben subtrahiren lassen, ohne daß in der Verhältniß etwas geändert werde, und es sind demnach die Verhältnisse $16:8$ und $12:6$ noch mit einer jeden der gegebenen einerley.

§. 103. Eben so ist es auch, wenn man setzet, $A:a = B:b = C:c = D:d$, und machet $A+B+C+D : a+b+c+d$, oder $A-B+C-D : a-b+c-d$, oder verknüpfet sonst die ersten Glieder A, B, C, D mit den Zeichen $+$ und $-$ wie man wil, und giebet den letztern Gliedern eben dieser Verhältnisse a, b, c, d, welche zu den erstern gehören, eben die Zeichen. Es ist allezeit $A+B+C+D : a+b+c+d = A+B-C-D : a+b-c-d = A-B+C+D : a-b+c+d = A:a = B:b$, und so fort.

§. 104. Hieraus ist zu schliessen, daß, wenn man setzet, $A:a = A:a = A:a$, und so ferner, so oft als man wil, die Verhältniß $A+A : a+a$, oder $A+A+A : a+a+a$, das ist, $2A:2a$, oder $3A:3a$, oder $4A:4a$, und so überhaupt $nA:na$ von der Verhältniß $A:a$ nicht verschieden seyn werde. Es sind hier die Glieder der Verhältniß $A:a$ durch einerley ganze Zahl n multipliciret worden, und man kan demnach sagen, daß wenn man zwo Grössen A und a durch einerley ganze Zahl n multiplicirет, die Verhältniß der multiplicirten Grössen $nA:na$ mit der Verhältniß der Grössen selbst $A:a$ einerley seyn werde. So ist bey Zahlen die Verhältniß $3:2$ der Verhältniß $4\times3 : 4\times2$ oder

VI. Abschnitt.

oder 12 : 8 gleich. Wir haben dieses bereits bey der Multiplication gesehen, I, 101. denn wir haben gezeiget, daß 3 aus 2 eben so entstehe, wie das Product 3×4 oder 4×3 aus dem Producte 2×4 oder 4×2 entstehet.

§. 105. Hieraus aber schliesset man ferner, daß auch die Division zwoer Grössen A, B durch einerley ganze Zahl m die Verhältniß nicht ändern könne, sondern daß die Verhältniß A : B der Verhältniß $\frac{1}{m}A : \frac{1}{m}B$ gleich sey, was auch m vor eine ganze Zahl bedeutet. Denn man nehme die Verhältniß $\frac{1}{m}A : \frac{1}{m}B$ zuerst an, und multiplicire beyde Glieder derselben durch die Zahl m. Wir wissen schon, daß dadurch die Verhältniß nicht geändert werde, es kommet aber durch diese Multiplication nichts anders als A und B. Denn weil in $\frac{1}{m}A$ die Grösse A in Theilchen getheilet ist, deren Zahl m vorstellet, so kommet das ganze A wiederum, wenn man ein solches Theilchen so oft nimmet, als oft die Einheit in der Zahl m enthalten ist, das ist, wenn man $\frac{1}{m}A$ durch m multipliciret. Eben so ist es mit $\frac{1}{m}B$. Demnach ist $\frac{1}{m}A : \frac{1}{m}B = A : B$. Als $3 : 2 = 6 : 4$, da die erstern Zahlen kommen, wenn man die letztern durch 2 theilet. Dieses ist schon oben VI, 48. berühret worden, als wir gewiesen, wie man eine Verhältniß, die in Zahlen gegeben ist, durch die kleineste Zahlen ausdrucken sol, welche dieselbe ausdrucken können.

§. 106. Und hieraus folget weiter, daß auch die Verhältniß $\frac{n}{m}A : \frac{n}{m}B$ der Verhältniß A : B gleich seyn müsse. Denn es wird $\frac{n}{m}A$ aus A, wenn man A durch die Zahl n multipliciret, und das Product durch m dividiret; und eben so wird $\frac{n}{m}B$ aus B. Da nun aber weder die Multiplication noch die Division der Grössen A, B durch einerley Zahl die Verhältniß A : B ändert, so muß auch diese Verhältniß ungeändert bleiben, wenn man diese Grössen A, B beyde erstlich durch n multipliciret, und so dann das Product durch m dividiret. So ist es bey den Zahlen $\frac{2}{3}12$ ist $=8$, und $\frac{2}{3}9$ ist $=6$, und 12 verhält sich zu 9, wie 8 zu 6. Der Name der einen dieser Verhältnisse so wohl als der andern ist $\frac{4}{3}$.

Die

Die vierte Regel.

§. 107. Aus diesem letzten Satze schliessen wir nun die vierte Proportionsregel, welche ist, daß bey einer jeden Proportion man die zwey mittlern Glieder versetzen könne, das zweyte in die Stelle des dritten, und das dritte in die Stelle des zweyten, ohne die Proportion aufzuheben. Wenn die Proportion $A:B = C:D$ richtig ist, so ist auch allezeit diese Proportion richtig, $A:C = B:D$. Man siehet leicht, daß hier zum Grunde geleget werde, die Grössen A und C seyn von einerley Art. Wäre dieses nicht, so hätten sie gar keine Verhältniß gegen einander, VI, 23. und man könte also nicht im rechten und eigentlichen Verstande sagen, es verhalte sich A zur C, wie B zur D. Sind aber die Grössen A und C von einerley Art, so sind alle vier Grössen A, B, C, D von einerley Art. Denn A und B, wie auch C und D sind gewiß von einerley Art.

§. 108. Die Richtigkeit aber des Satzes erhellet folgender gestalt. Es sey $A:B = C:D$, so ist auch $A:B = \frac{n}{m}C : \frac{n}{m}D$, wie wir letztens VI, 106. gesehen haben. Nun haben wir oben angemerket, daß wenn das erste Glied einer Proportion grösser ist als das dritte, auch das zweyte grösser sey als das vierte, und daß wenn das erste Glied dem dritten gleich ist, auch das zweyte dem vierten gleich sey, und wenn das erste Glied kleiner ist als das dritte, auch das zweyte kleiner sey als das vierte. VI, 27. Und wenn demnach in dem gegenwärtigen Falle $A > = < \frac{n}{m}C$, so ist auch $B > = < \frac{n}{m}D$. Denn dieses bedeutet nichts anders als was wir eben mit Worten ausgedrucket. VI, 70. Wir haben aber auch VI, 61. gesehen, daß aus demjenigen, so wir eben durch Zeichen ausgedrucket, fliesse, daß die Proportion $A:C = B:D$ richtig sey. Wenn man nemlich einen beliebigen Bruch $\frac{n}{m}$ der Grössen C und D annehmen kan, und $\frac{n}{m}C$ ist grösser als A, wenn $\frac{n}{m}D$ grösser ist als B, oder $\frac{n}{m}C$ ist so groß als A, wenn $\frac{n}{m}D$ so groß ist als B, oder $\frac{n}{m}C$ ist kleiner als A, wenn $\frac{n}{m}D$ kleiner ist als B, so sind allezeit die Verhältnisse $A:C$ und $B:D$ einander gleich, und die Pro-

VI. Abschnitt.

portion $A:C=B:D$ hat ihre Richtigkeit. Und es muß demnach diese Versetzung der mittleren Glieder, durch welche aus der Proportion $A:B=C:D$ diese andere $A:C=B:D$ heraus gebracht wird, überall statt haben.

§. 109. Bey Zahlen und solchen Grössen die aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind, ist die Sache noch leichter einzusehen. Wie wir öfters gesehen, so kan $nA:mA=nB:mB$ eine jede solche Proportion ausdrucken. Versetzet man aber die mittleren Glieder, so bekommet man $nA:nB$ und $mA:mB$, da man denn leicht siehet, daß diese Verhältnisse gleich seyn. Denn die Verhältniß $nA:nB$ so wohl als die Verhältniß $mA:mB$ ist der Verhältniß $A:B$ gleich, wie ohne viele Worte sichtlich ist. VI, 104. Man hat $5:7=10:14$, also ist nach der Regel $5:10=7:14$, man siehet aber die Richtigkeit dieser Proportion auch vor sich ein.

§. 110. Dieses ist das meiste so wir von den Proportionen zum voraus setzen musten, ehe wir in unsern Geometrischen Betrachtungen weiter gehen konten. Es ist noch etwas von der Zusammensetzung der Verhältnisse übrig, welches wir aber an einen anderen Ort verspâren wollen, da wir es unmittelbar brauchen werden. Wir hoffen daß es so dann leichter werde einzusehen seyn, wenn man sich das gegenwärtig abgehandelte erst durch die Anwendung desselben recht wird bekant gemachet haben. Wir wollen nur noch, ehe wir uns wieder zur Geometrie wenden, die Aufgaben welche bey Proportionalzahlen vorkommen, auflösen. Der Grund dieser Auflösungen ist nachfolgender.

Zu zwo oder drey Proportionalzahlen, die dritte oder vierte zu finden.

§. 111. Alle Zahlen welche einerley Verhältniß gegen einander haben, lassen sich folgender gestalt ausdrucken, $nA:A=n.B:B$ und diese Zeichnung kan eine jede Proportion, die in Zahlen gegeben ist, bedeuten, es mögen die Zahlen ganz oder gebrochen seyn, nur muß es frey seyn, sich unter n eine ganze oder gebrochene Zahl vorzustellen. Denn es ist n der Name so wohl der ersten Verhältniß $n.A:A$, als auch der zwoten $n.B:B$, weil in beyden Verhältnissen die ersten Glieder $n.A$, $n.B$ durch die Multiplication der zweyten in die Zahl n entstanden sind. VI, 33. Man nehme also $n.A:A=n.B:B$ vor eine jede dergleichen Proportion an, und stelle sich vor, daß man die äusseren Glie-

Glieder derselben so wohl als die mittleren in einander multipliciren wolle, um zu sehen was dadurch vor Producte kommen. Man multiplicire erstlich das erste Glied $n.A$ durch das vierte B. Da das erste Glied ein Product ist aus dem Namen der Verhältniß n und aus A, so wird das Product aus dem ersten und letzten Gliede $n.A \times B$ aus dem Namen der Verhältniß aus A und aus B bestehen, oder diese drey Zahlen werden durch ihre Multiplication das erwehnete Product der äusseren Glieder der Proportion heraus bringen. Man multiplicire auch das zweyte Glied in das dritte, und mache $n.B \times A$, so siehet man, daß dieses Product zu erhalten, ebenfals das Product $B \times A$ durch den Namen der Verhältniß n müsse multipliciret werden wie vorher. Und da also beyde Producte durch die Multiplication des Namens der Verhältniß n in das Product $A \times B$ entstehen, so kan man nicht anders schliessen, als daß das Product aus den äusseren Gliedern einer Proportion, dem Producte der mittleren gleich sey. Es sey die Proportion in Zahlen $5:2 = 10:4$, so ist das Product der äusseren Glieder $5 \times 4 = 20$, und eben so viel beträget auch das Product der mittleren 2×10. Eben so ist es auch bey dieser Proportion $7:5 = 3:2\frac{1}{7}$. Das Product der mittleren Glieder 3×5 ist $= 15$, und das Product der äusseren ist $14\frac{7}{7} = 15$. Der Name der Verhältniß ist hier $\frac{7}{5}$, und also ist das erste Glied $\frac{7}{5} \times 5$, und das dritte $\frac{7}{5} \times 2\frac{1}{7}$, das ist $\frac{7}{5} \times \frac{15}{7}$. Und die Proportion stehet so: $\frac{7}{5} \times 5 : 5 = \frac{7}{5} \times \frac{15}{7} : \frac{15}{7}$. Demnach ist das Product der äusseren Glieder $\frac{7}{5} \times 5 \times \frac{15}{7}$, das ist $\frac{7 \times 5 \times 15}{7 \times 5}$, und das Product der mittleren Glieder ist $5 \times \frac{7}{5} \times \frac{15}{7}$, das ist wieder $\frac{7 \times 5 \times 15}{7 \times 5}$, das eine so wohl als das andere giebet 15.

§. 112. Gehet die Proportion in einem fort, und ist also das zweyte Glied derselben dem dritten gleich, VI, 55. so wird das Product der mittlern Glieder eine Quadratzahl. Das übrige bleibet; das Product der äussern Glieder ist dem Product der mittleren auch hier gleich, und folgends ist dasselbe ebenfals eine Quadratzahl. Zum Exempel bey der Proportion, welche die erwehnte Beschaffenheit hat $5:7 = 7:9\frac{4}{5}$ ist das Product der mittlern Glieder die Quadratzahl 49, und eben so groß ist auch das Product der äussern $45\frac{20}{5} = 49$.

§. 113. Wenn nun aufgegeben wird, zu dreyen gegebenen Zahlen die vierte zu finden, welche die Proportion voll machet, dergestalt, daß

 man

VI. Abschnitt.

man sagen kan, wie die erste der gegebenen Zahlen zu der zwoten, so die dritte zu derjenigen, welche gefunden werden sol: so kan man ohne sonderliche Schwierigkeit aus denjenigen, so eben gezeiget worden, die Weise dieses zu verrichten, herleiten. Man kan sich vorstellen, daß die drey Zahlen, welche gegeben sind durch nA, A, nB ausgedrucket werden, und die vierte welche gesuchet wird durch B. Denn da alle Proportionen in Zahlen sich dergestalt ausdrucken lassen, so kan diejenige deren drey erste Glieder gegeben sind und deren viertes Glied gesuchet wird, hievon nicht ausgenommen seyn. Also ist bloß zu untersuchen wie in der Proportion $n.A : A = n.B : B$. aus den drey erstern Gliedern das vierte könne gefunden werden. Man siehet aber dazu verschiedene Regeln aus dieser Bezeichnung ein, welche alle in der Anwendung auf eines hinaus kommen. Aus den zwey ersten Gliedern nA, A findet man den Namen der Verhältniß n, wenn man das erste Glied nA durch das zweyte A dividiret. Mit dieser Zahl n dividire man nun ferner das dritte Glied $n.B$, so bekommet man das vierte, B. Als es seyn die drey Zahlen gegeben 8, 4, 12, zu welchen die vierte Proportionalzahl zu finden ist: so dividire ich 8 durch 4, der Quotient ist $2 = n$. Mit diesem n dividire ich nun ferner die dritte gegebene Zahl 12, so ist der Quotient 6, und die Proportion ist richtig $8 : 4 = 12 : 6$.

§. 114. Diese Regel scheinet von derjenigen, welche gemeiniglich gegeben wird sehr verschieden zu seyn: sie kommet aber in der Anwendung mit derselben auf eins hinaus. Es seyn die Zahlen 5, 2, 7 gegeben, zu welchen die vierte Proportionalzahl zu finden ist. Nach der Regel ist die erste dieser Zahlen durch die zweyte zu dividiren. Der Quotient wird $\frac{5}{2}$, und auf die Art kan man sich denselben allezeit vorstellen. Nunmehro ist ferner mit diesem Quotienten die dritte Zahl 7 zu dividiren, und dadurch wird die vierte Proportionalzahl erhalten, welche man suchet. Wil man dieses thun so kan man nur die Glieder des Bruchs $\frac{5}{2}$ durch welchen die Zahl 7 dividiret werden sol, verkehret setzen, den Nenner an die Stelle des Zehlers, und den Zehler an die Stelle des Nenners, also $\frac{2}{5}$, und mit diesem Bruche die Zahl 7 multiplieiren. II, 43. Das Product $\frac{2 \times 7}{5}$ welches auf die Art erhalten wird, ist der gesuchte Quotient, und folgends die gesuchte vierte Proportionalzahl, und so kan man allezeit verfahren. Gleichwie die vierte Proportionalzahl zu den dreyen 5, 2, 7 ist $= \frac{2 \times 7}{5}$, so ist über-

überhaupt, wenn man sich drey gegebene Zahlen unter den Buchstaben A, B, C, vorstellet, die vierte, welche die Proportion voll machet, $= \frac{B \times C}{A}$, oder bey einer jeden Proportion $A : B = C : D$ ist $D = \frac{B \times C}{A}$.

VI. Abschnitt.

§. 115. Und es wird demnach die vierte Proportionalzahl auch aus den drey ersteren heraus gebracht, wenn man die zwo mittlern, die zwote nemlich B und die dritte C, in einander multipliciret, und das Product derselben $B \times C$ durch die erste Zahl A dividiret. Dieses ist die gemeine Regel, deren Richtigkeit man auch anders einsehen kan.

§. 116. Es seyn die Zahlen 5, 2, 7 nochmals gegeben, und zu denselben die vierte Proportionalzahl zu finden. Wir wollen diese Zahl z nennen, welche also von der Grösse seyn muß, daß dieser Ausdruck $5 : 2 = 7 : z$ der Wahrheit gemäß sey. Ist aber dieses, so muß auch das Product der äusseren zwey Glieder 5 und z, dem Producte der mittlern 2 und 7 gleich seyn. Das ist $2 \times 7 = 5 \times z$. VI, 111. Man hat also, nicht zwar die gesuchte Zahl z ins besondere, sondern ein Product welches aus derselben entstanden ist, indem sie durch eine bekante Zahl multipliciret worden, und man weiß in dem vorgelegeten Beyspiele, daß 2×7 oder 14 so groß sey als die annoch unbekante Zahl z fünfmal genommen. Ist es nun schwer die Zahl z zu finden, da man weiß wie viel sie fünfmal genommen beträget? Man siehet leicht, daß dieses zu erhalten, man bloß $5 \times z$ oder 14 durch 5 dividiren dörfe. Dadurch wird $z = \frac{14}{5}$, das ist $\frac{2 \times 7}{5}$ wie vorhero. Und so ist es allezeit. Wenn zu den drey Zahlen A, B und C die vierte D zu finden, welche die Proportion $A : B = C : D$ voll mache, so sind die Producte $A \times D = B \times C$ nothwendig gleich, und es ist also das Product $A \times D$ bekant, denn $B \times C$ ist bekant, weil die Zahlen B und C bekant sind, und aus denselben das Product leicht zu machen ist. Ueber dieses aber ist auch der eine Factor A des Products $A \times D$ bekant. Wenn aber bey einem bekanten Producte $A \times D = B \times C$, ein Factor A bekant ist, so findet man den andern Factor D leicht, wenn man das Product durch den bekanten Factor A dividiret, dadurch kommet der andere Factor D, und wird der Quotiente. Und demnach ist $D = \frac{B \times C}{A}$.

§. 117. Es bedeutet also $\frac{B \times C}{A}$ allezeit die vierte Proportionalzahl zu

VI. Abschnitt.

den dreyen A, B und C, und man kan, wie auch gemeiniglich geschlehet, eben so eine jede vierte Proportionalgrösse zu drey gegeben Grössen A, B und C bezeichnen, ob zwar diese Grössen keine Zahlen sind. Es seyen A, B und C Linien, so ist zwar wahr, daß man nicht eigentlich sagen kan, man müsse die Linie B durch die Linie C multipliciren, und durch die Linie A dividiren, um eine neue Linie $\frac{B \times C}{A} = D$ zu erhalten, welche mit den drey ersteren die Proportion $A:B = C:D$ voll machen wird; wenigstens können wir bey diesen Redensarten keinen rechten Verstand haben, da wir sie bloß in arithmetischem Verstande gebrauchen, ob sie sich zwar dergestalt erklären lassen, daß sie nichts widersinnisches enthalten. Allein dieses hindert nicht, daß wir nicht die vierte Proportionallinie zu A, B und C mit $\frac{B \times C}{A}$ bezeichnen solten. Denn dergleichen Zeichen sind eigentlich ganz willkührlich; man thut aber allezeit wohl, wenn man so viel möglich eine vollkommene Uebereinstimmung bey denselben beobachtet.

§. 118. Es wird aber durch diese Regel nicht nur diejenige vierte Proportionalzahl zu drey gegebenen gefunden, welche würklich in der Ordnung die vierte ist: sondern man kan nach derselben überhaupt aus jeden drey Zahlen einer Proportion, der ersten zum Exempel, der dritten und der vierten, die noch übrige finden, welche hier die zwote ist. Denn man kan die Glieder der Proportion allezeit so versetzen, daß die gesuchte Zahl die vierte werde. Man stelle sich die Proportion vor $5:z = 3:4$. Die zwote Zahl an deren Stelle z stehet, ist unbekant, und sol gefunden werden. Man setze $3:4 = 5:z$, und mache nach der Regel $z = \frac{4 \times 5}{3} = 6\frac{2}{3}$, so ist $5:6\frac{2}{3} = 3:4$. Man nehme eine andere Proportion, $z:3 = 7:4$ bey welcher die erste Zahl unbekant ist, und gefunden werden sol: so kan man wieder versetzen $4:7 = 3:z$, wodurch die gesuchte Zahl z in der Ordnung die vierte wird, und demnach wird $z = \frac{7 \times 3}{4} = 5\frac{1}{4}$, und die Proportion $5\frac{1}{4}:3 = 7:4$ ist voll und richtig. Es sey drittens $3:5 = z:2$, so versetze man die Glieder der Verhältniß wieder, und mache $5:3 = 2:z$, so ist $z = \frac{3 \times 2}{5} = 1\frac{1}{5}$, und demnach $3:5 = 1\frac{1}{5}:2$.

§. 119. Auf eben diese Art wird auch zu zwo gegebenen Zahlen die dritte Proportionalzahl gefunden, wenn nemlich die Proportion in einem fort gehet und stetig oder zusammenhangend ist. Man siehet dieses leicht. Es sey $2:5=5:z$, so hat man, die z zu finden, bloß wie sonst überall, die zwote Zahl in die dritte zu multipliciren. Das Product wird hier eine Quadratzahl, welches aber in dem übrigen nichts ändert. Demnach bedeutet $\frac{B \times B}{A} = C$ nichts anders, als daß C die dritte Proportionalzahl zu den zwoen A und B sey, und daß die Proportion $A:B=B:C$ ihre Richtigkeit habe. Eben diese Zeichnung kan die dritte Proportionallinie zu zwo Linien A und B, und überhaupt eine jede Grösse C bedeuten, welche mit den zwo A und B die Proportion $A:B=B:C$ voll machet.

§. 120. Die Weise aber aus den zwey äusseren Gliedern einer solchen Proportion A und C das mittlere Glied B zu finden, stellet man sich folgender gestalt vor. Wenn man die äussern Glieder A und C in einander multipliciret, so wird das Product $A \times C$ die Quadratzahl des mittleren Gliedes B, VI, 112. und also ist B die Quadratwurzel dieses Products, und man hat also, wenn man das mittlere Glied aus den äusseren finden wil, nur diese äusseren Glieder in einander zu multipliciren, und aus ihrem Product $A \times C$ die Quadratwurzel zu ziehen. Diese ist das mittlere Glied B. Zum Exempel, man stellet sich die Proportion $3:z=z:27$ vor, und z sey zu finden, so mache man $3 \times 27 = 81$, und nehme die Quadratwurzel von 81, dieses ist 9 und $=z$. Demnach ist die Proportion welche man ergänzen solte: $3:9=9:27$.

§. 121. Man siehet nach einer kleinen Ueberlegung, daß man nicht immer das mittlere Glied genau werde schaffen können, weil nicht eine jede Zahl eine Quadratwurzel hat, welche ausgesprochen werden könte. III, 40. In diesem Falle muß man sich begnügen, daß man sich der mittleren Proportionalzahl so viel als nöthig ist, nähere, welches eben so geschiehet, wie man einer unaussprechlichen Quadratwurzel nach und nach näher kommet. III, 50. Es sey zwischen den Zahlen 2 und 10 die mittlere Proportionalzahl zu setzen, so ist das Product dieser Zahlen 20. Die Wurzel von 20 fänget sich an mit 4, 47, und eben diese Zahl ist auch der mittlern Proportionalzahl zwischen 2 und 10 ziemlich nahe.

Sie-

VII. Abschnitt.

Siebender Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

Die Gründe dieser Lehre.

§. 1.

Man saget, daß zwo Figuren einander ähnlich sind, wenn die Winkel derselben einander gleich sind wie sie in der Ordnung auf einander folgen, und die Seiten, welche die gleiche Winkel dergestalt einschliessen, daß sie auch zwischen den Spitzen gleicher Winkel liegen, gegen einander einerley Verhältniß haben. Oder deutlicher, wenn in den beyden Vierecken ABCD, abcd, der Winkel A dem Winkel a gleich ist, und B dem b, C dem c, D dem d, und wenn über dieses sich AB zur AD so verhält, wie ab zur ad, und eben diese Gleichheit der Verhältniß bey allen übrigen Seiten vorkommet, welche die gleichen Winkel einschliessen, so daß auch AB : BC = ab : bc, und BC : CD = bc : cd und so ferner; so werden die Figuren einander ähnlich genannt.

F. 175.

§. 2. Dieses ist der gemeine Begrif von der Aehnlichkeit, wie man dieselbe bey cörperlichen oder andern ausgedehneten Dingen antrift; man wendet aber bey solchen Dingen den Begrf der Aehnlichkeit in dem allereigentlichsten Verstande an. Sollen zwey Portraite, deren eines, wenn man wil, groß, das andere klein gezeichnet ist, einander ähnlich seyn, so müssen alle Linien in beyden Gemählden auf einerley Art liegen, und einerley Verhältniß gegen einander haben. So bald dieses ist, so sind die Gemählde einander ähnlich, und weiter wird zur Aehnlichkeit nichts erforderet. Man siehet aber, daß die gleichen Lagen der Linien in den Gemählden gleiche Winkel ausmachen, und ist also der Begrif, welchen man gemeiniglich von der Aehnlichkeit hat, mit dem geometrischen vollkommen einerley.

§. 3. Man kan aber dasjenige, so wir von der Proportion der Seiten bey ähnlichen Figuren gesaget haben, auch so verstehen, daß

sich

sich eine jede Seite der ersteren Figur, zu der Seite der zwoten, welche in dieser Figur zwischen Winkeln lieget, die denjenigen gleich sind, zwischen welchen die erstere Seite lieget, verhalte, wie eine jede andere dergleichen Seite der ersten Figur zu einer dergleichen Seite der andern. Denn dieses fliesset aus dem ersteren, und aus diesem fliesset wieder das erstere. Setzet man AD : AB = ad : ab, und

AB : BC = ab : bc, wie auch
BC : CD = bc : cd, und
CD : DA = cd : da, so erhält man, wenn man die Glieder dieser Verhältnisse wechselt, wie allezeit geschehen kan, VI, 103.

AD : ad = AB : ab, und
AB : ab = BC : bc, wie auch
BC : bc = CD : cd, und
CD : cd = AD : ad, und man siehet, daß diese Verhältnisse alle einander gleich sind. Denn die erste AD : ad ist gleich der zwoten AB : ab, und diese ist gleich der dritten BC : bc, und so fort. Man siehet aber auch, daß wenn man diese letztere Proportionen als richtig angenommen hätte, man aus denselben leicht und durch die blosse Verwechselung, die ersteren hätte heraus bringen können.

§. 4. Und hieraus folget ferner, daß in allen ähnlichen Figuren sich die ganzen Umkreise gegen einander verhalten, wie sich jede zwo Seiten derselben die zwischen gleichen Winkeln liegen gegen einander verhalten, und daß demnach in den zwo Figuren, deren wir uns hier bedienen, welche einander ähnlich zu seyn gesetzet werden, sich der Umkreis ABCDA zu dem Umkreise abcda verhalte, wie AB zur ab, oder wie BC : bc. Denn wir haben eben gesehen, daß die Verhältnisse

AB : ab
BC : bc
CD : cd
DA : da einerley seyn. Wenn man nun die Summe aller ersteren und aller letzteren Glieder derselben machet, so wird die Verhältniß dadurch nicht geändert, VI, 103. sondern diese Summen verhalten sich gegen einander eben so, wie sich jede zwo Linien, die einander entgegen stehen, gegen einander verhalten, das ist, die erste Summe verhält sich zu der zwoten wie AB : ab, oder wie BC : bc und so ferner. Nun ist die erste Summe AB + BC + CD + DA nichts anders als der Umkreis ABCDA, und die zwote Summe ab + bc + cd

VII. Abschnitt. +da ist der Umkreis der zwoten Figur abcda. Derohalben verhält sich der Umkreis ABCDA zu dem Umkreise abcda, wie AB:ab, oder wie BC zur bc, und so fort. Eben dieses ist auch von solchen Theilen der Umkreise richtig, welche sich in den beyden Figuren mit den Spitzen gleicher Winkel anfangen und endigen: wie man leicht siehet.

§. 5. Es sind alle reguläre Figuren einander ähnlich, die einerley Zahl der Seiten haben. Das ist, ein jedes gleichseitiges Dreyeck ist einem jeden andern gleichseitigen Dreyecke ähnlich; ein jedes Quadrat einem jeden anderen Quadrate, ein jedes reguläres Fünfeck einem jeden anderen regulären Fünfecke, und so fort. Wir wollen, um dieses vollkommen einzusehen, uns zwey Quadrate vorstellen, und dieselbe etwas genauer erwegen, wodurch das übrige alles deutlich werden wird. Es ist ein jeder Winkel des einen Quadrats einem jeden des andern gleich, denn die Winkel der Quadrate sind alle gerade. Und wie sich zwo Seiten gegen einander verhalten, die einen Winkel in einem Quadrate einschliessen, so verhalten sich auch zwo Seiten gegen einander, die den Winkel des andern Quadrats einschliessen. Denn diese letzteren Seiten sind einander so wohl gleich als die ersteren. Derowegen sind jede zwey Quadrate einander ähnlich. Man kan aber dergleichen Schlüsse bey allen regulären Figuren anbringen. Es sind zwar die Winkel derselben nicht gerade, aber sie sind doch einander allezeit gleich, in was Ordnung man sie auch nehmen wil, und die Seiten welche einen Winkel in einer dieser Figur einschliessen, sind den Seiten, welche einem Winkel in einer andern regulären Figur, die eben so viele Winkel hat als jene, proportional, weil jene so wohl als diese einander gleich sind.

§. 6. Dieses ist es so wir uns gleich Anfangs überhaupt von allen ähnlichen Figuren vorstellen können, da wir kein anderes Kennzeichen der Aehnlichkeit hatten, als die Gleichheit aller Winkel der Figuren, und die gleiche Verhältniß aller Seiten, welche zwischen den gleichen Winkeln liegen. Wenn man die Figuren ins besondere betrachtet, so kan man auch aus wenigern dieser Gründe die Aehnlichkeit schliessen, weil einige derselben in den andern liegen, und sobald zum Exempel die Gleichheit der Winkel statt hat, die gleiche Verhältniß der Seiten nothwendig da ist. Wir haben nunmehro zu betrachten, auf was Art und Weise diese Dinge von einander bey den Figuren abhangen. Wir fangen billig wieder von den einfachesten Figuren,

das

das ist, von den Dreyecken an: aus demjenigen so von diesen erwiesen werden kan, folget das Uebrige alles.

§. 7. Ehe wir uns aber zu denselben wenden, müssen wir vor allen Dingen, um ein Kennzeichen bekümmert seyn, aus welchem wir die gleiche Verhältniß der geraden Linien schliessen können, welches sich unmittelbar anwenden lässet, und dieses lieget im folgenden allgemeinen Satze. Wenn man in der geraden Linie AB das Punct C nach Belieben annimmet, und ziehet durch die Puncte A, B und C die geraden Linien AD, CE und BF einander parallel, welche sich gegen die AB neigen können wie man wil, und mit derselben Winkel von beliebiger Grösse einschliessen, und man ziehet so dann von einer der äussersten dieser Parallellinien AD an die andere BF die gerade Linie ab ebenfals nach Belieben, welche von der CE in c geschnitten wird, so wird die Verhältniß AC : AB der Verhältniß ac : ab gleich seyn, und die Proportion AC : AB = ac : ab wird ihre Richtigkeit haben. F. 176. 177. 178. 179.

§. 8. Dieser Satz wird gar leicht eingesehen. Man theile AB in eine beliebige Zahl gleicher Theile, und bezeichne die Theilungspuncte mit G, H, I, K, durch alle diese Theilungspuncte ziehe man gerade Linien mit der AD parallel, welche folgends auch der CE und der BF parallel lauffen, und weder einander noch eine von den Linien CE, BF jemals schneiden werden. IV, 191. Es theilen aber eben diese Parallellinien auch die Linie ab in gleiche Theile in den Puncten g, h, i, k, wie wir in der Abhandlung von den Parallellinien IV, 196. gezeiget haben, und demnach ist ab in so viele gleiche Theile getheilet, als viele gleiche Theile man der AB gegeben hat. Es fället aber auch das Punct c in der ab zwischen die Theilungspuncte h, i, welche den Theilungspuncten H, I in der Linie AB in der Ordnung gegen über stehen, und das Theilchen hi ist von dem Puncte a um so viele Theilchen der ab entfernet, als viele der Theilchen der AB sind, um welche das Theilchen HI, in welches C fället, von A entfernet ist. Wäre dieses nicht, so müsten die Parallellinien, welche wir gezogen, einander irgendwo kreutzen, damit das Punct c über h hinauf oder unter i herunter käme, indem C zwischen H, I liegen bleibet, welches ohnmöglich ist. Man siehet also, daß den Linien AC, AB und ac, ab das Kennzeichen zukommet, woraus die Gleichheit der Verhältnisse allezeit geschlossen werden kan. VI, 60. Denn daß dasjenige, so wir von einer Theilung der AB gezeiget, richtig sey, man mag AB in so viele gleiche Theile theilen als man wil, erhellet aus dem Beweise, welchen wir gegeben haben, so gleich. Derselbe ist nicht

VII. Abschnitt.

auf eine gewisse Zahl von Theilen eingeschränket, sondern gilt von einer jeden Theilung der AB.

§. 9. Aus eben dem Beweise siehet man auch, daß die nachstehende Proportionen: AB : AC = ab : ac,
AC : CB = ac : cb,
CB : AB = cb : ab alle richtig sind, wie wohl dieselben auch aus dem vorigen durch die Proportionsregeln leicht hergeleitet werden können. Denn ist AC : AB = ac : ab, so ist auch umgekehret VI, 72. AB : AC = ab : ac. Aus dieser Proportion, AB : AC = ab : ac fliesset, VI, 89. AB—AC : AC = ab—ac : ac, das ist CB : AC = cb : ac, welche, wenn man sie verkehrt setzet, die Proportion AC : CB = ac : cb giebet. Eben die Proportion AB : AC = ab : ac giebet auch VI, 90. AB : AB—AC = ab : ab—ac, das ist AB : CB = ab : cb, oder CB : AB = cb : ab. Man kan aber auch diese Proportionen alle in einen allgemeinen Satz verfassen, wenn man saget, daß diejenigen Theile der Linie AB, welche zwischen den Parallellinien AD, CE, BF auf gewisse Art liegen, und die Theile der Linie ab die zwischen eben den Parallellinien auf eben die Art liegen, einerley Verhältniß gegen einander haben. Man muß aber unter den Theilen der AB auch AB selbst verstehen, und unter den Theilen der ab, die ab selbst. Die Beschaffenheit der Sprache zwinget uns öfters auf die Art zu reden. Es liegen aber zum Exempel BC und AB zwischen den Parallellinien AD, CE, BF auf eben die Art wie bc und ab zwischen eben diesen Parallellinien liegen: also ist die Proportion BC : AB = bc : ab richtig.

§. 10. Man siehet leicht, daß man auch sagen könne, AC : ac = AB : ab, und AC : ac = CB : cb, wenn man nemlich die mittleren Glieder der Proportion verwechselt, wie allezeit geschehen kan. VI, 107. Denn dieses ist eine von den gegebenen Proportionsregeln.

§. 11. Wenn die zwo gerade Linien AB, ab so gezogen sind, daß sie einander schneiden, oder in einem Puncte zusammen stossen, und eine der drey Parallellinien AD, CE, FB gehet durch dieses Punct wie bey der 178 und 179 Figur: so ist diese Parallellinie in der That unnütze, denn sie bezeichnet keine andere Puncte, als sie bezeichnen würde, wenn sie weg wäre, und man brauchet demnach in diesem Falle nur zwo Parallellinien, so daß man nachfolgenden Satz aus unserem allgemeinen formiren kan: Wenn zwo gerade Linien AB und

ab

ab in dem Puncte A oder C zusammen kommen, oder einander schneiden, und man ziehet nach Belieben zwo Parallellinien CE, BF in der 178 Figur, oder AD, BF in der 179, welche die erst genannte Linien in C, c, B, b, oder A, a, B, b schneiden, so ist AC: AB = ac: ab, und das übrige so wir in den vorhergehenden Sätzen angegeben.

§. 12. In der 178 Figur ist ABb ein Dreyeck und mit der Seite Bb desselben die Linie Cc parallel gezogen. Man kan demnach sagen: wenn man in einem Dreyecke ABb mit einer Seite Bb eine andere gerade Linie Cc parallel ziehet, so erlange man allezeit die Proportion. AC: AB = ac: ab, und die übrigen, welche angegeben worden. Und dieses ist der Satz, von welchem man gemeiniglich die gegenwärtige Lehre anzufangen, und aus welchem man das übrige, so wir gleich Anfangs zugleich erwiesen, herzuleiten pfleget.

§. 13. Hieraus kan man nun eine Anweisung ziehen, zu drey gegebenen geraden Linien die vierte Proportionallinie zu finden, welche pur geometrisch ist, und mit Zahlen gar nichts zu schaffen hat. Es seyen die gegebenen drey Linien ab, bc, und ad, zu welchen man die vierte Proportionallinie finden sol, so ziehe man eine gerade Linie von genugsamer Länge, und bringe auf dieselbe AB = ab, und ferner BC = bc, ziehe so dann von A noch eine andere gerade Linie, welche mit der vorigen einen Winkel machet, von was Grösse man wil, und trage auf diese Linie aus A die dritte der gegebenen Linien AD = ad; so dann ziehe man B und D mit der geraden Linie BD zusammen, und durch C ziehe man eine andere gerade Linie der BD parallel, welche die verlängerte AD in E schneide: so ist DE die gesuchte vierte Proportionallinie. Denn es verhält sich allerdings vermöge des eben erwiesenen Satzes AB: BC wie AD: DE, das ist ab: bc wie ad: DE. *F. 180.*

§. 14. Man hätte auch die zwote der gegebenen Linien aus A anfangen können, aber in diesem Falle hätte man den Anfang der vierten ebenfals in A nehmen müssen. Gesetzt es wäre zu den Linien AB, AC, und AD die vierte Proportionallinie zu suchen gewesen, so hätte man dieselbe setzen können, wie die Figur ausweiset. Die Linie CE, so auch hier der BD parallel zu ziehen, würde das Ende E der vierten Proportionallinie AE, bezeichnet haben. Denn es ist auch AB : AC = AD : AE.

VII. Abschnitt.

§. 15. Wäre die zwote Linie bc der dritten ad gleich gegeben worden, so hätte man die vierte Proportionallinie auch eben nach der Anweisung finden können, ohne die geringste Aenderung. In diesem Falle gehet die Proportion ab: bc = ad: DE, oder AB: BC = AD: DE in einem fort, weil die zwey mittlere Glieder BC, AD einerley Grösse haben, und man also sagen kan AB: BC = BC: DE: Es wird also zu einer solchen Proportion das dritte Glied eben so gefunden, wie zu einer andern, deren mittlere Glieder verschieden sind, das vierte Glied gefunden wird.

§. 16. Weil $\frac{B \times C}{A}$ überhaupt die vierte Proportional-Grösse ausdrücket, zu den dreyen gegebenen Grössen A. B und C VI, 117. so folget, daß wenn A die Linie ab, oder AB, B die Linie bc, oder BC und C die Linie ad oder AD bedeutet, so dann $\frac{B \times C}{A}$ nichts anders bedeuten könne, als die Linie DE, und in diesem Verstande muß man diese Zeichnung $\frac{B \times C}{A}$ allezeit nehmen, wenn von geraden Linien die Rede ist. Man zeichnet auch zuweilen so $\frac{B}{A} \times C$, welches von dem vorigen nichts verschiedenes bedeutet.

§. 17. Sonst theilet man aus eben dem Satze eine gerade Linie in Theile, welche sich gegen einander und gegen die ganze Linie eben so verhalten, wie sich in einer andern gegebenen geraden Linie, so in Theile zertheilet ist, diese Theile gegen einander und gegen die ganze Linie, deren Theile sie sind, verhalten. Es geschiehet die Sache eben so wie wir VI, 63. gewiesen eine gerade Linie in so viele gleiche Theile zu theilen, als viele der Theile sind, in welche eine andere gerade Linie getheilet ist, und wir thun hier überhaupt nichts, als daß wir dasjenige, so gleich Anfangs von der Theilung gerader Linien durch Parallellinien gesaget worden ist, erweitern.

F. 181. §. 18. Es sey die gerade Linie AB in C, D und E getheilet: man sol eine andere gegebene gerade Linie ab eben so theilen wie AB getheilet ist, mit Beybehaltung nemlich der Verhältnisse der Theile gegen einander und gegen die ganze Linie: so bringe man die gegebene Linie ab an AB unter einen beliebigen Winkel, das ist, man mache AB =

ab

ab, ziehe so dann durch die äussersten Puncte dieser Linien B und b die gerade Linie Bb, und mit dieser ziehe man durch alle Theilungspuncte C, D und E Parallellinien Ee, Dd und Cc, welche die Linie Ab in c, d, e schneiden, so ist die Theilung verrichtet. Denn es ist allerdings AC : CD = Ac : cd, und CD : DE = cd : de, und AB : EB = Ab : eb, und so ferner, wie es die Aufgabe erforderte VII, 9.

VII. Abschnitt.

§. 19. Wir können den Satz, welchen wir bis anher betrachtet haben, noch nicht verlassen. Man kan dasjenige, so von der Proportion der Seiten in einem Dreyecke mit dessen Seite man eine Parallellinie gezogen VII, 12. gesagt worden ist, umkehren, und sagen, daß wenn in der Seite AB eines Dreyeckes ABC, die AD nach Belieben angenommen, und so dann zu den drey Linien AB, AC und AD die vierte Proportionallinie AE gesucht, und diese aus A auf AC gesetzet worden ist; auch die gerade Linie DE, welche die zwey Puncte D und E mit einander verknüpfet, der Seite des Dreyeckes BC parallel seyn werde. Denn weil die vierte Proportionallinie AE zu den drey gegebenen AB, AC und AD gefunden wird, indem man durch D eine gerade Linie DE mit der BC parallel ziehet VII, 14. so ist die gerade Linie, welche durch die Puncte D und E gehet, diejenige, welche mit der BC parallel lauffet, indem sie zugleich durch das Punct D gehet.

F. 182.

§. 20. Solte noch einiger Zweifel übrig seyn, so bedenke man, daß wenn man setzen wolte DE wäre nicht mit der BC parallel, man doch ohnmöglich leugnen könte, daß durch das Punct D mit der Seite BC eine Parallellinie könne gezogen werden. Ist diese nicht DE, so ist es eine andere, zum Exempel DF. Ist aber DF mit der BC parallel, so muß man die Proportion AB : AC = AD : AF nothwendig zugeben, weil diese aus demjenigen so VII, 14. erwiesen worden ist, folget. Da man aber auch angenommen, daß folgende Proportion richtig sey, AB : AC = AD : AE, so ist aus beiden zusammen ferner zu schliessen, daß AF der AE gleich sey. Denn die drey ersten Glieder in beiden Proportionen sind einerley, und also können die vierten nicht verschieden seyn. Weil man angenommen AB : AC = AD : AE, und geschlossen, daß auch AB : AC = AD : AF, so muß man zugeben, daß auch die Verhältnisse AD : AE und AD : AF, welche einer dritten Verhältniß AB : AC gleich sind, einander selbst gleich seyn, AD : AF = AD : AE, woraus die Gleichheit der AF und AE allerdings fliesset VI, 22. Nun aber ist es ohnmöglich, daß AE der

AF

VII. Abschnitt.

AF gleich sey, wenn die Linie DF, welche man durch D der BC parallel gezogen, ausser DE fället, und nichts ist leichter zu sehen, als dieses, also kan diese Parallellinie nicht ausser DE fallen, und ist also die Linie DE selbst diese Parallellinie, wie wir erweisen solten.

§. 21. Ausser dem, daß dieser Satz eine neue Anweisung geben kan, wie mit einer jeden geraden Linie eine andere parallel zu ziehen, wird er auch bey Erweisung anderer Sätze vielen Nutzen haben. Das letztere wird sich nächstens zeigen: Das Ziehen der Parallellinie aber kan auf folgende oder auf eine gleichgültige Weise geschehen. AB ist die gerade Linie, welcher eine andere parallel zu ziehen, und C ist das Punct durch welches die Parallellinie gehen sol. Man ziehe durch C eine gerade Linie nach Belieben, welche sich in der AB endiget, wo man wil, als in D, man mache CE so groß als CD, und ziehe ferner aus E eine andere Linie EF an AB wie man wil, diese theile man mit G in zwey gleiche Theile, so kan man durch C und G die verlangete Parallellinie ziehen. Denn weil EC und EG die Helften sind von ED und EF, so hat man VI, 85. die Proportion ED : EC = EF : EG, und ist demnach CG der AB parallel.

F. 183.

§. 22. Man siehet leicht, daß man aus eben dem Grunde noch verschiedene andere kleine Aufgaben auflösen könne, welche wir aber der Uebung überlassen, als welche dergleichen Kleinigkeiten, wenn sie mit einigem Nachdenken verknüpfet ist, gar leicht selbst lehret. Und wir beschliessen also hiermit dasjenige, so wir zum Grunde setzen müssen, ehe wir uns zur Betrachtung der Aehnlichkeit der Dreyecke wenden konten.

Von der Aehnlichkeit der Dreyecke.

§. 23. Es sind aber zwey Dreyecke ähnlich, erstlich, wenn sie zween gleiche Winkel haben, wie man diese nehmen wil. Denn weil aus der Gleichheit zweer Winkel in den Dreyecken auch die Gleichheit des dritten Winkels folget, so siehet man leicht, daß dieser Satz eigentlich sage, diejenigen Dreyecke seyn einander ähnlich, deren Winkel alle gleich sind; und da hat man freylich kein Auslesen, welche Winkel man in dem einen Dreyecke nehmen und mit den Winkeln des andern vergleichen wolle.

F. 184.

§. 24. Es sey nemlich in dem Dreyecke ABC der Winkel A, dem Winkel a des Dreyeckes abc gleich, und der Winkel B dem Winkel b, woraus dann fliesset, daß auch der Winkel C dem Winkel c gleich

gleich sey: so ist das Dreyeck ABC dem Dreyecke abc ähnlich, und hat dasjenige, so zur Aehnlichkeit der Figuren ausser der Gleichheit der Winkel erfordert wird, nemlich es haben auch die Seiten beyder Dreyecke, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, einerley Verhältniß gegen einander VII, 1. und es ist demnach:

VII. Abschnitt.

AB:BC = ab:bc, oder AB:ab = BC:bc.
AC:BC = ac:bc, oder AC:ac = BC:bc.
AB:AC = ab:ac, oder AB:ab = AC:ac.

welche dritte Proportion aber auch aus den zwo ersteren herfliesset. Denn in derselben sind die Verhältnisse AB:ab, und AC:ac beide der Verhältniß BC:bc gleich, und müssen demnach nothwendig auch selbst einander gleich seyn, wie dieses in der dritten Proportion ausgedrücket wird.

§. 25. Die Richtigkeit aller dieser Proportionen einzusehen, trage man die Seite bc des kleineren Dreyecks aus B in D auf die Seite des grösseren BC, welche zwischen den Winkeln B und C lieget, die den Winkeln b und c, zwischen welchen bc enthalten ist, gleich sind, und man mache also BD = bc. Ferner ziehe man durch D die gerade Linie DE mit der CA parallel. Weil nun dadurch der Winkel D dem Winkel C gleich wird; IV, 187. dieser Winkel C aber dem Winkel c gleich ist, so ist auch der Winkel D dem Winkel c gleich. Und da ferner auch der Winkel B dem Winkel b gleich ist, so ist das Dreyeck EBD dem Dreyecke abc in allem gleich, das ist, der Winkel E ist dem Winkel a gleich, BE = ba, und DE = ca. Denn diese Gleichheit folget aus der Gleichheit der Seiten BD, bc, und der zween Winkel die daran liegen, jederzeit IV, 126. Und man kan also das Dreyeck EBD selbst vor das Dreyeck abc halten, welches man in den Winkel B eingeschoben, und was von den Seiten dieses Dreyeckes EBD bewiesen wird, ist auch von den Seiten des Dreyeckes abc richtig. Nun folget daraus, daß DE der CA parallel lieget ohne Weitläuftigkeit VII, 12.

AB:BE = BC:BD, oder AB:BC = BE:BD,

das ist AB:ab = BC:bc, oder AB:BC = ab:bc, und dieses ist die erste Proportion, welche wir erweisen solten.

§. 26. Man siehet aber auch leicht, daß der Winkel B vor den übrigen keinen Vorzug habe, und daß, gleichwie man das kleine Dreyeck in das grosse mit dem Winkel b schieben kan, dieses auch auf eben die Art angehen werde, wenn man dasselbe mit seinem Winkel a in

VII. Abschnitt. in den Winkel A des grossen Dreyeckes schiebet. Man stelle sich vor, daß dieses geschehen, so hat man aus eben dem Grunde, weil nemlich wegen der Gleichheit der Winkel C und c, nachdem der Winkel a in A eingeschoben worden, bc der Seite BC nothwendig parallel fallen muß, die Proportion zu schliessen, AB: ab = AC: ac oder AB: AC = ab: ac, welche die dritte in der Ordnung war, VII, 24. und auf eben die Art folget auch die zwote, wenn man dieselbe nicht aus dieser und der vorigen machen wil. Denn sie lässet sich aus denselben machen. Weil nemlich

AB: ab = AC: ac, wie auch
AB: ab = BC: bc, das ist, weil die zwo letzteren Verhältnisse einer dritten AB: ab gleich sind, so müssen sie auch unter sich gleich seyn, und es ist, AC: ac = BC: bc, oder AC: BC = ac: bc, welches eben die zwote Verhältniß des Satzes ist.

§. 27. Man siehet hieraus, wenn man in einem Dreyecke ABC mit einer Seite AC eine Linie ED wie man wil parallel ziehet, daß ausser den oben VII, 12. angezeigeten Verhältnissen man auch noch diese habe BC: BD = CA: DE, oder BC: CA = BD: DE, wie auch BA: BE = AC: ED, oder BA: AC = BE: ED. Denn die Dreyecke ABC und EBD werden dadurch, daß ED der AC parallel ist, nothwendig gleichwinklicht. Ja es ist dieses auch richtig, wenn zwo gerade Linien AB, CD einander in E schneiden, und man schneidet sie ferner mit den Parallellinien AF, BG. Es ist nemlich AE: EB = AF: BG, oder AE: AF = EB: BG, wie auch EF: EG = AF: BG, oder EF: AF = EG: BG. F. 185.

§. 28. Der zweyte Grund der Aehnlichkeit zweyer Dreyecke ist die Gleichheit eines Winkels derselben, und die gleiche Verhältniß der Seiten, welche denselben Winkel in beiden Dreyecken einschliessen. Es sey in den Dreyecken ABC und abc der Winkel B dem Winkel b gleich, und es verhalte sich AB zur BC, wie sich ab zur bc verhält, oder welches eben das ist, es sey AB: ab = BC: bc, so sind die Dreyecke ebenfals ähnlich, und haben alles übrige so zur Aehnlichkeit erfordert wird, nemlich die Gleichheit der Winkel C und c, wie auch A und a, welche auf einerley Art in den beiden Dreyecken liegen: und die gleiche Verhältniß der übrigen Seiten, welche an den gleichen Winkeln liegen. Es ist nemlich auch AB: AC = ab: ac, oder AB: ab = AC: ac, wie auch BC: AC = bc: ac oder BC: bc = AC: F. 184.

ac

ac. Und dieses beweisen wir fast auf eben die Art, wie wir unsern vorigen Satz bewiesen haben.

§. 29. Man trage bc aus B auf die Seite BC, welche jener in der Proportion gegenüber stehet, und mache BD = bc, und eben so verfahre man mit der ba: Man lege sie auf BA, dergestalt, daß BE = ba. Da nun also die Seiten BD, BE an den Seiten bc, ba keine verschiedene Grösse haben, so wird man in der Grund-Proportion BA : BC = ba : bc, an die Stelle der zwo letztern Linien und ihrer Verhältniß, die Verhältniß BE : BD setzen können, woraus denn die Proportion BA : BC = BE : BD entstehet. Aus dieser Proportion aber siehet man ein, daß die gerade Linie DE der Linie AC parallel lauffe. Denn wie wir VII, 19. gesehen, so fliesset diese Lage der Linien DE, AC eben so wohl aus der angezeigten Proportion, als die Proportion selbst aus dem Parallelen Stande der Linien folget. Und hieraus sind nun die nachstehende Proportionen, welche VII, 23. allezeit statt haben, wenn in einem Dreyecke mit einer Seite eine Parallel-Linie gezogen wird, welche die übrigen Seiten schneidet, leicht geschlossen, BA : AC = BE : ED

BC : AC = BD : ED.

Von der Gleichheit der Winkel D und C, wie auch E und A, ist vielleicht nicht einmal nöthig, etwas zu sagen, weil sie aus der Parallelen Lage der Linien AC und DE unmittelbar fliesset. Weil aber die zwey Dreyecke EBD, abc bey B gleiche Winkel haben, und weil man die Seite BD der bc, und BE der ba gleich gemacht, so sind auch nach dem bekannten Satze von der Gleichheit der Dreyecke IV, 112., die Seiten DE und ac, wie auch die Winkel E und a, einander gleich, und der Winkel D ist = c, derowegen gi't von dem Dreyecke abc, und von seinen Seiten und Winkeln dasjenige, so von dem Dreyecke EBD, und seinen Seiten und Winkeln gewiesen worden; und es sind demnach auch die Winkel a und A, wie auch C und c einander gleich, und nachstehende Proportionen haben ebenfals statt:

BA : AC = ba : ac, oder BA : ba = AC : ac,
BC : AC = bc : ac, oder BC : bc = AC : ac.

§. 30. Wir wenden uns nunmehro zu dem dritten Grunde der Aehnlichkeit der Dreyecke. Dieser ist die gleiche Verhältniß aller Seiten in zweyen Dreyecken. Wenn in zweyen Dreyecken ABC und abc von nachstehenden Proportionen

 AB:

VII. Abschnitt.

$$AB: BC = ab: bc, \text{ oder } AB: ab = BC: bc,$$
$$AB: AC = ab: ac, \text{ oder } AB: ab = AC: ac,$$
$$BC: AC = bc: ac, \text{ oder } BC: bc = AC: ac,$$

zwo richtig eintreffen, so sind die Dreyecke ähnlich. Wir setzen, daß nur zwo eintreffen dörfen, denn wenn wir diese Verhältnisse mit einander zu vergleichen uns die Mühe geben, so sehen wir leicht, daß aus jeden zwoen derselben die dritte folge. Denn es kommt in jeden zwo Proportionen einerley Verhältniß zweymal vor, welcher zwo andere gleich zu seyn gesetzt werden, und wie in der ersten und zwoten Proportion die Verhältniß A B: a b zweymal stehet, so ist es bey allen übrigen, und man hat also der angezeigten Proportionen nur zwo zu nennen, die dritte wird dadurch zugleich mit eingeschlossen.

§. 31. Daß aber aus zween dieser Verhältnisse die Aehnlichkeit der Dreyecke folge, wird nachfolgender massen erwiesen. Man lege wieder b c auf B C, welche letztere Linie der erstern in der Proportion gegenüber stehet, und mache solchergestalt B D = b c, man bringe auch b a auf B A in B E, und ziehe sodann die gerade Linie D E. So ist nunmehro gar leicht einzusehen, daß die Dreyecke A B C und E B D einander ähnlich sind. VII, 29. Nun ist aber wieder das Dreyeck E B D dem Dreyecke a b c nach allen Seiten und Winkeln gleich, und dieses wird also erwiesen. Es ist gesetzt worden, daß A B: A C = a b: a c. Aus der Aehnlichkeit aber der Dreyecke A B C und E B D folget A B: A C = E B: E D, und es sind in diesen zwo Proportionen die drey ersten Glieder gleich, denn die allerersten A B, und die zweyten A C sind beederseits vollkommen einerley, und E B ist der a b mit Fleiß gleich gemacht worden, also müssen auch die dritten Glieder a c und E D einander gleich seyn. Nun ist auch B D = b c, derowegen sind alle drey Seiten des Dreyecks E B D den drey Seiten des Dreyecks a b c gleich, und folgends sind die Dreyecke gänzlich von einer Grösse, IV, 139. und man kan sich vorstellen, daß E B D nichts anders sey, als das in den Winkel bey B eingeschobene Dreyeck a b c. Da nun also erwiesen, daß das Dreyeck E B D dem Dreyecke A B C ähnlich ist, so muß dieses auch von dem Dreyecke a b c wahr seyn, und ist demnach der Winkel a dem Winkel A, der Winkel b dem Winkel B, und c dem C gleich, denn diese Winkel liegen in beiden Dreyecken zwischen solchen Seiten, welche gleiche Verhältniß gegen einander haben.

§. 32. Wir haben noch den vierten Grund der Aehnlichkeit zweyer

Drey-

Dreyecke übrig, aber dieser ist etwas mehr eingeschrenkt als die vorigen. Zwey Dreyecke haben einen gleichen Winkel, und es sind die Seiten proportional, welche einen andern Winkel einschliessen. Es ist möglich, daß bey diesen Umständen die Dreyecke ähnlich sind, sie können aber auch unähnlich seyn. Doch sind sie gewiß ähnlich, wenn diejenigen Seiten, welche den Winkeln entgegen stehen, von welchen gesetzt worden, daß sie einander gleich sind, grösser sind als diejenige Seiten, welche an den gedachten Winckeln anliegen. A B C, a b c sind zwey Dreyecke, wir setzen, der Winkel C sey dem Winkel c gleich, und es verhalte sich A B zu B C, wie sich a b zu b c verhält; aber es sey auch A B grösser als B C, und folgends a b grösser als b c: es werden bey diesen Bedingungen die Dreyecke A B C, a b c ähnlich einander seyn.

VII. Abschnitt.

F. 184.

§. 33. Denn man bringe wieder die Linie b c auf die Linie B C, welche jener in der Proportion gegenüber stehet, und mache B D = b c, und ziehe sodann durch D die gerade Linie D E der C A parallel: so folget hieraus nothwendig, daß der Winkel bey D dem Winkel C gleich sey. Und da man zum Grunde genommen, daß der Winkel C dem Winkel c gleich sey, so muß auch der Winkel D dem Winkel c gleich seyn. Ferner folget aus eben der Parallel Lage der geraden Linien C A und D E nachstehende Proportion: B C : B A = B D : B E, VII, 12. Nun hat man auch diese Proportion als richtig angenommen: B C : B A = b c : b a, und wenn man diese zwo Proportionen mit einander vergleichet, so findet man, daß die drey ersten Glieder derselben gleich sind. Denn die zwo allerersten sind vollkommen einerley, und B D hat man mit Fleiß = b c genommen. Es müssen demnach auch die vierten Glieder B E, b a einander gleich seyn. Und also haben wir zwey Dreyecke b a c, B D E, welche einen gleichen Winkel haben D = c, und deren Seiten, welche denselben Winkel nicht einschliessen, beiderseits gleich sind, B E = b a, und B D = b c, so doch, daß die Seite b a, die dem Winkel c entgegen stehet, grösser ist, als die Seite b c, welche an demselben lieget. Alles dieses ist theils als bekannt angenommen, theils erwiesen worden; und hieraus folget IV, 257., daß das Dreyeck E B D dem Dreyecke a b c vollkommen und nach allen Seiten und Winkeln gleich sey, und daß man sich wieder vorstellen könne, daß das Dreyeck E B D selbst das Dreyeck a b c sey, welches man in den Winkel B des Dreyecks A B C eingeschoben. Nun ist aus dem, so wir öfters gesagt, klar genug, daß das Dreyeck E B D

 dem

VII. Abschnitt.

dem Dreyeck ABC ähnlich sey, und man darf nur darauf acht haben, daß DE der AC Parallel laufe, um dieses einzusehen, derowegen muß auch das Dreyeck a b c dem Dreyecke A B C ähnlich seyn, und alles haben, was zur Aehnlichkeit erfordert wird, nemlich: Die Winkel B, b, wie auch A, a müssen einander gleich, und die Seiten, welche gleiche Winkel einschliessen, proportional seyn.

§. 34. Ist in solchen Dreyecken der Winkel bey C gerade oder stumpf, so ist nothwendig die Seite A B, welche demselben Winkel entgegen gesetzt ist, grösser als die Seite B C, welche an demselben lieget, IV, 258. und es sind also alle geradewinklichte Dreyecke, wie auch alle stumpfwinklichte unter den gesetzten Bedingungen, wenn nehmlich die Winkel C, c gleich, und die Seiten B A: B C den Seiten b a: b c proportional sind, einander ähnlich. Bey geradewinklichten Dreyecken hat man nicht einmal nöthig zu setzen, daß die geraden Winkel C, c gleich seyn sollen, denn weil sie gerade sind, verstehet sich dieses von selbsten. Und man kan also bey geradewinklichten Dreyecken den Satz kurz dergestalt abfassen: Alle geradewinklichte Dreyecke, bey welchen zwo Seiten einerley Verhältniß haben, sind einander ähnlich. Es mögen nehmlich diese zwo Seiten den geraden Winkel einschliessen, wie in dem 28. Satze dieses Abschnittes angenommen worden ist, oder nicht.

F. 186.

§. 35. Wenn man diese Sätze von der Aehnlichkeit der Dreyecke wiederhohlet und erweget, so siehet man, da in jeden zwey Dreyecken, welche man vergleichen mag ABC und abc, diese sechs Dinge vorkommen,

$$A = a$$
$$B = b$$
$$C = c$$
$$AB : BC = ab : bc$$
$$AB : AC = ab : ac$$
$$AC : BC = ac : bc$$

drey Winkel nehmlich, und drey Verhältnisse der Seiten: Daß, wenn man zwey dieser Dinge gleich zu seyn setzet, auch die übrigen alle gleich seyn, nur muß man die einzige Bedingung unsers letzten Satzes nicht aus den Augen setzen, so oft als man in denselben fällt. Der Verstand ist dieser: Setzet man $A = a$, und $B = b$, so ist auch $C = c$, $AB : BC = ab : bc$, und so ferner mit allen übrigen. Setzet man

A = a

A = a, und AB : BC = ab : bc, so ist wieder B = b, C = c, und AB : AC = ab : ac, und so weiter. Es ist keine Ausnahme dabey, als daß, wenn man setzet, daß C = c, und AB : BC = ab : bc, auch AB grösser seyn muß als BC, wenn das übrige alles ebenfals gleich seyn soll, sonst, wenn AB kleiner wäre als BC, folget das übrige nicht nothwendig.

§. 36. Siehet man aber diese Sätze der Aehnlichkeit der Dreyecke noch auf einer andern Seite an, und vergleichet sie mit denjenigen, so wir gleich im Anfange von der Gleichheit der Dreyecke uns vorgestellet haben; so findet man, daß sie mit jenen gar sehr genau verwand sind, ja es sind jene Sätze alle unter diesen begriffen. Man schliesset, daß zwey Dreyecke gleich sind, und gleiche Seiten und Winkel haben, wenn in denselben gleiche Winkel von gleichen Seiten beschlossen werden. Man schliesset auch, daß zwey Dreyecke ähnlich sind, und gleiche Winkel, und eine gleiche Verhältniß der Seiten haben, wenn in denselben gleiche Winkel von Seiten beschlossen werden, welche sich auf einerley Art gegen einander verhalten. Man schliesset, daß zwey Dreyecke gleich sind, wenn sie zwey gleiche Winkel haben, und eine gleiche Seite: Man schliesset ebenfals aus der Gleichheit zweer Winkel die Aehnlichkeit derselben, ob zwar sie keine gleiche Seiten haben. Man schliesset, daß zwey Dreyecke gleich sind, aus der Gleichheit aller Seiten derselben; Man schliesset auch die Aehnlichkeit der Dreyecke aus der gleichen Verhältniß ihrer Seiten. Man schliesset in einigen Fällen die Gleichheit der Dreyecke aus der Gleichheit zwoer Seiten und eines Winkels, welcher von diesen Seiten nicht beschlossen wird, und in eben diesen Fällen schliesset man auch die Aehnlichkeit der Dreyecke aus der Gleichheit eben desselben Winkels, und aus der gleichen Verhältniß dieser Seiten.

§. 37. Hieraus kan man den allgemeinen Satz ziehen, daß, wenn man zwey Dreyecke zu verfertigen ähnliche Dinge annimmt, (gleiche Winkel, oder Seiten, welche gleiche Verhältnisse gegen einander haben) und machet aus diesen Dingen die zwey Dreyecke aus, so werden dieselben ähnlich. Man muß nur solche Dinge annehmen, aus welchen das Dreyeck ganz und gar determiniret wird, so, daß nicht mehr als einerley Dreyeck aus denselben gemacht werden kan. Zum Exempel aus einem Winkel und den zwo Seiten, welche den Winkel einschliessen, wird ein Dreyeck, und nicht mehr als eines, verfertiget.

Wenn

VII. Abschnitt.

Wenn man demnach zu zweyen Dreyecken einerley Winkel A und a nimmet, und Seiten an dieselbe leget, welche gleiche Verhältnisse gegen einander haben, so daß AB : AC = ab : ac, so werden die Dreyecke ABC, abc, welche man dergestalt verfertiget, einander ähnlich.

§. 38. Der Satz ist richtig, ja er ist allgemein. Alle Figuren welche aus ähnlichen Dingen auf einerley Art zusammen gesetzet oder erzeuget werden, sind einander ähnlich, und dieses hat einige bewogen, daß sie diesen Satz brauchen, alles so von der Aehnlichkeit nicht allein der Dreyecke, sondern aller Figuren überhaupt zu sagen ist, zu erweisen. Ohnfehlbar können diese Beweise richtig seyn, aber der Satz selbst ist kein wahrer Geometrischer Grundsatz. Es fehlet ihm diese Deutlichkeit, und die Ueberzeugung welche ein Geometrischer Grundsatz so gleich hervor bringet, so bald man ihn höret. Figuren die einander decken können sind einander gleich. Dieses ist ein wahrhaftig Geometrischer Grundsatz. Man vergleiche ihn mit dem, von welchen wir reden, und sehe ob man von diesem eben so sehr überzeuget werde als von jenem? Ja wir können uns nicht anders vorstellen, als daß viele würklich an der Wahrheit dieses allgemeinen Satzes der Aehnlichkeit zweifeln werden, wenn wir bedenken, wie viele Mühe es uns gekostet, ihn erstlich recht zu verstehen, und zum zweyten uns von der Wahrheit desselben zu überführen. Und eben dieses, daß er unrecht verstanden werden, und dadurch zu vielen Fehlern Anlaß geben könne, ist eine neue Ursach, warum wir ihn als einen Grund der Geometrischen Beweise nicht gebrauchen wolten. Man suchet in der Geometrie nicht nur eine gewisse Wahrheit, welche auch die Erfahrung, und zuweilen das Zeugniß anderer geben kan; sondern man suchet in dieser Wissenschaft den höchsten Grad der Ueberzeugung, welchen man die Evidenz nennet, und welche darin bestehet, daß man aus dem Begriffe der Sache selbst, nachdem man sich versichert, daß in demselben nichts widersprechendes liege, dasjenige herzuleiten fähig ist, so von den Dingen, welche diese Begriffe vorstellen, gesaget wird.

§. 39. Wäre dieses nicht, und man hätte nicht alle Undeutlichkeit und Zweydeutigkeit in dieser Wissenschaft so sorgfältig zu vermeiden, so wäre es nicht ohnmöglich noch manchen dergleichen Satz in die Geometrie zu bringen, als der gegenwärtige ist, und wir glauben, daß wir Exempel von solchen Sätzen gegeben, und noch ferner zu geben im Stande seyn werden, welche zwar in einem oder andern Falle einen leichten Beweiß machen können, aber deswegen nicht in die Geometrie

als

als Grundsätze gebracht werden dürfen, weil wieder Fälle vorkommen können, da die Anwendung derselben mit einiger Undeutlichkeit verknüpft wäre.

§. 40. Man kan noch verschiedene andere Eigenschaften der Seiten und Winkel der Dreyecke aus diesen Sätzen herleiten. Wir können uns aber mit einer einzigen begnügen, welche diese ist. Wenn man in einem Dreyecke ABC einen beliebig angenommenen Winkel A in zween gleiche Winkel BAD und DAC schneidet, und verlängert die Linie AD welche den Winkel schneidet, bis sie auch die Seite BC, die dem Winkel BAC entgegen gesetzet ist, in D theile: so verhalten sich diese Theile gegen einander, wie die Seiten des Dreyeckes ABC, an welchen sie liegen, und man hat BD : DC = AB : AC. Denn man ziehe durch C die gerade Linie CE mit der AD parallel, und verlängere die BA, bis sie diese CE in E schneide: So ist der Winkel DAC dem Winkel ACE gleich, weil die Parallellinien AD, EC beyde von der Linie AC geschnitten werden, und dadurch diese Winkel DAC, ACE entstehen. Weil aber auch BE eben diese Parallellinien AD, EC, schneidet, so ist auch BAD = AEC. Und da demnach die Winkel ACE und AEC, zween gleichen Winkeln DAC, BAD gleich sind, so sind sie auch selbst gleich, ACE = AEC. Folgends ist das Dreyeck AEC gleichschenklicht, und AE = AC IV, 129. Weil aber auch in dem Dreyecke EBC, die AD mit der Seite CE parallel lauffet, so hat man, VII, 9. BD : DC = AB : AE. Man setze an die Stelle der AE die ihr gleiche AC, so kommet die Proportion BD : DC = AB : AC, deren Richtigkeit wir erweisen solten.

F. 187.

Von der Aehnlichkeit der übrigen Figuren.

§. 41. Mit den übrigen Figuren, welche mehr als drey Seiten haben, giebet es bey weiten nicht so viele Weitläuftigkeit, wenn wir nur dasjenige betrachten wollen, so hauptsächlich nützlich ist. Sie mögen so viele Seiten haben als sie wollen, wenn sie nur einander ähnlich sind, so lassen sie sich in ähnliche Dreyecke zertheilen, indem man Queerlinien durch die Spitzen derjenigen Winkel ziehet, welche einander gleich sind, und diese Queerlinien verhalten sich so dann gegen einander, wie jede zwo Seiten der Figuren, welche zwischen gleichen Winkeln liegen. Dieses ist das hauptsächlichste, so wir von solchen Figuren zu bemerken haben, und der Beweiß davon ist gar leicht.

§. 42. Gesetzet es seyen die Figuren ABCDE und abcde einander

F. 188.

VII. Abschnitt.

ander ähnlich, so müssen erstlich die Winkel der einen Figur, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, den Winkeln der andern Figur gleich seyn: und zweytens müssen die Seiten, welche in beyden Figuren zwischen den gleichen Winkeln liegen, einerley Verhältniß gegen einander haben. VII, 1. Wir setzen daß diejenigen Winkel gleich sind, welche wir mit einerley Buchstaben gezeichnet haben, so sind die Verhältnisse AB : ab

BC : bc

CD : cd

DE : de

EA : ea, alle gleich, und jede zwo mit einander verknüpft, geben eine Proportion. Nun ziehe man die Queerlinien BE und be, zwischen den gleichen Winkeln B = b, und E = e. Es ist so gleich einzusehen, daß weil die Winkel A, a gleich sind, und die Seiten welche sie einschliessen, einerley Verhältniß gegen einander haben, auch die Dreyecke ABE, abe ähnlich seyn, und BE zur be eben die Verhältniß haben werde, welche AB : ab hat, VII, 28. daß demnach diese Verhältniß BE : be den vorigen gleichen Verhältnissen wird können beygesetzet werden. Also ist von diesen erstern Queerlinien gezeiget, daß ihre Verhältniß der Verhältniß jeder Seiten, die zwischen gleichen Winkeln liegen, gleich sey. Da nun aber die erwiesene Aehnlichkeit der Dreyecke ABE und abe auch die Gleichheit der übrigen Winkel in sich begreiffet, nemlich ABE = abe, und AEB = aeb, die Winkel aber EBC und ebc übrig bleiben, wenn man von den gleichen Winkeln ABC und abc die Winkel ABE und abe wegnimmet, so müssen auch diese Winkel EBC und ebc gleich seyn, als die durch den Abzug gleicher Winkel von gleichen entstehen. Sind aber, wie gezeiget worden, diese Winkel EBC und ebc einander gleich, und ist ferner die Verhältniß EB : eb der Verhältniß BC : bc gleich, wie wir dieses ebenfals erwiesen, so ist wiederum das Dreyeck EBC, dem Dreyecke ebc ähnlich, und die Verhältniß der Querlinien EC : ec ist mit der Verhältniß der Seiten BC : bc, und folgends der Verhältniß jeder andern zwo Seiten, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, einerley: Und auf diese Art kan man ferner fortfahren die Gleichheit der Verhältnisse der Querlinien mit den Verhältnissen der Seiten der Figuren, die zwischen gleichen Winkeln liegen, und die Aehnlichkeit der Dreyecke, in welche die Figuren durch diese Querlinien zertheilet worden sind,

zu zeigen. Man siehet leicht, daß dieses angehen werde, es mag die Figur aus so vielen Dreyecken bestehen als sie wil.

§. 43. Da wir nun gezeiget haben, daß die ganzen Umkreise jeder zwo ähnlichen Figuren sich gegen einander, wie jede zwo Seiten der Figuren, die zwischen gleichen Winkeln liegen, verhalten, VII, 4. gegenwärtig aber erwiesen ist, daß die Verhältniß jeder dergleichen Seiten der Verhältniß der Querlinien, welche die Spitzen gleicher Winkel mit einander verknüpfen, gleich sey, so wird man schliessen müssen, daß bey jeden ähnlichen Figuren die ganzen Umkreise sich wie solche Querlinien verhalten; und daß demnach in denjenigen Figuren, welche wir bis anhero betrachtet haben, die Verhältniß des Umkreises ABCDEA zu dem Umkreise abcdea der Verhältniß der Querlinie BE zur be, wie auch der Verhältniß der CE zu ce gleich sey. Nimmet man solche Theile des Umkreises, welche in den beyden Figuren zwischen den Spitzen gleicher Winkel liegen als ABCD, abcd, so verhalten sie sich, der erstere zu dem zweyten gleichfals wie AB zur ab, oder wie BE:be wie aus dem Beweise, den wir VII, 4. gegeben haben, erhellet.

§. 44. Man kan diesen Satz umkehren und sagen, daß wenn man zwo Figuren aus ähnlichen Dreyecken zusammen setzet, deren Seiten nemlich alle einerley Verhältniß gegen einander haben, und bey welchen diejenige Seiten gleich seyn, welche in der Figur zusammen fallen sollen; die also zusammen gesetzete Figuren ebensals einander ähnlich seyn werden: Nur muß man sich in Acht nehmen, daß man die Dreyecke in der einen Figur nicht anders lege, als sie in der anderen liegen. Wir setzen, daß die Figuren ABCDE und abcde dergestalt aus ähnlichen Dreyecken zusamen gesetzet sind, und daß das Dreyeck ABE, dem Dreyecke abe ähnlich sey, und EBC dem ebc und so weiter, und sagen, es werde auch die Figur ABCDE der Figur abcde ähnlich seyn: das ist, es werden die Winkel der ersteren Figur den Winkeln der zwoten, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, gleich, und die Seiten, welche die gleiche Winkel einschliessen, proportional seyn.

§. 45. Das letztere, daß die Seiten der beyden Figuren, welche auf einerley Art liegen, alle einerley Verhältnisse gegen einander haben, ist ohne Weitläuftigkeit klar, weil man dergleichen Dreyecke angenommen, deren Seiten, die zwischen einerley Winkel und folgends auf einerley Art liegen, gleiche Verhältniß gegen einander ha-

 ben,

ben, und diese Seiten in der Figur wiederum auf einerley Art geleget. Es ist nemlich vermöge dieser Aehnlichkeit AB : ab = BE : be und BC : bc = BE : be, also sind die ersteren zwo Verhältnisse einer dritten gleich, und demnach ist auch AB : ab = BC : bc, und so rings herum. Diese gleiche Verhältniß der Seiten der Dreyecke, welche man zusammen gesetzet, lieget in dem Begriffe der Aehnlichkeit derselben. Was aber die Winkel der Figuren ABCDE, abcde anlanget, so sind diese aus gleichen Winkeln der Dreyecke zusammen gesetzet: denn eben der Begrif der Aehnlichkeit der Dreyecke schliesset die Gleichheit der Winkel, welche in denselben auf gleiche Art liegen, in sich, und diese gleiche Winkel der Dreyecke sind in den Figuren auf gleiche Art zusammen gesetzet, und machen die Winkel der Figuren theils selbst und alleine, theils durch ihre Zusammensetzung aus. In dem ersten Falle, da die Winkel der Figur selbst die Winkel der Dreyecke sind, wie A, a, ist nicht weiter nöthig zu zeigen, daß diese Winkel der Figur einander gleich sind; in dem zweyten Falle aber entstehen die Winkel ABC, abc durch die Zusammensetzung gleicher Winkel ABE = und abe, und EBC = ebc, und sind also ebenfals einander gleich.

§. 46. Man kan nach diesen Sätzen eine geradelinichte Figur beschreiben, welche einer gegebenen geradelinichten Figur ähnlich ist. Es sey die Figur ABCDE gegeben und man sol eine Figur machen, welche ihr ähnlich sey. Es sey auch eine Seite ab gegeben, welche der Seite AB der erstern Figur gegenüber stehen, und mit jener zwischen gleichen Winkeln liegen soll; denn man muß eine dergleichen Seite haben, und wenn sie nicht gegeben ist, muß man sie nach Belieben nehmen. So theile man die Figur ABCDE nach Belieben in Dreyecke, und setze auf die Seite ab das Dreyeck abe, so dem Dreyecke ABE ähnlich ist, und da ferner in der ersten Figur auf BE das Dreyeck EBC stehet, so setze man auch auf be das Dreyeck ebc, welches dem Dreyecke EBC ähnlich ist, und so fahre man in Zusammensetzung der Dreyecke fort, bis man in die Figur abcde so viele Dreyecke gebracht hat, als viele derer in ABCDE anzutreffen sind.

§. 47. Diese Anweisung begreiffet verschiedene besondere Arten, eine geradelinichte Figur einer andern ähnlich zu machen, unter sich, welche man in der Ausübung gebrauchen kan. Denn man kan auf die Seite ab nach gar verschiedenen Gründen ein Dreyeck abe setzen, wel-

welches dem Dreyecke ABE ähnlich ist, und eben dieses ist von einem jeden andern der übrigen Dreyecke zu sagen. Man kan den Winkel a dem Winkel A gleich und die Seiten ab, ae den Seiten AB, AE proportional machen. Man kan den Winkel a dem Winkel A, und abe dem Winkel ABE gleich machen. Man kan aber auch die drey Seiten des Dreyecks abe den drey Seiten des Dreyecks ABE proportional machen, so wird immer das Dreyeck abe dem Dreyecke ABE ähnlich, und eben dieses ist auch von den übrigen Dreyecken allen zu sagen. Man bedienet sich in der Ausübung bey einem jeden Dreyecke derjenigen Zusammensetzung, welche nach den besondern Umständen die leichteste zu seyn scheinet. Ist zum Exempel die Linie ab halb so groß als die Linie AB, so müssen auch die übrigen Seiten und Querlinien der Figur abcde die Helften seyn, der Seiten und Querlinien der Figur ABCDE welche jenen gegenüberstehen, und mit jenen auf einerley Art liegen. Es sind demnach die Seiten und Querlinien der Figur abcde in diesem Falle aus den Seiten und Querlinien der Figur ABCDE leicht zu finden; und aus diesen lässet sich hernach die Figur abcde selbst zusammen setzen. Eben dieses ist auch zu sagen, wenn ab ein Drittel, ein Viertel, u. s. f. der AB ist, oder wenn ab zwey, drey, vier mal so groß ist als AB. Dergleichen Vortheile fallen einem in der Uebung gar leichte bey.

VII. Abschnitt.

§. 48. Auf eben die Art kan man auch verfahren, wenn man eine gebrochene Linie abcde einer andern gebrochenen Linie ABCDE ähnlich machen soll. Denn man kan auch dergleichen Linien ähnlich nennen, wenn ihre Theile aus welchen sie bestehen, wie sie auf einander folgen, gleiche Verhältnisse gegen einander haben und gleiche Winkel einschliessen. Das ist, wenn die Verhältnisse AB:ab, BC:bc, CD:cd, DE:de sowohl als die Winkel ABC, abc, wie auch BCD, bcd, und CDE, cde einander gleich sind, so kan man sagen, daß die gebrochene Linien ABCDE, und abcde einander ähnlich sind, und es ist leicht einzusehen, daß was von solchen Linien richtig ist, auch in dem Falle statt haben müsse; wenn sie sich schliessen, und Umkreise der Figuren abgeben, welche Figuren so dann ähnlich werden, in welchem Falle der gegenwärtige Begrif mit dem ersten, welchen wir von der Aehnlichkeit der Figuren gegeben, überein kommet. Weil aber die Betrachtung solcher gebrochenen Linien angewendet werden wird, verschiedene andere nützliche Sätze zu erweisen, so wollen wir uns die Weise, eine solche Linie einer andern ähnlich zu machen, noch von einer andern Seite vorstellen.

F. 189.

VII. Abschnitt.

§. 49. Es sey die gebrochene Linie ABCDE, diejenige welcher eine andere ähnlich zu machen ist. Man nehme ein Punct F wo man wil, entweder in der Linie selbst, oder ausser derselben auf dieser oder jener Seite, und ziehe von diesem Puncte F gerade Linien an alle Ecken der Figur, und an die äussersten Puncte derselben FA, FB, FC, FD, FE. Nachdem dieses geschehen ist, setze man die Dreyecke afb, bfc und so weiter, welche den Dreyecken, deren Spitzen an F fallen AFB, BFC und so ferner, ähnlich sind, eben so zusammen, wie die Dreyecke AFB, BFC, &c. an einander liegen. Man kan anfangen wo man wil, in der Mitte oder von einem oder dem andern der äussersten Dreyecke: aber es muß eine Seite des ersten Dreyeckes entweder gegeben seyn, oder man muß sie selbst nach Willkühr bestimmen. Aus derselben wird so dann die Grösse aller übrigen gefunden, eben so, als wie dieses in der vorigen Anweisung VII, 47. geschehen. Und es schicket sich der Beweiß welcher von der Richtigkeit jener Anweisung gegeben worden ist, auch vor die gegenwärtige, als die von jener im Grunde nicht verschieden ist. Man betrachte nur BCDEF und bcdef als Figuren, welche aus ähnlichen Dreyecken zusammen gesetzet sind; so siehet man so gleich, daß man schliessen müsse, der Winkel EDC sey dem Winkel edc, und DCB dem dcb, wie auch CBF, dem cbf, gleich: und die Verhältniß der Seiten DE: de den Verhältnissen CD: cd und BC: bc, wie auch BF: bf. Und solte man bey den letzten Seiten AB, ab und dem Winkel ABC Schwierigkeit finden, so wird diese leicht gehoben werden, wenn man betrachtet, daß, weil auch die Dreyecke ABF, abf einander ähnlich sind, die Verhältniß AB: ab der Verhältniß BF: bf, und folgends allen übrigen BC: bc, CD: cd und so fort, ebenfals gleich seyn müsse: wie auch, daß, weil in eben diesen Dreyecken ABF und abf die Winkel ABF und abf einander gleich seyn, aber auch die Winkel CBF, cbf einerley Grösse haben, wie wir vorher geschlossen: auch die Winkel ABC, abc gleich seyn müssen, weil sie beyderseits nach Abzug der kleineren der besageten gleichen Winkel CBF, cbf von den grösseren ABF, abf übrig bleiben.

§. 50. Man kan sich hieraus einen gar bequemen Handgrif vorstellen, eine Figur zu verfertigen, welche einer anderen Figur ähnlich ist, oder auch nur einen Theil des Umkreises einer Figur, einem Theile des Umkreises einer andern, ähnlich zu machen, wenn sonst weiter nichts gefordert wird, und die verfertigte Figur oder Linie liegen darf, wie man wil. Es sey die gebrochene Linie ABCDE gegeben, und man

F. 190. 191.

man sol eine andere Linie machen, welche ihr ähnlich ist: so ziehe man durch alle äusserste Puncte der Theile, aus welchen sie bestehet, die gerade Linien AF, BF, CF und so ferner, nach einem beliebig angenommenen Puncte F, und verlängere diese Linien, wenn man wil über dieses Punct: nehme aber hernach in denselben die Puncte a, b, c, und so weiter, dergestalt daß die Verhältnisse AF : Fa, BF, Fb, CF : Fc, DF : Fd, EF : Fe alle von einerley Grösse werden, welches man sich vorstellen kan daß es geschehe, indem Fa halb so groß genommen wird, als FA, Fb halb so groß als FB, und so rings herum, oder was man sonst vor eine Weise erwehlen wil, die Linien Fa, Fb, Fc, den Linien FA, FB, FC proportional zu machen. So bald dieses geschehen ist, und man dergestalt die Puncte a, b, c, d, e gefunden hat; so kan man durch dieselbe die gebrochene Linie abcde ziehen, welche der gegebenen ABCDE ähnlich seyn wird. Denn es ist klar daß die Dreyecke AFB und aFb einander ähnlich sind, weil ihre Winkel bey F einander gleich sind, und man den Seiten an diesen Winkeln einerley Verhältniß gegen einander gegeben hat. VII, 28. Eben dieses ist auch von allen übrigen Dreyecken BFC, bFc, CFD, cFd zu sagen, und hieraus erfolget die Aehnlichkeit der gebrochenen Linien ABCDE und abcde nach dem, so eben erwiesen worden.

§. 51. Es verhält sich aber die gebrochene Linie ABCDE zu der andern abcde, welche ihr ähnlich ist, wie AF : Fa, oder wie BF : Fb. Denn wir haben gesehen, daß sich ABCDE zu abcde verhalte wie AB : ab oder BC : bc &c. weil man diese gebrochene Linien als Theile der Umkreise zweyer ähnlichen Figuren betrachten kan, deren Seiten AB, BC, CD, DE und ab, bc, cd, de sind. VII, 4. Die Verhältniß aber AB : ab ist der Verhältniß AF : Fa gleich. Denn die Dreyecke ABF, abF sind ähnlich genommen. Eben so ist es rings herum.

Von der Aehnlichkeit der Theile der Cirkel.

§. 52. Wir können dieses auf die Cirkelbogen anwenden, und daraus zeigen, in welchen Umständen dergleichen Bogen ähnlich sind. Es seyn um den Mittelpunct F zween Bogen AE, ae beschrieben, welche beyde zwischen einerley Halbmessern AFa und EFe oder AaF und EeF liegen, und mit denselben Ausschnitte ausmachen, deren Winkel an den Mittelpuncten F gleich sind: so sind die Bogen AE und ae einander ähnlich. Denn man ziehe von dem in dem einen Bogen beliebig angenommenen Puncte B, den Halbmesser BF, und verlängere ihn

F. 192. 193.

wenn

VII. Abschnitt. wenn es nöthig ist bis an den andern Bogen. Gleichwie man nun bey der gebrochenen Linie ABCDE in den unmittelbar vorhergehenden Zeichnungen, die Aehnlichkeit derselben mit der abcde daraus geschlossen, daß die Verhältniß AF : aF der Verhältniß BF : bF, und diese wieder der Verhältniß CF : cF gleich sey, und so fort: so folget ebenfals die Aehnlichkeit der Bogen AE und ae daraus, wenn man das Punct B in dem Bogen ABE nach Belieben nehmen kan, ohne daß jemals die Verhältniß AF : aF der Verhältniß BF : bF ungleich werde. Man siehet aber leicht, daß diese Verhältnisse niemals ungleich seyn können; weil BF, bF so wol als AF, aF immer halbe Durchmesser der Bogen sind; und also nicht einmal die Glieder derselben verschiedene Grössen haben können.

§. 53. Es haben demnach auch solche Bogen gegen ihre Halbmesser einerley Verhältniß: das ist, wie sich der Bogen AE gegen seinen Halbmesser AF verhält, so verhält sich auch der Bogen ae gegen seinen Halbmesser aF, VII, 51. oder wenn wir uns der gewöhnlichen Zeichen bedienen, AE : AF = ae : aF; und hieraus folget durch die Verwechselung AE : ae = AF : aF.

§. 54. Die Halbmesser sind die Helften der Durchmesser, und die Helften jeder Grössen verhalten sich allezeit wie die ganzen Grössen. Oder 2 AF ist der Durchmesser des Cirkels, welcher entstehet, wenn man den Bogen AE ergänzet, und 2aF ist der Durchmesser des Cirkels, von welchem der Bogen ae ein Theil ist. Da nun die Proportion AE : ae = AF : aF richtig ist, so wird auch die nachfolgende AE : ae = 2AF : 2aF ihre Richtigkeit haben: VI, 103. und zween dergleichen Bogen, deren Winkel an dem Mittelpuncte einander gleich sind, werden sich auch gegen einander wie die Durchmesser der Cirkel verhalten. Wir haben dieses und das folgende desto deutlicher einzusehen, eine andere Figur gezeichnet, in welcher zween Cirkelkreise AEG, aeg um einerley Mittelpunct F beschrieben sind, und nach dieser muß die letzte Proportion also ausgedrucket werden AE : ae = EG : eg, oder mit verwechselten Gliedern dergestalt AE : EG = ae : eg.

F. 194.

§. 55. Man siehet auf eben die Art, daß auch die Verhältniß des halben Umkreises EAG zu dem halben Umkreise eag der Verhältniß der Durchmesser EG : eg, oder der Verhältniß der Halbmesser EF : eF, gleich sey; und mit der Verhältniß des ganzen Umkreises EAGE zu dem Umkreise eage ist es eben so beschaffen. Man kan dieses auch der-

dergestalt schliessen. Nicht nur die Ausschnitte EFA, eFa, sondern auch die Ausschnitte AFG, aFg haben an ihrem Mittelpuncte gleiche Winkel. Gleichwie also die Verhältniß EA:ea der Verhältniß EF:eF gleich ist, so ist auch die Verhältniß AG:ag eben dieser Verhältniß EF:eF gleich, und demnach EA:ea=AG:ag. Man setze die Glieder dieser gleichen Verhältnisse zusammen, und mache EA+AG, ea+ag, das ist EAG und eag. Die Verhältniß wird dadurch nicht geändert, VI, 102. und es bleibet also auch EAG:eag=EF:eF=EG:eg. Wie sich aber der halbe Umkreis EAG zu dem halben Umkreise eag verhält, so verhält sich auch der ganze Umkreis EAGE zu dem ganzen Umkreise eage.

§. 56. Wenn man die Glieder dieser Proportion versetzet, so siehet man wieder, daß sich der Umkreis EAGE zu seinem Durchmesser EG verhalte, wie sich der Umkreis eage zu seinem Durchmesser eg verhält. Und wenn man demnach die Verhältniß des Umkreises eines Cirkels zu seinem Durchmesser durch Zahlen oder gerade Linien angeben könte, so wäre dadurch die Verhältniß eines jeden anderen Cirkelkreises zu seinem Durchmesser bekannt. Wir verstehen aber unter der Grösse des Umkreises eine gerade Linie, welche, wenn sie in die gehörige Ründung gezogen wird, mit dem Umkreise des Cirkels zusammen fället.

§. 57. Und da also so wohl die Verhältniß der ganzen Umkreise jeder zween Cirkel, als auch die Verhältniß zweer Bogen dieser Cirkel, deren Halbmesser gleiche Winkel einschliessen EA:ea, der Verhältniß ihrer Durchmesser gleich ist, oder da EAGE: eage = EG : eg, und EA:ea=EG:eg, so folget, daß auch die Verhältniß der Umkreise EAGE: eage, der Verhältniß der gedachten Bogen EA:ea gleich sey, oder daß EAGE:eage=EA:ea, woraus ferner folget EAGE:EA=eage:ea, wenn man nemlich die mittleren Glieder verwechselt, wie allezeit geschehen kan. Nemlich, jede zween Bogen zweer Cirkelkreise, deren äusserste Halbmesser AF und EF, wie auch aF und eF bey dem Mittelpuncte F gleiche Winkel einschliessen, verhalten sich gegen einander, wie die ganzen Umkreise, zu welchen sie gehören. Der Bogen EA verhält sich zu seinem Umkreise EAGE, wie sich der Bogen ea zu seinem Umkreise eage verhält.

§. 58. Man kan sich auch folgender gestalt ausdrucken, wenn man bis auf die Begriffe der Verhältnisse getheileter Grössen VI, 31. zurück gehen wil, welche wir bey dem allerletzten Satze EA:EAGE=

VII. Abschnitt. ea : eage anwenden wollen. Wenn man die Umkreise EAGE und eage in eine gewisse Zahl gleicher Theile theilet, und zum Exempel einen jeden derselben 360 gleiche Theile giebet, so lässet sich der Bogen EA aus den gleichen Theilen des Umkreises EAGE eben so zusammen setzen, wie der Bogen ea aus den Theilen des Bogens eage zusammen gesetzet wird, und wenn zum Exempel ea 72 Theile hält, deren 360 den Umkreis eage ausmachen, so bestehet auch EA aus 72 solchen Theilen, deren 360 in dem ganzen Umkreise EAGE enthalten sind.

§. 59. Und dieses ist auch von der Helfte, oder dem vierten Theile des Umkreises richtig. Die Verhältniß des ganzen Umkreises EAGE zu dem ganzen Umkreise eage, ist der Verhältniß des halben Umkreises EAG zu dem halben Umkreise eag gleich, wie auch der Verhältniß des vierten Theiles des Umkreises EAGE zu dem vierten Theile des Umkreises eage. Da nun die Verhältniß des Bogens EA zu dem Bogen ea, der Verhältniß der Umkreise EAGE : eage gleich ist; so wird eben diese Verhältniß EA : ea auch der Verhältniß der halben Kreise EAG : eag, und der Verhältniß der vierten Theile der Umkreise gleich seyn: oder die Proportion EA : ea = EAG : eag wird ihre Richtigkeit haben, wie auch die folgende, welche aus dieser entstehet, wenn man die mittleren zwey Glieder verwechselt EA : EAG = ea : eag. Aus dieser letzteren Proportion wird geschlossen, daß, wenn man die halben Cirkelkreise EAG und eag in gleiche Zahlen gleicher Theile theilet, auch die Bogen EA und ea gleiche Zahlen von solchen Theilen enthalten werden. VI, 31. Nur muß man die Theilichen so kleine nehmen, daß noch kleinere Theilichen, in Ansehung des Ganzen, in keine Betrachtung kommen können. VI. 8.

§. 60. Es ist leicht einzusehen, daß alles was von der Aehnlichkeit der Bogen gesaget worden, von solchen Bogen alleine gelte, welche zu zween Ausschnitten gehören, deren Winkel an dem Mittelpuncte gleich sind, und daß die Bogen solcher Ausschnitte, deren Winkel an dem Mittelpuncte verschiedene Grössen haben, ohnmöglich ähnlich seyn können. Und wenn man demnach auf zwo gerade Linien AB, ab aus C und c die halben Cirkelkreise ABD, abd beschreibet, und theilet dieselbe in D und d, dergestalt, daß sich AD zum ADB verhalte, wie sich ad zum adb verhält; so müssen die Winkel ACD und acd einander gleich seyn. Denn weil dasjenige, so von der Aehnlichkeit zweer Bogen und von ihren gleichen Verhältnissen zu den ganzen oder halben

F. 195.

den Umkreisen gesaget worden, nurin dem Falle statt finden kan, wenn die Winkel an den Mittelpuncten gleich sind, und weil sich demnach in unserer Figur AD zum ADB ohnmöglich so verhalten kan, wie sich ad zum adb verhält, wenn nicht der Winkel ACD, dem Winkel acd gleich ist; so folget, daß weil man die Verhältnisse AD:ADB, und ad zum adb von einerley Grösse gemachet, diese Winkel ACD, acd einander nothwendig gleich seyn müssen.

§. 61. Wenn man also den halben Cirkel ADB in eine gewisse Zahl gleicher Theile theilet, was man vor eine annehmen wil, zum Exempel 180, und theilet adb in eben so viele gleiche Theile, giebet hernach dem Bogen AD eine gewisse Zahl der Theile des halben Umkreises ADB und dem Bogen ad eben so viele Theile seines halben Umkreises adb, und ziehet die Halbmesser DC, dc; so werden die Winkel ACD, acd von einerley Grösse. Und eben dieses ist richtig, man mag sonst wie man wil die Verhältnisse AD:ADB und ad:adb einander gleich machen. Wir werden dieses so gleich noch auf eine andere Art erweisen.

§. 62. Der Satz, welchen wir hierzu gebrauchen, und welcher auch an sich nützlich ist, ist nachfolgender: Jede zween Winkel ABC und ABD verhalten sich gegen einander, wie sich die Bogen AC und AD gegen einander verhalten, welche aus ihren Spitzen B mit einerley Oefnung des Cirkels beschrieben worden, und es ist allezeit ABC:ABD=AC:AD. Wir haben in der Figur die zween Winkel an eine Seite AB dergestalt geleget, daß auch ihre Spitzen in B zusammen fallen: man siehet aber leicht, daß, was von dergestalt gelegeten zween Winkeln richtig ist, auch alsdann gelten müsse, wenn sie von einander abgesondert sind. Die Richtigkeit aber der angegebenen Proportion einzusehen, hat man nur den Bogen AD in eine beliebige Zahl gleicher Theile zu theilen, und so oft es nöthig ist, diese Theilchen bis über C fortzusetzen, welches vermittelst der Puncte E, F, G, H &c. geschehen kan, sodann aber die gerade Linien EB, FB, GB, HB und die übrigen nach dem Mittelpunct zu ziehen. Es werden dadurch die einzelnen Winkel um B, ich meyne ABE, EBF .... GBH ... alle gleich, V, 3 und ist demnach der Winkel ABD in so viele gleiche Winkel getheilet worden, als viele der Theile des Bogens AD sind. Hieraus aber ist unser Satz klar, ohne daß es nöthig ist, dabey viele Worte zu machen. Denn man siehet leicht, daß das Punct C, in das Theilchen des Bogens GH falle, welches von dem ersten Theilchen

F. 196. 197.

chen EA um so viele Theile absteht, als viele Winkel zwischen dem ersten ABE und dem Winkel GBH stehen, in welchen die Linie CB fället. Nemlich gleich wie GH in der 196 Figur das vierte der gleichen Theile des Bogens AD ist, so ist auch GBH das vierte der gleichen Theile des Winkels ABD, und gleich wie in der 197 Zeichnung das Punct C in das siebente Theilichen des Bogens ADH fället, so fället auch CD in das siebende Theilichen des Winkels ABH: Und so ist es allezeit, man mag den Bogen, und mit demselben den Winkel in so viele gleiche Theile theilen, als man wil. Wenn aber dergleichen bey allen Theilungen zutrift; so haben wir gesehen, VI, 60. daß sich AC zum AD verhalte, wie sich ABC zum ABD verhält.

§. 63. Oder man erwege, daß indem der Radius AB, sich um das Punct B drehet, und mit seinem äussersten Puncte A den Bogen AC, und so dann auch AD, mit gleichförmiger Bewegung beschreibet; durch eben diese Bewegung auch die Winkel ABC, ABD mit den Bogen zugleich erzeuget werden, und gleichförmig anwachsen. Denn indem die gleichen Theile des Bogens AE, EF ... GH entstehen, entstehen auch die gleichen Winkel ABE, EBF, ... GBH. Und hieraus ist wieder klar, daß AC : AD = ABC : ABD. VII, 62.

§. 64. Ist nun der Winkel ABD gerade, so ist AD ein Quadrant, V, 10. und es verhält sich demnach ein jeder Winkel ABC zu einem geraden Winkel ABD, wie sich der Bogen, der innerhalb des Winkels AC aus seiner Spitze beschrieben worden, zu dem Quadranten AD verhält. Und man kan demnach durch diese Verhältniß der Bogen einen jeden Winkel anzeigen. Wenn man weiß, wie sich AD zum AC verhält; so kan man allezeit schliessen. AD : AC = ABD : ABC, und da das dritte Glied bekannt ist, nemlich der rechte Winkel, so kan das vierte Glied oder der Winkel ABC nicht unbekant seyn. Es ist leicht einzusehen, daß dieses richtig sey, es mag der Winkel ABC kleiner oder grösser seyn als ein rechter Winkel, und folgends AC kleiner oder grösser als ein Quadrant.

§. 65. Und es können demnach durch dergleichen Verhältnisse der Bogen alle Winkel angegeben werden, aber man muß zum voraus setzen, daß man einen Bogen in so viele gleiche Theile theilen könne als man wil, wenn die Verhältniß des Quadranten zu dem Bogen des Winkels, dessen Grösse man anzeigen wil, durch Zahlen gegeben ist, damit man nemlich den Quadranten in so viele gleiche Theile theilen

könne

könne, als erfordert wird, damit man aus einer gehörigen Anzahl solcher Theile hernach den andern Bogen zusammen setzen könne. Oder, wenn die Verhältniß des Bogens AC zu dem Quadranten AD durch gerade Linien ausgedruckt wird, so muß man wissen zu diesen zwo geraden Linien, und zu dem Quadranten AD die vierte Proportional-Grösse zu finden. Dieses letztere zu wissen, ist nicht in der Macht der Geometrie, das erstere kan man zwar ohne sonderlichen Fehler thun, weil man einen jeden Bogen in so viele gleiche Theile theilen kan als man wil, wie wir gelehret V, 79. Es ist aber dieses eine mechanische und keinesweges eine geometrische Arbeit.

§. 66. Indessen pfleget man deswegen, weil, so bald die Verhältniß des Bogens eines Winkels zu einem Quadranten bekannt ist, auch der Winkel bekannt wird, den Bogen, welcher aus der Spitze eines Winkels zwischen seinen Schenkeln beschrieben wird, das **Maaß des Winkels** zu nennen. Zwar kan man nicht sagen, daß ein Bogen jemals einen Winkel messe, wenn man recht eigentlich reden wil. Denn das Maß, wenn man das Wort im eigentlichen Verstande nimmet, muß allezeit, wenn es wiederhohlet wird, oder wenn seiner Theile eines oder etliche genommen werden, dasjenige ausmachen, so gemessen werden sol. Man misset eine Länge durch Ellen, oder durch Ruthen und Schuhe, das ist nach anderen Längen, und nicht nach Pfunden, und die Gewichte der Dinge misset man durch andere Gewichte, und nicht durch Ellen. Ein Bogen aber mag getheilet und wiederhohlet werden wie man wil, so wird dadurch kein Winkel, und kan demnach der Bogen ohnmöglich das eigentliche Maß des Winkels seyn. Es ist demnach bloß dieses die Ursache, warum man den Bogen das Maß des Winkels nennet, mit welchem er den Ausschnitt eines Cirkels ausmachet, weil der Bogen mit dem Winkel zugleich anwächset, so daß immer gleiche Theile des Bogens mit gleichen Theilen des Winkels zugleich entstehen. Woraus folget, daß so bald als die Verhältniß eines Bogens zu einem Quadranten gegeben wird; eben dadurch die Verhältniß des Winkels zu einem rechten Winkel bekant wird. Wodurch dann der Winkel selbst gegeben wird, weil die Grösse des rechten Winkels allezeit bekant ist. Es giebet also die Verhältniß eines Bogens zu dem Quadranten an, wie sich der Winkel desselben Bogens aus dem rechten Winkel, aus welchem die Grösse der Winkel bestimmet zu werden pfleget, und welcher so zu reden, als der Maßstab der Winkel angesehen wird, ausmessen lasse, eben so wie

VII. Abschnitt. eine Zahl anzeigen kan, wie oft eine Elle in einer andern Länge enthalten ist. Und in dem Verstande, in welchem man öfters die Zahl der Ellen, Ruthen oder Schuhe, so in einer gewissen Länge enthalten sind, das Maß dieser Länge nennet, wird auch der Bogen das Maß des Winkels genennet.

§. 67. Es können bey ähnlichen Bogen noch einige Kleinigkeiten angemerket werden, welche aus dem besageten gar leicht fliessen. F. 198. 199. Aehnliche Bogen verhalten sich wie ihre Sehnen; das ist, wenn die Cirkelbogen ABC und abc einander ähnlich sind, so ist nachstehende Proportion richtig, ABC : abc = AC : ac. Und dieses ist fast ohne weiterem Beweiß klar, wenn man nur betrachtet, daß diese Sehnen AC und ac in den ähnlichen Bogen auf einerley Art gezogen sind. VII, 58. Oder, wenn man die Sache deutlicher einsehen wil, so ziehe man nach den Mittelpuncten der Bogen D, d die Halbmesser AD, CD, wie auch ad, cd. Weil nun die Bogen ABC und abc ähnlich sind, so sind die Winkel bey D, d einander gleich. VII, 60. Und da ferner die Verhältniß AD : DC der Verhältniß ad : dc gleich ist, massen in beyden die vorhergehenden Glieder den nachfolgenden gleich sind: so sind VII, 28. die Dreyecke ADC, adc ähnlich, und die Verhältniß AD : ad ist der Verhältniß AC : ac gleich. Da nun aber die erstere dieser Verhältnisse AD : ad der Verhältniß der ähnlichen Bogen ABC : abc gleich ist, VII, 53. so muß auch die letztere AC : ac eben dieser Verhältniß der ähnlichen Bogen gleich seyn, und man hat demnach ABC : abc = AC : ac.

§. 68. Dergleichen Abschnitte ABC, abc, deren Bogen einander ähnlich sind, sind auch selbst einander ähnlich. Nichts ist leichter einzusehen als dieses; wenn wir nur dasjenige im Gedächtniß haben, so wir oben von den ähnlichen Figuren überhaupt gesaget, VII, 44. aus welchen es auf mehr als eine Art fliesset. Doch es ist genug daß wir betrachten, daß diese Abschnitte aus den ähnlichen Ausschnitten ABCD, abcd entstanden sind, indem man von diesen beyderseits die ähnlichen Dreyecke ACD, acd weggenommen, oder zu denselben hinzu gesetzet. Wir haben aber gesehen, daß überhaupt alle Figuren ähnlich sind, welche übrig bleiben, wenn man von ähnlichen Figuren nach und nach ähnliche Dreyecke wegnimmet, oder zu denselben hinzu setzet. Wenigstens ist dieses durch unsere Beweise VII, 44. klar worden.

Die

Die Verhältniß verschiedener geraden Linien, so einen Cirkel schneiden oder berühren.

VII. Abschnitt.

§. 69. Wir haben nunmehro bey dieser Materie nichts mehr übrig, als daß wir noch einige Proportiones bey solchen geraden Linien betrachten, welche den Umkreis eines Cirkels schneiden oder berühren. Es wird sich dieses alles auf einen einzigen Hauptsatz bringen lassen. Dieser betrift zwo gerade Linien, welche von einem nach Belieben angenommenen Puncte beiderseits so lange fortgezogen werden, bis sie den Umkreis des Cirkels erreichen. Die Theile dieser Linien zwischen dem Umkreise und dem beliebig angenommenen Puncte sind einander proportional.

§. 70. Man nehme innerhalb oder ausserhalb des Umkreises eines Cirkels ein Punct A wo man wil, und ziehe durch dasselbe zwo gerade Linien, welche den Umkreis des Cirkels in B und C; D und E schneiden, oder schneiden würden, wenn man sie verlängerte, so sind die vier Theile dieser Linien dergestalt proportional, daß man sagen kan BA: AE = AD: AC, und welches aus diesem fliesset BA: AD = AE: AC; und diese Proportion ist zu erweisen. Man ziehe zu dem Ende BE und DC; so siehet man leicht, daß die Winkel an dem Umkreise bey E und C beide auf dem Bogen BD stehen. Da nun alle Winkel an dem Umkreise eines Cirkels, die auf einem Bogen stehen, einander gleich sind V, 57. so sind auch diese Winkel BED und BCD einander gleich. Es sind aber auch die einander bey A entgegen stehende, oder in einen zusammenfallende Winkel gleich, und haben demnach die Dreyecke CAD und EAB zween gleiche Winkel, nemlich die bey A, und so dann ACD = AEB. Also sind diese Dreyecke ACD, AEB einander ähnlich VII, 23. und ihre Seiten, die zwischen gleichen Winkeln liegen, sind proportional. Es ist also BA: AD = AE: AC, oder BA: AE = AD: AC, denn diese Seiten liegen zwischen den gleichen Winkeln.

F. 200. 201.

§. 71. Wir wollen die Folge des ersten Falles dieses Satzes betrachten, da A innerhalb des Cirkels fället, ehe wir weiter gehen. Wenn eine der beiden Linien in A in zwey gleiche Theile getheilet ist, zum Exempel wenn AD = AE, so gehet die Proportion BA: AD = AE: AC in einem fort, und ist zusammenhangend. Denn man kan hier vor das dritte Glied AE, die ihm gleiche Linie AD setzen, wodurch die Proportion wird BA: AD = AD: AC, und dadurch siehet

F. 200. 202.

VII. Abschnitt. het man, was gesagt worden ist, deutlich. Dieses kan uns eine Anweisung geben, wie zwischen zwo gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden ist. Gesetzt die zwo gegebenen geraden Linien wären BA und AC, und man wolte die mittlere Proportionallinie zwischen denselben haben, so müste man nur, nachdem man einen Cirkelkreis durch B und C nach Belieben gezogen, hernach die Linie DAE in denselben durch das Punct A so legen, daß die Theile derselben DA und AE gleich würden, so wäre ein solcher Theil AD oder AE die mittlere Proportionallinie.

§. 72. Diese Lage aber der Linie DE, in welcher sie von dem Puncte A in zwey gleiche Theile geschnitten wird, bekommet man am leichtesten, wenn man BAC vor den Durchmesser annimmet, und so dann DAE durch das Punct A auf denselben perpendicular ziehet, V, 19. wodurch die Auflösung der Aufgabe, zwischen zwo gegebenen geraden Linien eine mittlere Proportionallinie zu finden, gar leichte wird. Es seyen die zwo gegebenen geraden Linien BA, AC: Denn man muß vor allen Dingen diese Linien dergestalt an einander setzen, daß sie mit einander eine gerade Linie BC ausmachen. Diese Linie BC nehme man vor den Durchmesser eines Cirkel-kreises an, welchen man beschreibet, indem man nemlich, wie bekannt genug ist, BC in zwey gleiche Theile theilet, und dadurch den Mittelpunct und den Radius findet. Ist der Cirkel beschrieben, so ziehe man nunmehro auf BC durch A die Sehne DE perpendicular, so ist DA oder EA die gesuchete mittlere Proportionallinie, und man kan sagen BA : AD = AD : AC; oder BA : AE = AE : AC. Es ist aus dem so wir gesaget die Richtigkeit dieser Auflösung gar leicht einzusehen, und fast kein weiterer Beweiß nöthig. Nach dem allgemeinen Satze ist BA : AD = AE : AC. Weil aber auf die Sehne EAD der Durchmesser BAC perpendicular gezogen ist, so wird ED in A in zwey gleiche Theile getheilet V, 19. und ist AD = AE. Wenn man demnach in dieser Proportion vor AD die AE setzet, so wird allerdings BA : AE = AE : AC, oder auch BA : AD = AD : AC.

F. 202.

§. 73. Man siehet leicht, daß in der Ausübung man die eine Helfte des Cirkelkreises nicht brauchet, und daß man so gleich die mittlere Proportionallinien zwischen zwo geraden Linien BA, AC findet, wenn man auf BC den halben Cirkel BEC beschreibet, und so dann auf den Durchmesser BC an das Punct A die Perpendicular-

linie

linie AE aufrichtet, und sie bis an den Cirkelkreis in E verlängert. Es ist so dann AE die gesuchte mittlere proportionallinie. Und man kan dieses in Form eines Satzes dergestalt verfassen: wenn man auf den Durchmesser eines Cirkels BC eine Perpendicularlinie AE setzet, welche bis an den Umkreis reichet, so ist diese die mittlere Proportionallinie zwischen den Theilen des Durchmessers BA und AC, und man kan sagen BA: AE = AE: AC.

§. 74. Es gehet auch in dem andern Falle wenn A ausser dem Cirkel genommen ist, die Proportion AB: AD = AE: AC in einem fort, wenn AD der AE gleich wird. Dieses kan nicht geschehen so lange ADE den Cirkel würklich schneidet, denn da ist allezeit AE grösser als AD. Da aber die Proportion AB:AD = AE: AC überhaupt gilt, es mögen die Linien AC, AD gezogen seyn, wie man wil, wenn sie nur den Umkreis antreffen, so wird dieselbe auch dadurch nicht aufgehoben, wenn AE sich von der AC immer weiter und weiter entfernet, und dadurch der Theil derselben ED immer kleiner und kleiner wird, und sich endlich gar verlieret, indem die Puncte D und E in eines zusammen fallen. Dieses geschiehet in dem Falle, wenn AD den Cirkel berühret. In diesem Falle fället kein Theil desselben innerhalb des Cirkels, die Puncte D und E fallen zusammen, und die Länge DE verschwindet. Man wird demnach auch in diesem Falle die erwiesene Proportion formiren können, und sagen, AB: AD = AE: AC, aber weil hier AD = AE, so kan man eines vor das andere nehmen, und auch setzen AB: AD = AD: AC.

F. 201. 203.

F. 203.

§. 75. Woraus erhellet, daß die Berührungslinie aus dem Puncte A, nemlich AD die mittlere Proportionallinie sey zwischen den Theilen AB und AC einer andern Linie ABC, welche aus einem Puncte A der Berührungslinie dergestalt gezogen ist, daß sie den Umkreiß des Cirkels in einem Puncte B schneidet, und sich ferner in C in dem Umkreise endiget. Und dieses kan eine neue Anweisung geben zwischen zwo geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden. Es seyen die gegebene Linien AB und AC. deren kleinere man auf die grössere, aus dem Puncte A geleget. Man beschreibe einen Cirkelkreis durch die beiden Puncte B und C, und ziehe durch A eine gerade Linie AD, welche diesen Cirkel berühre: Diese ist die gesuchete mittlere Proportionallinie. Die Anweisung ist leicht zu begreiffen, aber die Ausübung ist etwas schwerer als die vorige, und erfordert

VII. Abschnitt.

ausser dem bereits beschriebenen Cirkel, noch die Beschreibung eines andern Cirkels, vermittelst welchen man das Punct DE findet, an welches die Berührungslinie AD zu ziehen ist V, 73.

§. 76. Solte man aber bey dem gegebenen Beweise, daß AB : AD = AD : AC Schwierigkeit finden, so ziehe man wie in der 291 Figur, aus welcher die gegenwärtige 203 geflossen, die Linien DC und BE: so ist der Winkel BDA, welchen die Berührungslinie DA mit der Sehne DB machet, gleich dem Winkel DCB, der bey C an den Umkreis stösset, und auf eben dem Bogen BD stehet, welchen die Sehne BD abschneidet V, 61. Da nun auch der Winkel A den beiden Dreyecken ADB, ACD gemeinschaftlich ist, so sind zween Winkel des erstern dieser Dreyecke ABD, nemlich A und ADB gleich zween Winkeln des andern ACD, nemlich dem A und dem DCA. Demnach sind VII, 23 diese Dreyecke ähnlich, und es verhält sich in dem kleineren BA zur AD, wie sich in dem grösseren AD zur AC verhält, und also ist die Proportion AB : AD = AD : AC richtig.

F. 203.

§. 77. Wenn bey dieser Figur DC durch den Mittelpunct gehet, und also ein Durchmesser des Cirkels ist, so wird die Erfindung der mittleren Proportionallinie nach dieser Art viel leichter. In diesem Falle ist der Winkel ADC, welchen die Berührungslinie AD mit dem Durchmesser DC machet, gerade, V, 47. und EBC ist ebenfals ein gerader Winkel, denn er stehet in dem halben Cirkel DBC, V, 68. Demnach ist ADC ein rechtwinklichtes Dreyeck, und aus der Spitze des rechten Winkels D ist auf die entgegen gesetzte Seite AC die Perpendicularlinie DB gefallen, die Seite aber AD ist die mittlere Proportionallinie zwischen AB und AC.

§. 78. Man pfleget dieses insgemein auf eine andere Art zu beweisen, und wir wollen diesen Beweiß mit beybringen, weil er uns die Sache deutlicher machen kan. Wir haben in dem halben Cirkel ADC das rechtwinklichte Dreyeck ADC beschrieben, und aus der Spitze des rechten Winkels D die gerade Linie DB auf die entgegen gesetzte Seite, das ist auf den Durchmesser AC, perpendicular gezogen: es ist zu beweisen, daß die Proportion richtig sey: AB : AD = AD : AC. Es giebet sich aber dieser Beweiß gar leicht, wenn man betrachtet, daß in den beiden rechtwinklichten Dreyecken ADC, ABD die Winkel bey A gemeinschaftlich sind. Denn daraus folget, daß diese Dreyecke ADC, ABD, einander ähnlich sind, weil zween Win-

F. 204.

kel des einen ADC und A zween Winkeln des andern, ABD und A, gleich sind. Es sind also die Seiten dieser Dreyecke proportional, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, und demnach verhält sich in dem Dreyecke ABD die Seite AB zu der Seite AD, wie sich in dem Dreyecke ADC die Seite AD zur Seite AC verhält. Kurz es ist AB: AD = AD: AC.

§. 79. Man siehet leicht, daß man auf eben die Art erweisen könne, daß auch das Dreyeck BDC dem Dreyecke ADC ähnlich sey. Denn auch das Dreyeck DBC hat bey B einen rechten Winkel, und der Winkel C ist demselben und dem Dreyeck ADC gemeinschaftlich. Also kan man auch sagen BC: CD = CD: AC. Es ist aber dieser Satz von dem vorigen gar nicht unterschieden.

§. 80. Man kan noch einige andere Proportionen aus der Aehnlichkeit dieser Dreyecke ziehen, welche anzuführen nicht eben nöthig ist. Wir bemerken nur, daß aus dem gegenwärtigen Satze die mittlere Proportionallinie zwischen AB und AC folgender Gestalt zu finden sey. Nachdem man die kleinere dieser Linien aus A auf die grössere AC geleget: so beschreibe man auf die grössere dieser Linien AC einen halben Cirkel ADC. An das Punct B, wo sich die kleinere Linie endiget, setze man BD auf AC perpendicular, welche den Umkreis in D schneiden wird. Die Linie AD, welche nunmehro leicht kan gezogen werden, ist die mittlere Proportionallinie, welche man suchte.

§. 81. Weil das Dreyeck ABD so wohl, als das Dreyeck DBC, dem Dreyecke ADC ähnlich ist; so sind auch diese Dreyecke ABD, DBC einander ähnlich. Nemlich weil in den Dreyecken ABD, ADC die rechten Winkel ABD und ADC gleich sind, und A = A, so ist auch ADB = C, und folgends sind in den zwey rechtwinklichten Dreyecken ABD, DBC, ausser den geraden Winkeln bey B, auch die Winkel ADB und C gleich, und demnach diese Dreyecke einander ähnlich. Vergleichet man nun wieder in diesen Dreyecken die Seiten, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, so verhält sich in dem Dreyecke ABD die Seite AB zu der Seite BD, wie in dem Dreyecke DBC sich die Seite DB zur Seite BC verhält, das ist, es ist AB: BD = BD: BC. Denn diese Seiten liegen in beiden Dreyecken zwischen gleichen Winkeln. Dieses ist der Satz, welchen wir oben VII, 73. auf eine andere Art heraus gebracht haben.

VIII. Abschnitt.

Achter Abschnitt.

Von der Zusammensetzung der Verhältnisse.

§. 1.

So weit konten wir in der Geometrie kommen, indem wir blos die einfache Verhältnisse zum Grund legeten. Das übrige kommet grossen Theils auf zusammengesetzete Verhältnisse an, welche wir demnach uns ebenfals bekannt machen wollen, ehe wir weiter gehen, damit so dann alles in einem unzerrissenen Zusammenhange abgehandelt werden könne. Es stehet uns nemlich noch die Betrachtung der Oberflächen und Cörper vor, nachdem wir von den geraden Linien und dem Cirkelkreise alle diejenige Eigenschaften betrachtet haben, welche einem angehenden Geometra zu wissen nöthig sind. Und diese sind es bey deren Vergleichung das meiste auf die zusammengesetzete Verhältnisse ankommet.

Begriffe von der Zusammensetzung der Verhältnisse.

§. 2. Wir müssen uns vor allen Dingen einen Begrif davon machen, was diese Zusammensetzung der Verhältnisse eigentlich heisse, und dieses wird am leichtesten geschehen können, wenn wir die Sache zuerst durch Zahlen erläutern, und so dann auch auf die ungetheilte Grössen übergehen. Die Verhältniß der Zahl 5 zu 3 ist die Art und Weise wie die Zahl 5 aus der 3 entstehet VI, 31. Man kan aber 5 unmittelbar aus der 3 machen. Man theile zu dem Ende diese letztere Zahl 3 in ihre Einheiten, und setze deren fünfe zusammen, so hat man die erstere Zahl 5. Stellet man sich dieses vor, so hat man einen Begrif von der Verhältniß 5 : 3, und man siehet diese Verhältniß als einfach an. Man kan aber auch die 5 aus der 3 durch einen oder etliche Absätze erhalten, folgender gestalt: Man mache aus der Zahl 3 erstlich die 30, indem man nemlich diese Zahl durch 10 multipliciret; und diese Zahl 30 theile man durch 6. so kommet wieder die Zahl 5. Indem man sich vorstellet, daß die Zahl 5 auf diese Art aus der Zahl 3 entstehen könne, so stellet man sich zwar ebenfals die Verhältniß der 5 zu 3 vor: aber man betrachtet diese Verhältniß nicht als ein-

einfach. Man machet die 5 nicht unmittelbar aus der 3, sondern man machet aus der 3 erstlich eine andere Zahl 30, und indem man betrachtet, wie diese Zahl 30 aus der 3 entstehe, so stellet man sich die Verhältniß 30 : 3 vor. Aus der ersteren dieser Zahlen 30 machet man sodann die 5, welches wieder nicht geschehen kan, wenn man sich nicht die Art und Weise, wie 5 aus der 30 wird, das ist, die Verhältniß 5 : 30, vorstellet. Und man machet sich also in dem Falle, welchen wir betrachten, einen Begrif von der Verhältniß 5 : 3, indem man die zwo Verhältnisse 30 : 3 und 5 : 30 betrachtet. Dieses will man andeuten, wenn man saget, man setze die Verhältniß 5 : 3 aus den zwo Verhältnissen 5 : 30 und 30 : 3 zusammen.

§. 3. Eben so ist es, wenn man mehrere Zahlen annimmet. Man schreibe, nach Belieben, einige Zahlen vor sich, als diese nachstehende:

5 10 12 9 3

Man kan sich vorstellen, wie die zwote Zahl von der letzten, 9, aus der letzten 3 werde, wenn man nemlich die letzte Zahl dreymal nimmt, und weil man hier die Zahl 9 unmittelbar aus der 3 machet, so stellet man sich die Verhältniß 9 : 3 als einfach vor. Aus dieser Zahl 9 kan man weiter die Zahl 12 machen, welche die dritte von der letzten ist, wenn man $\frac{4}{3}$ der 9 annimmt. Eben damit wird auch diese Zahl 12 aus der letzten 3 gemacht. Denn weil man die zwote Zahl von der letzten, 9, aus der 3, und aus der 9 wieder die vorhergehende 12 gemacht, so ist allerdings diese 12 endlich aus der 3 gemacht worden. Und stellet man sich die Art vor, wie 9 aus der 3, und aus der 9 wieder 12 wird, so hat man allerdings eben dadurch einen Begrif von der Art und Weise, wie 12 aus der 3 wird: und folgends stellet man sich die Verhältniß 12 : 3 dadurch vor, wenn man sich die Verhältnisse 9 : 3 und 12 : 9 vorstellet.* Eben dadurch aber, weil man sich die Verhältniß 12 : 3 nicht auf einmal, sondern durch zwo Verhältnisse 9 : 3 und 12 : 9 vorstellet, so setzet man die Verhältniß 12 : 3 aus den ebenerwehnten 9 : 3 und 12 : 9 zusammen. Gehet man weiter, und betrachtet, daß man aus der Zahl 12 wieder die Zahl 10 machen könne, wenn man $\frac{5}{6}$ der erstern Zahl 12 annimmt, so stellet man sich wieder die Verhältniß 12 : 10 auf einmal vor, und als einfach. Setzen wir aber zum Voraus, daß man auch die Verhältnisse 12 : 9 und 9 : 3 wisse, so bekommt man eben dadurch, indem man sich auch die Verhältniß 10 : 12 vorstellet, einen Begrif von der Verhältniß 10 : 3. Aber diese Verhältniß 10 : 3 ist nunmehr aus den drey Verhältnissen 9 : 3, 12 : 9 und 10 : 12 zusammen gesetzt,

 als

VIII. Abschnitt.

als von welchen allen man Begriffe haben muß, wenn man sich die Verhältniß 10: 3, auf die Art, die wir hier angeben, vorstellen soll. Stellet man sich nun ausser der vorigen auch die Verhältniß 5: 10 vor, so erlanget man auch einen Begrif von der Verhältniß 5: 3, denn man siehet, wie 5 aus der 3 entstehen könne. Allein weil man 5 aus der 3 nicht unmittelbar gemacht, sondern durch vier Absätze, indem man nemlich aus der 3 erstlich 9, sodann aus der 9 die Zahl 12, aus dieser wieder 10, und sodann erst aus 10 die 5 heraus gebracht; und weil man sich die vier Verhältnisse 9: 3, 12: 9, 10: 12 und 5: 10 alle vorgestellet, indem man sich einen Begrif von der Verhältniß 5: 3 machen wollen, so setzet man die Verhältniß 5: 3 aus den besagten vier Verhältnissen zusammen.

§. 4. Man siehet aus dieser Erklärung, daß nicht die Beschaffenheit der Verhältnisse die Ursach sey, warum man sie einfach oder zusammen gesetzt nennet, oder warum man saget, eine Verhältniß sey aus zwo, drey oder vier andern zusammen gesetzet; sondern daß alles bloß darauf ankomme, wie wir uns eine Verhältniß vorstellen. Eine jede Verhältniß 5: 3 ist an sich einfach, und ich stelle sie mir bloß als aus zwoen zusammen gesetzet vor, wenn ich ein Glied 9, zwischen 5 und 3 setze, und mir die Verhältniß 5: 3 dadurch vorstelle, daß ich betrachte, wie 9 aus 3, und aus der 9 wieder 5 wird. Eben diese Verhältniß 5: 3 hätte ich auch aus dreyen, oder vieren, oder mehrern zusammen setzen können. Es kommt alles bloß auf die Art an, wie man sich die Verhältnisse vorstellen will.

§. 5. Und zwar ist es gänzlich willkührlich, was man vor eine Zahl zwischen die Glieder einer Verhältniß setze, wenn man dieselbe aus zwo Verhältnissen zusammen setzen will; und was man vor zwo Zahlen zwischen die Glieder einer Verhältniß bringe, wenn man die Verhältniß aus dreyen zusammen setzen will; wie auch, was vor drey Zahlen man wehle, um sie zwischen die Glieder einer Verhältniß zu setzen, wenn man sich dieselbe, als aus vier Verhältnissen zusammen gesetzet, vorstellen will. Die Verhältniß 3: 2 wird aus den zwoen $3:n$ und $n:2$ zusammen gesetzet; was auch n vor eine Zahl bedeute, wenn nur ihre Grösse bekannt ist, und eben die Verhältniß 3: 2 wird auch aus den drey Verhältnissen $3:n$, $n:m$ und $m:2$ zusammen gesetzet, wie auch aus diesen vieren $3:n$, $n:m$, $m:p$, $p:2$, und auch hier kan

man

man sich unter den Buchstaben n, m, p, jede beliebige Zahlen vorstellen, sie mögen gleich oder ungleich seyn, wie man will.

§. 6. Man darf aber die Verhältnisse, aus welchen man eine andere zusammen setzet, durch jede Zahlen ausdrucken, welche sie ausdrucken können. Der Begrif der Verhältniß wird dadurch nicht geändert, ja er wird zuweilen dadurch erleichtert, wenn man nemlich kleinere Zahlen annimmt, eine Verhältniß auszudrucken, welche vorher durch grössere ausgedrucket worden ist. Man kan sagen, die Verhältniß 12 : 2 sey aus der Verhältniß 12 : 6 und 6 : 2 zusammen gesetzet. Man kan aber auch diese zwo Verhältnisse durch kleinere Zahlen ausdrucken, die erstere 12 : 6 durch 2 : 1, und die zwote 6 : 2 durch 3 : 1, und sodann sagen: Die Verhältniß 12 : 2 werde aus diesen zwo Verhältnissen 2 : 1 und 3 : 1 zusammen gesetzet, und so bey allen übrigen Zusammensetzungen. Man siehet leicht ein, daß dieses in dem Begriffe nichts ändere. Denn wenn man von 2 anfänget, und vor dieselbe eine Zahl setzen will, die sich zur 2 verhält, wie 3 zur 1: so kan man keine andere Zahl finden, als die vorige 6, weil die Verhältniß 6 : 2 der Verhältniß 3 : 1 gleich ist. Und wenn man weiter vor 6 wieder eine andere Zahl setzen will, welche sich zu der 6 verhält, wie 2 zu 1, so kan dieses wieder keine andere Zahl seyn als die 12, weil 12 : 6 = 2 : 1, und man kommt also auf eben die Zahl 12, wenn man aus der Zahl 2 eine andere, nach den Verhältnissen 3 : 1 und 2 : 1, machet, auf welche man kommt, wenn man aus 2 eine Zahl nach den zwo Verhältnissen 6 : 2 und 12 : 6 heraus bringet. Ein mehreres wollen wir durch dasjenige, so wir hier gesaget, nicht verstanden wissen.

§. 7. Sind aber die zwo Verhältnisse, aus welchen eine andere zusammen gesetzet ist, einander gleich, so nennet man die zusammen gesetzete Verhältniß im Lateinischen eine verdoppelte Verhältniß, und ist eine Verhältniß aus drey gleichen Verhältnissen zusammen gesetzet, so sagt man, diese gleiche Verhältniß sey verdreyfältiget, und dadurch die zusammengesetzete Verhältniß heraus gebracht worden. Einem teutschen Leser können diese Worte in seiner Sprache schwerlich gefallen. Wir werden also diese Benennungen unserer Mund-Art etwas gemässer folgendergestalt einrichten. Bey den Zahlen 27, 9, 3 ist die Verhältniß 27 zu 3 aus den zwo Verhältnissen 27 : 9 und 9 : 3 zusammen gesetzet, und diese Verhältnisse sind einander, und der Verhältniß 3 : 1 gleich. Dieses und dergleichen wollen wir ausdrucken,

VIII. Abschnitt.

drucken, indem wir sagen, die Verhältniß 27 : 3 bestehe aus der Verhältniß 27 : 9, oder 9 : 3, oder 3 : 1 zweymal genommen, oder die Verhältniß 27 : 3 sey aus der Verhältniß 3 : 1 zweymal genommen, zusammen gesetzet. Und da bey den Zahlen 81, 27, 9, 3 die Verhältniß 81 zu 3 aus den drey Verhältnissen 81 : 27, 27 : 9, 9 : 3 zusammen gesetzet ist, und diese Verhältnisse einander, und der Verhältniß 3 : 1 wieder gleich sind, so wollen wir dieses dadurch ausdrucken, wenn wir sagen, die Verhältniß 81 : 3 bestehe aus der Verhältniß 81 : 27, oder 27 : 9, oder 9 : 3, oder 3 : 1, dreymal genommen, oder sie sey aus der Verhältniß 3 : 1 dreymal genommen, zusammen gesetzet. Eben so ist bey den Zahlen 81, 27, 9, 3, 1 die Verhältniß 81 : 1 aus der Verhältniß 3 : 1 viermal genommen, zusammen gesetzet worden, oder sie bestehet aus der Verhältniß 3 : 1, viermal genommen.

§. 8. Man kan dieses beides sich durch Zeichen folgendergestalt vorstellen, wenn A, B, C, D &c., und M, N, O, P &c. beliebige Zahlen bedeuten, und es ist

$$A : B = M : N$$
$$B : C = O : P$$
$$C : D = Q : R$$
$$D : E = S : T$$

so sagt man, die Verhältniß A : C sey aus den zwo Verhältnissen M : N und O : P zusammen gesetzet, welche den zwo Verhältnissen A : B und B : C gleich sind: und die Verhältniß A : D sey aus den drey Verhältnissen M : N, O : P, Q : R zusammen gesetzet, welche den drey Verhältnissen A : B, B : C, C : D gleich sind, und die Verhältniß A : E sey aus den vier Verhältnissen M : N, O : P, Q : R, S : T zusammen gesetzet, welche den vier Verhältnissen A : B, B : C, C : D, D : E gleich sind, und so fort. In den ersteren Verhältnissen A : B, B : C, und so weiter, kommt jedes Glied zweymal vor, ausser dem ersten und dem letzten, und stehet einmal forne in der Verhältniß, das andere mal hinten.

§. 9. Sind aber die Verhältnisse M : N, O : P und so fort, einander gleich, und kan man also eine derselben vor die übrigen alle setzen, und folgends schreiben:

$$A : B = M : N$$
$$B : C = M : N$$
$$C : D = M : N$$
$$D : E = M : N$$

so

so bestehet die Verhältniß A: C aus der Verhältniß M: N, zweymal genommen; die Verhältniß A: D bestehet aus eben der Verhältniß M: N, dreymal genommen, und die Verhältniß A: E ist aus der Verhältniß M: N, viermal genommen, zusammen gesetzet.

§. 10. Dieses alles ist nunmehro gar leicht auch auf ungetheilte Grössen anzuwenden; nur muß man, wenn man auch hier bis auf die ersten Gründe zurücke gehen will, sich vorstellen, daß die erste der Grössen A, B aus der andern, so werde, wie wir VI, 69. gezeiget haben, daß eine jede Grösse aus einer andern werden kan, indem nemlich die erstere A durch eben das gleichförmige Wachsthum entstehet, durch welches B erzeuget wird. Doch hat man eben nicht nöthig, so weit zurücke zu gehen. Man kan bey dem anfangen, so wir eben gezeiget haben, und setzen, daß A, B, C, wie auch M, N, P und so fort, dergleichen Grössen bedeuten, welche eben nicht aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind, und merken, daß, wenn die Proportionen richtig sind, die wir VIII, 8. gesetzet: auch hier die Benennungen statt haben, die eben VIII, 7. erkläret worden sind. Man siehet aus dem, so gesaget worden ist, leicht, daß man auch in dem Falle, wenn die Grössen A, B, C, und M, N, P, nicht getheilet sind, in eben dem Verstande sagen könne, die Verhältniß A: C sey aus den zwoen A: B und B: C zusammen gesetzet, wie auch, daß die Verhältniß A: D durch die Zusammensetzung der drey Verhältnisse A: B, B: C, C: D, und die Verhältniß A: E durch die Zusammensetzung der vier Verhältnisse A: B, B: C, C: D und D: E heraus komme. Eben so leicht begreift man auch, daß man die Verhältniß A: B durch die Verhältniß zwoer andern Grössen M: N ausdrucken könne, und die Verhältniß B: C durch die Verhältniß O: P, und daß, wenn dieses geschehen, auch hier die Verhältniß A: C aus den zwoen M: N und O: P, und die Verhältniß A: D aus den dreyen M: N, O: P, Q: R sich zusammen setzen lasse, und so weiter.

§. 11. Eben so leicht kan man auch unter den Buchstaben A, B, C, D, E des 9. Absatzes, sich Linien, oder nach Belieben andere Grössen, vorstellen, deren jede gegen die nachfolgende eine Verhältniß hat, welche der Verhältniß M: N gleich ist, wodurch alle diese Verhältnisse A: B, B: C, C: D und D: E gleich werden. Ist dieses, so ist, wie bey Zahlen, die Verhältniß A: C aus der Verhältniß M: N zweymal genommen, zusammen gesetzet, und die Verhältniß A: D bestehet aus der Verhältniß M: N, dreymal genommen; die Verhältniß A: D aber

VIII. Abschnitt. ist aus eben der Verhältniß M ; N, viermal genommen, zusammen gesetzet.

§. 12. Von diesen zusammengesetzten Verhältnissen sind wieder verschiedene Regeln zu merken, welche wir dergestalt erweisen werden, daß sie sich vor alle Arten der Grössen schicken. Weil aber die Grössen, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzet sind, und deren Verhältniß sich durch Zahlen ausdrucken lässet, öfters einige Eigenschaften voraus haben, und sonst leichter zu übersehen sind, so wollen wir, wie auch vor dem geschehen, uns noch ferner derselben bedienen, das übrige zu erläutern und desto deutlicher zu machen.

Wie die Verhältnisse zusammen zu setzen sind.

§. 13. Wir bemerken vor allen Dingen, daß, wenn ein Verhältniß, deren erstes Glied A gegeben ist, aus zwo andern Verhältnissen M : N und O : P zusammen zu setzen ist, man nachfolgendergestalt verfahren müsse. Man findet erstlich zu M, N und A die vierte Proportional-Zahl, oder die vierte Proportional-Linie. Beides zu verrichten, haben wir gewiesen VI, 115. VII, 13., und es kan also die Zahl oder Grösse, die mit M, N und A die Proportion voll machet, welche wir B nennen wollen, hier als bekannt angenommen werden. Hat man diese B, so sage man weiter, wie O : P, so diese B zur vierten, welche ebenfals gefunden werden kan. Stellen wir uns nun diese unter C vor, so ist die Verhältniß A : C aus den zwo Verhältnissen M : N und O : P zusammen gesetzet. Man siehet dieses leicht ein, denn es folget, was wir hier gesaget, aus den gegebenen Begriffen unmittelbar. Man hat gemachet A : B = M : N, und

B : C = O : P, also ist allerdings VIII, 8. die Verhältniß A : C aus den zwoen M : N und O : P zusammen gesetzet.

§. 14. Zum Exempel: Es ist eine Verhältniß aus den zwoen 2 : 3 und 4 : 7 zusammen zu setzen, und das erste Glied dieser Verhältniß soll 5 seyn: so ist die Bedeutung des Buchstabens A nunmehro 5, M bedeutet 2, N ist = 3, O = 4 und P = 7. Man sage also 2 : 3 = 5 : $\frac{3 \times 5}{2}$. Diese Zahl ist diejenige, welche B bedeutet. Nun sage man

ferner 4 : 7 = $\frac{3 \times 5}{2}$: $\frac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 4}$, so ist diese die Zahl C, und demnach

nach $C = \frac{105}{8} = 13\frac{1}{8}$, und die Verhältniß $5 : 13\frac{1}{8}$ ist aus den zwo Verhältnissen $2 : 3$ und $4 : 7$ zusammen gesetzet.

§. 15. Man siehet, daß man auf eben die Art verfahren müsse, wenn man eine Verhältniß, deren erstes Glied gegeben ist, aus drey, vier oder mehreren anderen zusammen setzen soll. Es sey das erste Glied noch A; man soll eine Verhältniß aus den vieren M : N, O : P, Q : R und S : T zusammen setzen: so mache man nach und nach

$$M : N = A : B$$
$$O : P = B : C$$
$$Q : R = C : D$$
$$S : T = D : E.$$

Man suche nemlich zu M, N und A die vierte Proportional-Zahl, oder Linie B. Diese nehme man, so bald man sie gefunden, an, und suche wieder zu O, P und B die vierte Proportional-Grösse C. Mit dieser verfahre man, wie vorhero mit B, und eben so mache man es ferner, bis nach Anzeigung der Buchstaben, man die gegebene Verhältnisse alle gebrauchet hat: so ist die Verhältniß A : E die gesuchte, und aus den gegebenen Verhältnissen zusammen gesetzet. Die Sache ist klar, und brauchet keiner weiteren Erläuterung, wenn man nur das vorhergehende wohl verstanden hat.

§. 16. Hieraus erhellet dasjenige nochmals deutlich, so schon in dem vorigen lieget, daß nemlich in der Zusammensetzung der Verhältnisse nichts geändert werde, durch was vor Glieder man auch die Verhältnisse ausdrucke, welche zusammen zu setzen sind. VIII, 6. Man drucke die Verhältniß M : N durch diese oder jene Zahlen oder Linien aus, oder man mache $M : N = m : n$, setze hernach an die Stelle M : N die Verhältniß $m : n$, und verfahre, wie gewiesen worden, so wird das Glied B nicht anders gefunden, als vorhero; und wenn man hernach an statt O : P die ihr gleiche Verhältniß $o : p$ gebraucht, so findet man in der Proportion $o : p = B : C$ das Glied C wieder so groß als vorhero, da man gemacht $O : P = B : C$, und so ist das immer. Man kan also vor eine jede der Verhältnisse, aus welchen eine neue zusammen zu setzen ist, eine andere Verhältniß annehmen, welche jener gleich ist, ohne daß dadurch in der zusammengesetzten Verhältniß etwas geändert werde.

§. 17. Ist aber das erste Glied der Verhältniß, welche man durch die Zusammensetzung anderer heraus bringen soll, nicht gegeben, so kan man es nach Belieben annehmen. Denn man bekommet zwar nicht eben die Glieder, aber doch eben die Verhältniß, man mag das erste Glied nehmen wie man will. Es sey aus den zwo Verhältnissen 2 : 3 und 4 : 5 eine Verhältniß zusammen zu setzen. Man nehme 1 vor das erste Glied derselben, so muß man sagen, wie 2 zu 3, so das angenommene Glied 1 zu der vierten Zahl, welche ist $\frac{3}{2}$, und noch einmal wie 4 zu 5, so die gefundene $\frac{3}{2}$ zu der vierten $\frac{15}{8}$. Die Verhältniß 1 : $\frac{15}{8}$ ist nunmehro aus den zwo gegebenen 2 : 3 und 4 : 5 zusammen gesetzet. Man nehme zweytens vor die erste Zahl 2, und sage wieder wie 2 : 3, so 2 zu der vierten, welche hier 3 ist, und ferner wie 4 zu 5, so die gefundene 3 zu $\frac{15}{4}$, so ist die zusammengesetzte Verhältniß nunmehro 2 : $\frac{15}{4}$. Es ist aber auch diese mit der vorigen 1 : $\frac{15}{8}$ einerley. Denn man multiplicire die beyden Glieder der ersten Verhältniß durch 4, so wird 8 : 15 = 2 : $\frac{15}{4}$, die beyden Glieder der letzten Verhältniß aber multiplicire man durch 8, so wird 8 : 15 = 1 : $\frac{15}{8}$. Weil nun die beyden Verhältnisse 2 : $\frac{15}{4}$, und 1 : $\frac{15}{8}$ einer dritten, nemlich der Verhältniß 8 : 15 gleich sind, so sind sie auch einander gleich. Und so kommen immer einerley Verhältnisse durch eine dergleichen Zusammensetzung zwoer gleichen Verhältnisse heraus, man mag das erste Glied nehmen wie man wil.

§. 18. Und daß dieses allezeit richtig sey, und bey den angenommenen Zahlen nicht etwa nur von ohngefehr zugetroffen, können wir folgendergestalt zeigen. Man mache M : N = A : B aber auch M : N = a : b, und O : P = B : C wie auch O : P = b : c; so sind die Verhältnisse A : C und a : c aus eben den Verhältnissen M : N und O : P zusammen gesetzet, aber die ersten Glieder derselben A und a sind verschieden. Wir behaupten, daß dennoch die Verhältniß A : C der Verhältniß a : c gleich, und die Proportion A : C = a : c richtig seyn werde. Denn wenn man die ersteren zwo Proportionen M : N = A : B, und M : N = a : b ansiehet, so findet man, daß man aus denselben schliessen könne A : B = a : b, und eben so folget aus den zwo letzteren B : C = b : c. Man verwechselt die mittleren Glieder dieser Proportionen, VI, 107. so bekommet man A : a = B : b, und B : b = C : c. Da nun also die Verhältniß A : a der Verhältniß B : b so wohl gleich ist, als die Verhältniß C : c, so müssen auch diese Verhältnisse einander selbst gleich seyn A : a = C : c, woraus, durch abermah-

mahliges Wechseln der mittleren Glieder, folget A:C=a:c, und die Richtigkeit dieser Proportion solten wir erweisen.

§. 19. Man kan hieraus ohne grosse Weitläuftigkeit schliessen, daß auch wenn man aus drey oder vier Verhältnissen eine andere zusammen setzet, diese einerley werde, man mag das erste Glied annehmen wie man wil. Denn wenn man aus den zwo Verhältnissen M:N und O:P die Verhältniß A:C heraus gebracht hat, und man hat noch eine Verhältniß Q:R übrig, welche man zu der vorigen hinzu setzen sol, damit eine Verhältniß aus den dreyen M:N, O:P, und Q:R zusammen gesetzet werde, so muß man sagen, wie Q:R=C:D, und die Verhältniß A:D ist nunmehro aus den drey gegebenen Verhältnissen zusammen gesetzet. Eben diese Verhältniß aber mit eben den Gliedern A und D bekommet man auch, wenn man die zwo Verhältnisse A:C und Q:R zusammen setzet. Denn wenn man dieses thun wil, so muß man eben so verfahren wie vorhero. Man muß sagen wie A zu C so A zu C, und ferner wie Q:R so C zu D. Demnach kommet in der That die Zusammensetzung dreyer Verhältnisse mit der Zusammensetzung zwoer Verhältnisse auf eines hinaus, weil man nemlich doch zu der Verhältniß, welche durch die Zusammensetzung der zwo ersteren entstanden ist, und die man als einfach betrachten kan, die dritte Verhältniß hinzu setzen muß. Da aber, wenn man zwo Verhältnisse zusammen setzet, man das Glied A nach Belieben annehmen kan, ohne die Verhältniß selbst dadurch zu verändern, so muß dieses bey der Zusammensetzung dreyer Verhältnisse ebenfals statt haben. Man siehet leicht, daß man in diesen Schlüssen fortfahren, und durch dieselben heraus bringen könne, daß auch bey der Zusammensetzung vierer Verhältnisse das erste Glied nach Belieben angenommen werden könne, ohne dadurch die Verhältniß, welche man durch die Zusammensetzung heraus bringet, zu ändern, weil man hier in der That nur die letzte der vier gegebenen Verhältnisse mit derjenigen zusammen setzen muß, welche durch die Zusammensetzung der drey erstern entstanden ist, und so gehet es immer fort.

§. 20. Sind nun die Verhältnisse, welche man zusammen setzen wil, M:N, O:P, Q:R, S:T, und so weiter in Zahlen gegeben, und man nimmet das erste Glied A nach Belieben an, und verfähret noch wie gewiesen worden ist, indem man machet:

VIII. Abschnitt.

$$M : N = A : B$$
$$O : P = B : C$$
$$Q : R = C : D$$
$$S : T = D : E$$

so ist $B = \frac{N}{M} \times A$, denn $\frac{N}{M} \times A$, bedeutet allezeit die vierte Proportionalzahl zu den dreyen M, N und A, VI, 114. 4. und diese vierte Zahl ist B. Eben so ist $C = \frac{P}{O} \times B$, und $D = \frac{R}{Q} \times C$, und $E = \frac{T}{S} \times D$. Und wenn man in der Ausdrückung $C = \frac{P}{O} \times B$, an statt der B, die ihr gleiche Zahl $\frac{N}{M} \times A$ setzet, so bekommet man $C = \frac{P}{O} \times \frac{N}{M} \times A$. Setzet man dieses in dem Ausdrucke $D = \frac{R}{Q} \times C$ an die Stelle des C, so wird $D = \frac{R}{Q} \times \frac{P}{O} \times \frac{N}{M} \times A$, und wenn man dieses letzte wieder in der Ausdrückung $E = \frac{T}{S} \times D$ an die Stelle der D setzet, so wird $E = \frac{T}{S} \times \frac{R}{Q} \times \frac{P}{O} \times \frac{N}{M} \times A$. Oder wenn man die Brüche wirklich multipliciret, so ist

$$B = \frac{N}{M} \times A$$
$$C = \frac{P \times N}{O \times M} \times A$$
$$D = \frac{R \times P \times N}{Q \times O \times M} \times A$$
$$E = \frac{T \times R \times P \times N}{S \times Q \times O \times M} \times A.$$

Und wenn demnach überall das erste Glied A ist, so bedeutet $\frac{N}{M} \times A$ das zweyte Glied B der Verhältniß, welche der Verhältniß $M : N$ gleich ist, $\frac{P \times N}{O \times M} \times A$ bedeutet das zweyte Glied C der Verhältniß,

wel-

welche aus den zwoen M:N und O:P zusammen gesetzet ist, $\frac{R\times P\times N}{Q\times O\times M}\times A$ bedeutet das zweyte Glied der Verhältniß, welche aus den dreyen M:N, O:P und Q:R zusammen gesetzet ist, und $\frac{T\times R\times P\times N}{S\times Q\times O\times M}\times A$ bedeutet das vierte Glied der Verhältniß, welche aus den vieren M:N, O:P, Q:R und S:T zusammen gesetzet ist, und so immer fort.

§. 21. Dieses kan uns eine Anleitung geben, wie die zweyten Glieder der zusammen gesetzten Verhältnisse leichter zu finden sind, wenn von Zahlen die Rede ist. Gesetzet es seyen die zwo Verhältnisse M:N und O:P zusammen zu setzen, und zu dem ersten Gliede A der zusammen gesetzeten Verhältniß das zweyte zu finden. Weil nun dieses zweyte Glied C also ausgedrucket wird: $\frac{P\times N}{O\times M}\times A$, so siehet man, daß man nur zu O×M, P×N und A die vierte Proportionalzahl suchen darf, wenn man dieses Glied auf einmal erlangen wil, denn diese vierte Proportionalzahl ist $\frac{P\times N}{O\times M}\times A$, gleichwie die vierte Proportionalzahl zu M, N und A, diese ist $\frac{N}{M}\times A$, von welchem Ausdrucke der erstere nicht anders verschieden ist, als daß so wohl in dem Zehler als in dem Nenner des Bruchs die Producte P×N, und O×M stehen, welches die Sache nicht ändert. Es ist aber O×M das Product der zwey ersten Glieder der Verhältnisse, welche man zusammen setzen sol, und P×N ist das Product der zwey letzteren Glieder dieser Verhältnisse, und man muß demnach sagen, wie das Product der zwey ersteren Glieder zwoer Verhältnisse O×M, zu dem Producte der zwey letzteren Glieder derselben P×N, so das nach Belieben angenommene erste Glied A, zu dem zweyten Glied C der Verhältniß, welche aus den zwo gegebenen Verhältnissen zusammen gesetzet ist. Zum Exempel, ich sol aus den zwo Verhältnissen 2:3 und 4:5 eine Verhältniß zusammen setzen, deren ersteres entweder gegebenes oder nach Belieben angenommenes Glied die 1 ist; so sage ich wie 2×4 zu 3×5, das ist, wie 8 zu 15, so 1 zu $\frac{15}{8}$, so ist die Verhältniß 1 : $\frac{15}{8}$ diejenige, welche man suchete.

§. 22. Eben so ist es, wenn man aus drey Verhältnissen die

durch

VIII. Abschnitt.

durch Zahlen ausgedrucket sind, eine Verhältniß zusammen setzen sol. Sind die Verhältnisse, welche man zusammen setzen sol, $M:N$, $O:P$, und $Q:R$, und ist das erste Glied der zusammen gesetzeten Verhältniß A, so ist das zweyte $C = \frac{R \times P \times N}{Q \times O \times M} \times A$, und dasselbe zu finden, darf man nur sagen, wie $Q \times O \times M : R \times P \times N$, so das angenommene erste Glied A zu dem zweyten. Denn die vierte Proportionalzahl zu den eben genannten dreyen ist augenscheinlich $\frac{R \times P \times N}{Q \times O \times M} \times A$, und man weiß zum voraus, VIII, 20. daß eben dieses das zweyte Glied der aus $M:N$, $O:P$, und $Q:R$ zusammen gesetzeten Verhältniß bedeute, deren erstes Glied A ist. Man schliesset also hier wieder wie $Q \times O \times M$, das Product aus allen ersteren Gliedern der gegebenen Verhältnisse, zu $R \times P \times N$, dem Producte aus allen zweyten Gliedern dieser Verhältnisse; so das nach Belieben angenommene oder gegebene erste Glied A, zu dem zweyten Gliede der Verhältniß, welche aus den gegebenen zusammen gesetzet ist. Als es sey die Verhältniß zu finden, welche aus den dreyen $2:3$, $4:5$, und $2:1$ zusammen gesetzet, und deren erstes Glied die Einheit ist, so sage ich wie $2 \times 4 \times 2 : 3 \times 5 \times 1$, das ist, wie 16 zu 15, so 1 zu $\frac{15}{16}$. Die Verhältniß $1 : \frac{15}{16}$ ist die gesuchete, welche man durch ganze Zahlen ausdrücken kan, wenn man beyderseits durch 16 multiplicirет. Es wird dadurch $1 : \frac{15}{16} = 16 : 15$.

§. 23. Diese Regel ist allgemein. Wenn man aus den vier Verhältnissen $M:N$, $O:P$, $Q:R$, und $S:T$ eine Verhältniß zusammen setzen sol, deren erstes Glied A ist, so muß man wieder sagen, wie das Product aus allen ersteren Gliedern der Verhältnisse, welche zusammen zu setzen sind $S \times Q \times O \times M$, zu dem Producte aus den letzteren Gliedern dieser Verhältnisse $T \times R \times P \times N$, so das beliebig angenommene Glied A zu dem zweyten Gliede der zusammen gesetzeten Verhältniß, welches wir uns unter E vorstellen. Denn es wird, wenn man die vierte Proportionalzahl würklich suchet $E = \frac{T \times R \times P \times N}{S \times Q \times O \times M} \times A$, und wir haben gesehen, daß dieses das zweyte Glied der verlangeten zusammen gesetzeten Verhältniß sey.

§. 24. Ja wenn nichts daran gelegen ist, in was vor Zahlen man die zusammen gesetzete Verhältniß schaffe, so hat man nichts als die Producte der ersteren und der letzteren Glieder der Verhältnisse zu ma-

machen, welche man zusammen setzen sol, die Verhältniß dieser Producte ist selbst die zusammen gesetzete Verhältniß, welche man suchet. Als in dem letzten Falle, da die Verhältnisse M : N, O:P, Q:R, und S:T zusammen zu setzen waren, hatten wir S×Q×O×M : T×R×P×N = A:E, und die Verhältniß A:E war die zusammengesetzete. Da nun also diese Verhältniß A:E der Verhältniß der Producte gleich ist, so ist auch die Verhältniß der Producte diejenige, welche aus den Verhältnissen der einander multiplicirenden Zahlen in der Ordnung zusammen gesetzet ist, die wir zum öftern wiederhohlet haben. Wil man die Verhältniß haben, die aus den Verhältnissen 2:3, 5:3, 2:7 zusammen gesetzet ist: so multiplicire man nur die ersten Glieder dieser Verhältnisse in einander, wie auch die letzteren. Die Verhältniß der Producte 2×5×2 : 3×3×7, das ist, 20:63, ist die gesuchete.

§. 25. Und demnach ist die Verhältniß zwoer Quadratzahlen aus der Verhältniß ihrer Wurzeln zweymal genommen, zusammen gesetzet, und die Verhältniß zwoer Cubiczahlen bestehet aus der Verhältniß der Wurzeln dreymal genommen. Denn wenn man die Verhältniß 3:5 mit sich selbst, das ist, mit der Verhältniß 3:5 zusammen setzet, so kommet die zusammen gesetzte Verhältniß 3×3 : 5×5 = 9:25, diese Zahlen aber sind die Quadratzahlen der ersten. Und wenn man die Verhältniß 3:5 dreymal genommen, zusammen setzen sol, so wird die zusammen gesetzete Verhältniß 3×3×3 : 5×5×5 = 27 : 125, welches die Cubiczahlen der ersteren sind.

§. 26. Wenn also zwo Zahlen 9, 25. gegeben sind, deren Verhältniß aus zwoen gleichen Verhältnissen zusammen gesetzet ist, (man kan aber eine jede Verhältniß so betrachten, als ob sie durch die Zusammensetzung zwoer gleichen Verhältnisse entstanden wäre) und man wil diese Verhältniß finden, aus welcher die Verhältniß 9:25 dergestalt zusammen gesetzet ist: so darf man nur die Quadratwurzeln dieser Zahlen 3 und 5 nehmen. Die Verhältniß 3:5 ist die gesuchete. Eben so findet man die Glieder einer Verhältniß, welche, wenn sie dreymal zusammen gesetzet wird, eine gegebene Verhältniß 27 : 125 heraus kommet; Man darf nur aus den Gliedern der gegebenen Verhältniß die Cubicwurzeln ziehen, welche in unserem Exempel wieder 3 und 5 sind. Die Verhältniß 3:5, ist diejenige, welche, wenn sie dreymal zusammen gesetzet wird, die gegebene Verhältniß 27 : 125 bringet. Man kan zwo Zahlen öfters als dreymal in sich selbst multipliciren, und auf diese Producte dasjenige anwenden, so wir hier

VIII. Abschnitt.

von solchen Zahlen gesaget, die man sich als Quadrat- oder Cubic-zahlen vorstellet.

§. 27. Wenn man aus den durch Zahlen ausgedruckten Verhältnissen:

$M : N$
$O : P$
$Q : R$
$S : T$, eine Verhältniß zusammen setzen sol, und man verwechselt die ersteren Glieder dieser Verhältnisse wie man wil, oder die letzteren, oder so wohl die ersteren als die letzteren, folgendergestalt, zum Exempel:

$O : T$
$M : P$
$S : R$
$Q : N$, so kommen ohnstreitig meistentheils ganz andere Verhältnisse, als die vorigen waren, ob es zwar zuweilen sich fügen kan, daß eine oder die andere dieser letzteren Verhältnisse von einer der vorigen nicht verschieden ist. Dennoch aber ist die Verhältniß, welche durch die Zusammensetzung aller ersteren Verhältnisse entstehet, von derjenigen nicht verschieden, welche aus den letzteren Verhältnissen zusammen gesetzet ist. Denn wenn man die Glieder in der Ordnung multiplicieret, welcher wir bis anhero gefolget, die Glieder der zusammen gesetzeten Verhältniß heraus zu bringen, so ist die Verhältniß, welche aus den ersteren vieren zusammen gesetzet ist, diese $S \times Q \times O \times M : T \times R \times P \times N$, und die Verhältniß, welche durch die Zusammensetzung der vier letzteren entstehet, ist $Q \times S \times M \times O : N \times R \times P \times T$. Nun sind die Glieder dieser Verhältniß von den Gliedern der vorigen zusammen gesetzeten Verhältniß nicht verschieden, sondern es ist $Q \times S \times M \times O = S \times Q \times O \times M$, weil diese zwey Producte durch die Multiplication einerley Zahlen entstanden sind, und an der Ordnung, in welcher man multiplicieret, nichts gelegen ist, I, 96. und aus eben der Ursache ist auch $N \times R \times P \times T = T \times R \times P \times N$: also sind auch die dergestalt zusammen gesetzete Verhältnisse $S \times Q \times O \times M : T \times R \times P \times N$, und $Q \times S \times M \times O : N \times R \times P \times T$ einander gleich, und eben dieses ist bey einer jeden anderen Versetzung der ersteren, wie auch der letzteren Glieder der Verhältnisse, welche man zusammen setzen sol, richtig, weil die angegebene Ursach in allen solchen Fällen gilt. Es ist nicht nöthig, daß wir ein Exempel in Zahlen hieher setzen, da der Satz, auf welchen wir uns in dem Beweise gründen, so gar bekannt ist.

§. 28. Wohl

§. 28. Wohl aber ist zu erweisen, daß eben diese Versetzung auch statt habe, wenn die Verhältnisse nicht durch Zahlen, sondern durch Linien, oder andere ungetheilete Grössen ausgedrucket werden. Denn man kan zwar schliessen, daß dasjenige was von solchen Verhältnissen richtig ist, die durch Zahlen ausgedrucket werden können, überhaupt von allen Verhältnissen richtig sey, wenn man annimmet, daß jede zwo Grössen von einerley Art in Theile zerfället werden können, welche einander alle gleich sind, in welchem Falle die Verhältniß der Grössen mit der Verhältniß der Zahlen der Theile einerley ist. VI, 43. Allein wir haben die Möglichkeit dieser Zerfällung nicht zum Grunde legen mögen, und wir müssen also auf eine unseren vorigen Sätzen gemässere Art darthun, daß die Versetzung der Glieder der Verhältnisse, welche zusammen gesetzet werden sollen, in der zusammen gesetzeten Verhältniß nichts ändern. Wir werden dieses erstlich von zwo Verhältnissen zeigen, welche zusammen gesetzet werden sollen, und so dann dieses auf mehrere anwenden.

§. 29. Es seyn also die zwo Verhältnisse M : N und O : P zusammen zu setzen. Man kan ihre Glieder auf diese vier Arten setzen:

M : N	O : P	O : N	M : P
O : P	M : N	M : P	O : N

wovon die drey letzteren heraus kommen, wenn man in der ersten entweder die vorhergehenden Glieder, oder die nachoflgenden, oder so wol die vorhergehenden als die nachfolgenden, verwechselt. Es ist zu zeigen, daß einerley Verhältniß kommen werde, man mag diejenigen von diesen Verhältnissen zusammen setzen, welche man wil.

§. 30. Man mache zuerst: VIII, 13.

$$M : N = A : B \text{ und } O : P = A : D,$$
$$O : P = B : C \quad M : N = D : E,$$

so ist die Verhältniß A : C aus den zwoen M : N und O : P zusammen gesetzet, und die Verhältniß A : E ist durch die Zusammensetzung der Verhältnisse O : P und M : N entstanden. Ich sage diese zwo Verhältnisse A : C und A E seyen einander gleich. Man siehet, daß dieses mit Worten so auszudrucken sey. Wenn man zwo Verhältnisse M : N und O : P einmal in der Ordnung zusammen setzet, in welcher sie stehen, und das andere mal in verkehrter Ordnung, indem man O : P zuerst brauchet, und M : N zum zweyten, so werden die Verhältnisse A : C und A : E, welche durch diese Zusammensetzung entstehen, einerley. Und dieses wird erwiesen seyn, wenn wir werden gezeiget haben,

VIII. Abschnitt. daß C=E, welches folgender gestalt erhellet. Wir hatten M:N = A:B, wie auch M:N=D:E, also ist A:B=D:E. Ferner halten wir O:P=B:C, und O:P=A:D, woraus folget A:D=B:C. Versetzet man die mittleren Glieder dieser Proportion, so wird aus derselben A:B=D:C, und wenn man diese Proportion mit der vorigen A:B=D:E vergleichet, so siehet man, daß auch D:C=D:E. Da nun also einerley Grösse D gegen die Grössen C und E einerley Verhältniß hat, so müssen diese Grössen einander gleich seyn, folgends ist A:C = A:E, wie wir erweisen solten.

§. 31. Hieraus folgeren wir so gleich, daß wenn man zum Grunde setzen kan, A:B=M:N, und B:C=O:M, man allezeit die Proportion A:C = O:N daraus werde folgeren können. Es ist die Ordnung der Glieder in den vorderen und hinteren Verhältnissen wohl zu merken. In dem ersteren kommet das Glied B zwey mal vor, in den letzteren stehet M zwey mal, aber B stehet oben als das zweyte Glied, und unten als das erste, und M stehet oben als das vordere Glied, und unten als das hintere. Die Richtigkeit des Schlusses aber erhellet folgender gestalt. Die Verhältniß A:C ist aus den zwo Verhältnissen M:N und O:M zusammen gesetzet. VIII, 8. Die Verhältniß O:N aber kan aus eben den zwo Verhältnissen zusammen gesetzet werden: nur muß man sie in verkehrter Ordnung nehmen. Denn ohnstreitig bringen die Verhältnisse O:M und M:N, wenn man sie zusammen setzet, die Verhältniß O:N. Setzet man sie aber in verkehrter Ordnung zusammen, so nemlich wie wir sie gleich Anfangs gesetzet, M:N und O:M, so wird durch ihre Zusammensetzung keine andere, als die vorige Verhältniß O:N heraus gebracht, wie wir eben gewiesen. Kommet aber die Verhältniß O:N durch die Zusammensetzung der zwo Verhältnisse M:N und O:M, so muß sie allerdings der Verhältniß A:C gleich seyn, welche durch die Zusammensetzung eben dieser Verhältnisse entstehet. VIII, 18.

§. 32. Man kan diesen Satz auch anders ausdrucken, und dieser Ausdruck hat viele Bequemlichkeit, weil er uns öfters die Versetzung der Glieder einer Proportion ersparet. Wir haben gesetzet,

A:B = M:N, und
B:C= O:M, und daraus geschlossen
A:C= O:N. Verwechselt man die Glieder der zwoten

ten Proportion, und lässet die Glieder der ersten stehen wie sie sind, so erhält man A : B = M : N und

C : B = M : O. Die mittleren Glieder der zwo Proportionen werden einerley, die äusseren aber sind verschieden, oder können wenigstens verschieden seyn. Der Schluß bleibet A : C = O : N; und man kan also bey dieser Ordnung der Glieder schliessen, wie das erste Glied der ersten Proportion A, zu dem ersten Gliede der zwoten C, so das letzte Glied der zwoten Proportion O, zu dem letzten Gliede der ersten N. Als wenn

2 : 3 = 4 : 6 und
12 : 3 = 4 : 1; so ist 2 : 12 = 1 : 6.

§. 33. Man kan die Glieder auch dergestalt versetzen,

B : A = N : M, und
B : C = O : M, daß nemlich die äussersten Glieder einerley werden, und hier ebenfals schliessen : A : C = O : N. Es ist dieses aus dem so gewiesen worden ist, leicht einzusehen.

§. 34. Aus dieser Regel beweisen wir nun, daß bey Zusammensetzung zwoer Verhältnisse die Glieder sich auch anders verwechselen lassen, als wir bereits gezeiget haben. Es sey wieder aus den zwo Verhältnissen M : N und O : P eine neue Verhältniß zusammen zu setzen; man verwechsele aber die ersteren Glieder dieser Verhältniß, und setze aus den zwo Verhältnissen O : N, M : P eine Verhältniß zusammen, so wird diese letztere Verhältniß der ersteren gleich seyn. Denn wil man diese Zusammensetzung würklich verrichten, und hat zu dem Ende das erste Glied A angenommen, so muß man sagen :

M : N = A : B wie auch O : N = A : D, und
O : P = B : C, wie auch M : P = D : E, und es sind die Verhältnisse A : C und A : E die zusammen gesetzeten. Man kan aber erweisen, daß diese Verhältnisse einander gleich sind, welches geschiehet, indem man, wie wir gleich thun wollen, zeiget, daß C dem E gleich sey.

§. 35. Weil nemlich M : N = A : B und
O : N = A : D, so ist O : M = B : D, VIII, 32.
Nun ist auch, wenn man in der Proportion, deren Richtigkeit ebenfals angenommen worden ist, O : P = B : C die Glieder verwechselt, P : O = C : B; aus dieser aber, und derjenigen, welche wir eben geschlos-

VIII. Abschnitt.

schlossen, folget, $P:M=C:D$, wie man so gleich siehet, wenn man ihre Glieder ordentlich unter einander setzet

$$P:O=C:B$$

$O:M=B:D$, als wodurch erhellet, daß die Verhältnisse $P:M$ und $C:D$ aus gleichen Verhältnissen zusammen gesetzet sind. Vergleichet man aber diese Proportion noch mit der letzten der angenommenen, $M:P=D:E$, oder $P:M=E:D$, so siehet man so gleich, daß $C:D=E:D$, und daß also E nothwendig so groß seyn müsse als C. Folgends ist auch $A:C=A:E$, das ist, die zwo zusammen gesetzeten Verhältnisse sind gleich, deren Gleichheit wir erweisen solten.

§. 36. Auf eben die Art kan man auch zeigen, daß wenn man in den zwo Verhältnissen $M:N$ und $O:P$ die letzten Glieder versetzet, und schreibet $M:P$ und $O:N$, man durch die Zusammensetzung der ersten zwo Verhältnisse keine andere Verhältniß heraus bringen werde, als diejenige, welche man durch die Zusammensetzung der letzteren heraus bringen kan, und daß wenn man machet:

$$M:N=A:B \text{ wie auch } M:P=A:D$$
$$O:P=B:C \quad \text{und} \quad O:N=D:E,$$

die Grösse C der Grösse E, und folgends die Verhältniß $A:C$ der Verhältniß $A:E$ gleich seyn werde. Denn wenn man die Glieder der angenommenen Proportion $M:P=A:D$ verkehret, und die darneben stehende, unter dieselbe setzet, also: $P:M=D:A$,

$M:N=A:B$,

so schliesset man $P:N=D:B$. VIII, 16.

Nun ist auch die Proportion $O:P=B:C$ als richtig angenommen.

Und aus dieser $O:P=B:C$

und der erst gefundenen $P:N=D:B$

folget $O:N=D:C$. VIII, 31. Da nun auch

$O:N=D:E$, so ist allerdings $D:C=D:E$, und folgends $C=E$, welches solte erwiesen werden. Und also ist überhaupt richtig, was wir zu zeigen hatten, daß nemlich, wenn in zwo Verhältnissen $M:N$ und $O:P$ die ersteren, oder die letzteren, oder so wohl die erstern als die letztern Glieder, auf alle mögliche Arten versetzet werden, dieses die Verhältnisse, welche aus den gegebenen und aus denjenigen Verhältnissen zusammen gesetzet werden, so durch diese Verwechselung der Glieder entstanden sind, nicht verschieden mache.

Die

Die Zahl der Verhältnisse, aus welchen eine andere zusammen zu setzen ist, zu vermindern.

§. 37. Es ist aber dieses nicht allein richtig, wenn nur zwo Verhältnisse zusammen gesetzet werden, sondern es hat eben dieses auch statt, wenn man zwo Verhältnisse mit verschiedenen anderen zusammen setzen sol. Man kan auch in diesem Falle die vörderen wie auch die hinteren Glieder dieser zwo Verhältnisse verwechseln wie man wil, ohne dadurch in der Zusammensetzung der Verhältnisse etwas zu verändern. Denn es sey aus den Verhältnissen K:L, M:N, O:P und Q:R eine neue Verhältniß zusammen zu setzen, deren erstes Glied A sey, so muß man machen VIII, 15.

$K:L = A:B$
$M:N = B:C$
$O:P = C:D$
$Q:R = D:E$. Die Verhältniß A:E ist so dann aus den vier gegebenen zusammen gesetzet. Man siehet aber auch leicht, daß eben diese Verhältniß sich aus den drey Verhältnissen A:B oder K:L und B:D und D:E, das ist, Q:R zusammen setzen lasse. Nun ist die mittlere dieser Verhältniß B:D diejenige, welche durch die Zusammensetzung der zwo Verhältnisse M:N und O:P entstehet; und wenn man die vörderen wie auch die hinteren Glieder dieser zwo Verhältnisse wie man wil, verwechselt, so bleibet diese Verhältniß B:D dennoch unverändert. Wil man demnach zum Beyspiel aus den Verhältnissen K:L
O:N
M:P
Q:R eine Verhältniß zusammen setzen, da die Glieder O, M hier verwechselt worden sind, so wird dieselbe noch aus den Verhältnissen A:B = K:L, B:D und D:E = Q:R bestehen, und also der vorigen zusammen gesetzeten Verhältniß A:E gleich seyn.

§. 38. Kan man aber jede zwey vördere oder hintere Glieder der Verhältnisse, die man zusammen setzen sol, verwechseln, ohne dadurch in der Verhältniß, welche durch ihre Zusammensetzung entstehet, etwas zu verändern; so kan man auch diese Verwechselung so oft man wil, wiederholen, ohne daß auch hiedurch einige Veränderung in der zusammen gesetzeten Verhältniß vorgehe. Dadurch aber wenn man die Ver-

VIII. Abschnitt. Verwechselung zweyer Glieder der Verhältnisse wiederholet, können dieselbe in eine jede beliebige Ordnung gebracht werden, die man verlanget. Wenn demnach bey verschiedenen Verhältnissen, die man zusammen setzen sol, die ersteren, wie auch die letzteren Glieder einerley sind, so sind auch die zusammen gesetzeten Verhältnisse einerley, in was Ordnung diese Glieder auch stehen mögen, eben wie wir dieses von solchen Verhältnissen, die durch Zahlen ausgedruckt sind, oben VIII, 27. gezeiget haben. Aus den Verhältnissen

K : L
M : N
O : P
Q : R wird eben die Verhältniß zusammen gesetzet, welche aus den Verhältnissen

M : L
O : N
K : R
Q : P zusammen gesetzet wird. Denn wenn man immer zwey der vördern Glieder dieser letzten Verhältnisse versetzet, so bekommet man endlich die Ordnung der vörderen Glieder der vorigen Verhältnisse, und eben dieses ist auch bey den hinteren Gliedern richtig. Man wiederhohle hiebey, wenn man es nöthig findet, was wir längst von der Versetzung der Factoren zweyer Producte gezeiget haben. I, 100.

§. 39. Dieses kan uns nutzen die Verhältnisse, aus welchen eine neue zusammen zu setzen ist, öfters auf eine sehr leichte Art auf wenigere zu bringen, und drey Verhältnisse, oder zwo anzugeben, aus welchen eine Verhältniß zusammen gesetzet werden kan, welche aus vieren oder mehrern zusammen gesetzet ist, ja zuweilen gar eine zusammen gesetzete Verhältniß in eine einfache zu verwandeln. Denn daß in dem Falle, wenn die Verhältnisse, aus welchen eine neue zusammen gesetzet werden sol, folgender gestalt stehen:

A : B
C : D
D : E
F : G, die Verhältniß, welche aus denselben zusammen gesetzet wird, auch aus den dreyen A : B, C : E, F : G zusammen gesetzet werden könne, ist leicht einzusehen: weil die Verhältniß C : E eben diejenige ist, welche aus den

zwoen

zwoen C:D und D:E zusammen gesetzet wird. Stehen aber die Glieder anders, folgender gestalt, zum Exempel:

A : B
C : D
F : E
D : G, so kan man dieselbe auf die vorige Ordnung bringen, und man kan also hier ebenfals sagen, daß die Verhältniß, welche aus den gegenwärtigen vieren zusammen gesetzet wird, auch aus den dreyen Verhältnissen A:B, C:E und F:G zusammen gesetzet werden könne.

§. 40. Es ist also die Regel, nach welcher man die Zahl der Verhältnisse, aus welchen eine andere zusammen gesetzet werden sol, vermindert, diese: Man lösche diejenigen Glieder, welche so wohl unter den vörderen als unter den hinteren Gliedern der Verhältnisse vorkommen, welche zusammen gesetzet werden sollen, aus, und verknüpfe die übrigen wie man wil mit einander, nur daß man nicht die vörderen Glieder an die Stelle der hinteren setzet. In den gegebenen Exempeln kommet D einmal unter den vörderen und das andere mal unter den hinteren Gliedern der zusammen zu setzenden Verhältnisse vor. Man lasse also dasselbe gar aus, so bleiben die Verhältnisse, deren erstere Glieder sind A, C, F, und die letzteren B, E, G. Die Verhältniß nun, welche aus den bezeichneten vieren zusammen gesetzet werden kan, lässet sich auch aus den dreyen zusammen setzen, deren erstere Glieder die Grössen A, C, F, und die zweyten B, E, G sind, als aus diesen A:G, C:B, F:E, oder aus diesen A:E, C:G, F:B, oder wie man diese Glieder sonst verknüpfen wil.

§. 41. Wenn eine Proportion aus zusammen gesetzeten Verhältnissen bestehet, das ist, wenn eine zusammen gesetzete Verhältniß einer andern zusammen gesetzeten oder einfachen Verhältniß gleich ist, so kan man die Verhältnisse, welche zusammen gesetzet werden sollen, auch öfters zu einer geringeren Zahl bringen, wenn man noch solche Verhältnisse zu der vorigen hinzu setzet, welche einander gleich sind. Es sey zum Exempel:

$$\left.\begin{matrix} A : B \\ C : D \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} M : N \\ O : P \\ Q : R \end{matrix}\right.$$

das ist, es sey diejenige Verhältniß, welche aus den zwoen A:B und C:D zusammen gesetzet ist, derjenigen gleich, welche durch die Zusammensetzung der drey Verhältnisse M:N, O:P, Q:R entstehet.

 Es

VIII. Abschnitt. Es sey aber auch D : A = R : M, so setze man diese Verhältniß noch zu den vorigen, so wird

$$\left.\begin{matrix} A : B \\ C : D \\ D : A \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} M : N \\ O : P \\ Q : R \\ R : M, \end{matrix}\right.$$

das ist, diejenige Verhältniß, welche aus den ersteren dreyen zusammen gesetzet ist, wird derjenigen gleich, welche aus den letzteren vieren, durch ihre Zusammensetzung entstehet. Denn daß dieses richtig sey, wenn dasjenige richtig ist, welches man zum Grunde setzet, siehet man daraus, weil aus der Zusammensetzung gleicher Verhältnisse immer gleiche Verhältnisse entstehen. Nun ist aber die Verhältniß, welche durch die Zusammensetzung der drey ersteren dieser Verhältnisse entstehet, keine andere als die Verhältniß C : B, denn die Glieder A und D kan man weg streichen, weil sie so wohl unter den vördern, als auch unter den hintern Gliedern der Verhältnisse, welche man zusammen setzen solte, vorkommen; VIII, 40. und auf eben die Art bringet man heraus, daß die Verhältniß, welche aus den letzteren vieren zusammen gesetzet werden kan, sich auch aus den zwoen O : N und Q : P zusammen setzen lasse. Man kan demnach in dem gesetzeten Falle schliessen, daß die Verhältniß C : B derjenigen Verhältniß gleich sey, welche aus den zwo Verhältnissen O : N und Q : P zusammen gesetzet wird.

§. 42. Da die Glieder solcher Verhältnisse, die aus verschiedenen anderen zusammen gesetzet worden, durch die Producte derjenigen Zahlen, welche diese Verhältnisse ausdrucken, in dem Falle, wenn die Verhältnisse durch Zahlen ausgedrucket werden können, sich darstellen lassen: VIII, 24. so pflegen die meisten heut zu Tage die Glieder der zusammen gesetzeten Verhältnisse eben so zu bezeichnen, wie die Producte aus verschiedenen Zahlen bezeichnet werden, ob zwar die einfachen Verhältnisse, aus welchen man eine neue zusammen setzen sol, nicht durch Zahlen ausgedrucket sind, und vielleicht nicht durch eigentliche Zahlen ausgesprochen werden können. Also wenn man schreibet: $A \times C \times E : B \times D \times F$, so bedeutet dieses eine Verhältniß, welche aus den dreyen A : B, C : D, E : F zusammen gesetzet ist, oder aus jeden anderen dreyen, deren vördere Glieder sind A, C, E, und die hintern B, D, F, wie man auch diese Glieder mit den ersteren verknüpfen wil. Uns scheinet diese Zeichnung gar bequem, und derowegen wollen wir sie beybehalten. Es ist nach der Erklärung, welche wir von diesen Dingen gegeben, nicht zu befürchten, daß man sich die ungetheilten Grössen

als

als Zahlen vorstellen werde, ob man sich zwar der Arithmetischen Zeichen, dergleichen das x ist, auch in der Geometrie bedienet, welches allerdings ein Fehler wäre. Doch wollen wir uns auch vorbehalten die Sache durch Worte so auszudrücken, wie wir bishero gethan, so oft wir uns davon einige Bequemlichkeit versprechen können.

VIII. Abschnitt.

§. 43. Zeichnet man derohalben folgender gestalt $A \times C \times E = B \times D \times F$, so kan dieses in der Geometrie, oder wo sonst von ungetheilten Grössen die Rede ist, nichts anders bedeuten, als daß die Glieder derjenigen Verhältniß, welche aus den dreyen $A:B$, $C:D$, $E:F$ zusammengesetzet ist, einander gleich sind: Diese Bedeutung ist allgemein und kan auch bey Zahlen gebrauchet werden.

§. 44. Wenn bey der Verhältniß $A \times C \times E : B \times C \times D$ die Buchstaben A, B, C, D, E Zahlen bedeuten, so ist diese Verhältniß allezeit der Verhältniß $A \times E : B \times D$ gleich. Denn die Glieder dieser Verhältnisse entstehen aus den Gliedern der ersteren, wenn man dieselbe beiderseits durch C dividiret, welchen Factor sie gemeinschaftlich haben, und durch eine solche Division wird die Verhältniß niemals geändert VI, 105. Bedeuten aber diese Buchstaben ungetheilte Grössen, so entstehen die Glieder der letztern Verhältniß $A \times E : B \times D$ aus den Gliedern der erstern $A \times C \times E : B \times C \times D$ wenn man die Zahl der Verhältnisse, welche zusammen zu setzen sind, dadurch vermindert, daß man das Glied C welches so wohl unter den vördern als auch unter den hintern Gliedern dieser Verhältnisse vorkommet, weglässet, welches jederzeit geschehen kan VIII, 40. und es ist demnach allezeit $A \times E : B \times D = A \times E \times C : B \times D \times C$, und so in allen übrigen ähnlichen Fällen.

§. 45. Gleichwie aber auch, wenn die Buchstaben Zahlen bedeuten, der Bruch $\frac{R \times P \times N}{Q \times O \times M} \times A$, oder $\frac{R \times P \times N \times A}{Q \times O \times M}$ das zweyte Glied einer Verhältniß bedeutet, welche aus den Verhältnissen $Q:R$, $O:P$, $M:N$ zusammen gesetzet worden, und deren erstes Glied A ist VIII, 20. Also pfleget man auch in der Geometrie diese Zeichnung in eben dem Verstande zu gebrauchen, ob zwar die Buchstaben Linien bedeuten, welche sich nicht im eigentlichen Verstande durch einander multipliciren, noch weniger aber dividiren lassen. Diese Gleichförmigkeit der Zeichnung ist von einer grossen Bequemlichkeit. Sie machet, daß man nach einerley Regeln verfahren kan, wenn in den zusammengesetzeten Verhältnissen etwas zu ändern ist. Als, wenn in der Verhältniß

VIII. Abschnitt. niß $A : \frac{R \times P \times N}{Q \times O \times M} \times A$: die Glieder Q, R ein ander gleich wären, so könte man diese Verhältniß auch dergestalt ausdrücken $A : \frac{P \times N}{O \times M} \times A$, wie leicht einzusehen ist.

Einige besondere Sätze.

§. 46. Dieses könte uns von dieser Materie genug seyn, weil das übrige sich bey der Anwendung aus dem dergestalt gelegeten Grunde leicht herleiten lässet. Doch kan es nicht schaden, wenn wir noch einige Folgen dieser Sätze bemerken, welche besonders vorkommen, und welche uns also unsere künftige Arbeit erleichtern können. Es sey erstlich die Verhältniß A : B der Verhältniß C : D gleich, oder es sey die Proportion $A : B = C : D$ richtig. Man verwechsele die Glieder einer dieser Verhältnisse und setze die Verhältniß, welche dergestalt kommet, als, D : C so dann mit einer der ersteren A : B zusammen: wodurch man die Verhältniß $A \times D : B \times C$ erhält. Die Glieder dieser Verhältnisse werden einander gleich seyn $A \times D = B \times C$. Von Zahlen hat die Richtigkeit dieses Satzes bereits gewiesen werden können. Denn wenn A, B, C, D Zahlen bedeuten, so ist $A \times D$ das Product der äussern Glieder der Verhältniß, und $B \times C$ ist das Product der mittleren Glieder derselben; und wir haben VI, III. gewiesen, daß dergleichen Producte einander allezeit gleich sind.

§. 47. Daß aber eben dieses auch richtig sey, wenn A, B, C, D ungetheilete Grössen bedeuten, siehet man folgender gestalt. Es ist gesetzet worden

$A : B = C : D$ nun ist allezeit richtig,

$D : C = D : C$ weil die erstere dieser Verhältnisse von der zwoten gar nicht verschieden ist. Demnach müssen auch die Verhältnisse gleich seyn, welche durch die Zusammensetzung dieser Verhältnisse entstehen, und die Proportion $A \times D : B \times C = C \times D : C \times D$ muß richtig seyn. Nun ist $C \times D = C \times D$, wie man leicht siehet. Also ist auch $A \times D = B \times C$. Und wenn man aus zwo gleichen Verhältnissen A : B und C : D eine neue Verhältniß $A \times D : B \times C$ zusammen setzet, nachdem man zuvor die Glieder einer dieser Verhältnisse verwechselt, so werden die Glieder der zusammengesetzten Verhältniß einander allezeit gleich.

§. 48.

§. 48. Es lässet sich dieser Satz verkehren, und man kan sagen, daß wenn eine Verhältniß, deren Glieder einander gleich sind, aus zwo Verhältnissen zusammen gesetzet ist, diese Verhältnisse einander gleich seyn, und eine Proportion geben, wenn man eine derselben verkehrt setzet. Es sey $A \times D = B \times C$, die Glieder nemlich der Verhältniß $A \times D : B \times C$ welche aus den zwo Verhältnissen $A : B$, und $D : C$ zusammen gesetzet ist, seyen einander gleich, so wird behauptet, daß die Verhältniß $A : B$ zwar nicht der Verhältniß $D : C$, aber gewiß der Verhältniß $C : D$ gleich seyn werde: und dieses siehet man so gleich ein, wenn man setzet $A \times D : B \times C = A : A$, und

$$C : D = C : D$$

Denn man begreiffet leicht, daß bey den gesetzten Bedingungen dieses allezeit geschehen könne. Denn $A \times D$ ist so wohl der $B \times C$ gleich, als A der A, oder eine jede andere Grösse sich selbst gleich ist; und die Verhältniß der zwoten Proportion bestehet so gar aus einerley Gliedern. Setzet man aber diese Verhältniß zusammen, so kommet allerdings, wenn man die überflüssige Glieder weglässet VIII, 40, $A : B = C : D$, welches zu zeigen war.

VIII. Abschnitt.

§. 49. Daß dieses auch bey Zahlen richtig sey, folget aus dem Beweise, welcher allgemein ist, und allerdings auch von Zahlen gelten muß. Man kan es aber auch von Zahlen folgender massen erweisen. Man nehme eine Zahl 12 und theile sie in diejenige Zahlen aus deren Multiplication sie entstanden ist, und dieses zwar auf zwo verschiedene Arten, welches allezeit geschehen kan, weil man eben nicht nöthig hat, die Brüche zu vermeiden. Man schreibe zum Exempel vor 12, $6 \times 2 = 4 \times 3$. Nach dem Satze muß die Proportion $6 : 4 = 3 : 2$ richtig seyn. Daß dieses beständig zutreffe, wird man gewahr werden, wenn man betrachtet, daß wenn man die Producte $6 \times 2 = 4 \times 3$ durch eine beliebige Zahl dividiret, die Quotienten nothwendig gleich seyn müssen. Man nehme zu den Theiler ein Product an aus einem Factor des ersten Products, und aus einem Factor des zweyten, als dieses 2×4, und dividire, so wird $\frac{6 \times 2}{4 \times 2} = \frac{4 \times 3}{4 \times 2}$. Diese Brüche können zu kleineren Benennungen gebracht werden, wenn man die Glieder des ersten durch 2, und die Glieder des zweiten durch 4 dividiret, dadurch wird $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, oder die Proportion $6 : 4 = 3 : 2$.

VIII. Abschnitt.

§. 50. Oder wenn man dieses auf eine leichtere Art von Zahlen schliessen wil, so setze man an statt der gebrauchten Ziffer $A \times D = B \times C$ und dividire wieder beiderseits mit $D \times B$, so wird $\frac{A \times D}{B \times D} = \frac{B \times C}{B \times D}$, und wenn man diese Brüche zu kleineren Benennungen bringet, indem man die gemeinschaftlichen Factore B, D aus den Nennern und Zehlern derselben weg lässet, so wird $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, das ist, VI, 40. $A : B = C : D$. Man siehet aber auch aus diesen Beweisen, und aus den übrigen, so gezeiget worden ist, überflüssig, daß an der Ordnung nichts gelegen sey, und daß wenn man hat $A \times D = B \times C$, oder $A \times D = C \times B$ oder $D \times A = B \times C$ oder $D \times A = C \times B$, man doch allezeit schliessen könne $A : B = C : D$, oder $B : A = D : C$.

§. 51. Sonst ist in einer jeden Proportion $A : B = C : D$ die Verhältniß des ersten Gliedes A zu dem vierten aus der Verhältniß des ersten Gliedes A zu dem zweyten $A : B$, und aus der Verhältniß eben dieses ersten Gliedes zu dem dritten zusammengesetzet. Dieses siehet man gar leicht ein, wenn man nur betrachtet, daß nach den ersten Grundbegriffen die Verhältniß $A : D$ aus den zween Verhältnissen $A : B$, $B : D$ zusammengesetzet sey. Dieses wäre auch richtig, wenn gleich A, B, C und D nicht proportional wären. Sind aber diese Grössen proportional, so ist die Verhältniß $B : D$ der Verhältniß $A : C$ gleich, und es wird demnach die Verhältniß $A : D$ auch aus den zwoen $A : B$ und $A : C$ zusammengesetzet. Als bey der Proportion $2 : 4 = 3 : 6$, ist die Verhältniß $A : D = 2 : 6$, und die Verhältniß $A : B = 2 : 4$, $A : C$ aber $= 2 : 3$. Setzet man die zwo letzteren Verhältnisse zusammen, indem man nemlich die Glieder derselben in der Ordnung in einander multipliciret, in welcher sie stehen, so bekommet man die Verhältniß $4 : 12$, welche der Verhältniß $2 : 6$ gleich ist.

§. 52. Gehet nun aber die Proportion in einem fort, und kan man sich also dieselbe unter nachstehender Bezeichnung $A : B = B : C$ vorstellen, so wird die Verhältniß des ersten Gliedes zu dem dritten $A : B$ der Verhältniß des ersten Gliedes zu dem zweyten $A : B$ gleich, und ist demnach die Verhältniß $A : C$ aus der Verhältniß $A : B$ zweymal genommen zusammen gesetzet. Es sey $2 : 6 = 6 : 18$, so ist die Verhältniß $2 : 18$ oder $1 : 9$ gleich der Verhältniß $2 \times 2 : 6 \times 6 = 4 : 36 = 1 : 9$. Die Zahlen, welche die Glieder dieser Verhältnisse, die aus

zwey

zwey gleichen zusammen gesetzet sind, ausdrücken, sind allezeit Quadratzahlen, weil sie durch die Multiplication einer Zahl in sich selbst entstehen, wie man leicht siehet.

§. 53. Dieses letztere, und was sonst noch von der Zusammensetzung gleicher Verhältnisse hier zu sagen ist, kan man auch aus den ersten Begriffen leicht einsehen. Es sey

$$A : B = M : N$$
$$B : C = M : N$$
$$C : D = M : N$$
$$D : E = M : N$$

so ist auch $A : B = B : C = C : D = D E$, weil eine jede dieser Verhältnisse der Verhältniß $M : N$ gleich ist. Und wenn man also die Glieder A, B, C, D, E nach einander schreibet, so ist die Verhältniß eines jeden derselben zu dem nachfolgenden einerley; gleichwie wenn dieses letztere ist, man auch allezeit diese Glieder so setzen kan, wie wir sie zuerst gesetzet. Es ist aber aus derselben Bezeichnung klar, daß die Verhältniß $A : C$ aus der Verhältniß $M : N$ oder aus der Verhältniß $A : B$, welche der $M : N$ gleich ist, zweymal genommen, zusammen gesetzet ist; und daß die Verhältniß $A : D$ aus der Verhältniß $M : N$ oder $A : B$ dreymal genommen bestehe, wie auch, daß die Verhältniß $A : E$ komme, wenn man die Verhältniß $M : N$ oder $A : B$ viermal zusammen setzet. Und es bestehet also bey einer Reihe von Grössen, wie wir sie beschrieben, A, B, C, D, E, die Verhältniß der ersten zu der dritten $A : C$ aus der Verhältniß der ersten zu der zwoten $A : B$ zweymal genommen, die Verhältniß der ersten zu der vierten $A : D$ bestehet aus der Verhältniß der ersten zu der zwoten $A : B$ dreymal genommen, die Verhältniß der ersten zu der fünften $A : E$ aus der Verhältniß der ersten zu der zwoten $A : B$ viermal genommen, und so fort.

§. 54. Man kan dieses auch so ausdrücken: bey den gesetzten Bedingungen, wenn nemlich jede der Grössen A, B, C, D, E gegen die nachfolgende einerley Verhältniß hat, ist $A : C = A \times A : B \times B$, und $A : D = A \times A \times A : B \times B \times B$, und $A : E = A \times A \times A \times A : B \times B \times B \times B$, und so weiter. Man siehet dieses so gleich, wenn man die Verhältniß in der Ordnung setzet, in welcher sie §. 53. stehen, und betrachtet, daß die Verhältniß $M : N$ der Verhältniß $A : B$ gleich sey.

§. 55. Wir haben nur noch ein einziges von dieser Sache zu merken

VIII. Abschnitt. Lem. Wenn zwo Verhältnisse A : B und C : D gegeben sind; so kan man zwey Glieder, deren Verhältniß aus diesen Verhältnissen zusammen gesetzet ist, auch folgender gestalt finden. Nachdem man die zwo Verhältnisse grösserer Deutlichkeit halber, unter einander geschrieben

A : B

C : D, so suche man zu einer beliebig angenommenen Grösse V, zur A und zur C die vierte Proportionalgrösse, welche wir P nennen wollen, und zu eben der V, zur B und zur D suche man ebenfals die vierte Proportionalgrösse Q, so ist die Verhältniß P : Q aus den Verhältnissen A : B und C : D zusammen gesetzet, oder es ist P : Q = A x C : B x D. Man siehet dieses folgender Gestalt ein. Weil man gemachet hat V : A = C : P, so ist auch, wenn man die Verhältnisse verkehret setzet A : V = P : C.
Nun hat man auch gemachet V : B = D : Q.
Und es ist nothwendig C : D = C : D.
Man setze diese Verhältnisse zusammen, mit Auslassung der überflüssigen Glieder VIII, 40. so wird A x C : B x D = P : Q, welche Proportion solte erwiesen werden. Es sey zum Exempel aus den Verhältnissen 2 : 3 und 5 : 7 eine neue zusammen zu setzen. Wenn man nun eine Zahl n nach Belieben annimmet und machet $P = \frac{2 \times 5}{n}$ und $Q = \frac{3 \times 7}{n}$, so verhält sich $\frac{n}{P}$ zu Q wie $\frac{2 \times 5}{n}$ zur $\frac{3 \times 7}{n}$, das ist, wenn man beyderseits mit n multipliciret wie 2×5 zu 3×7. und ist also die Verhältniß P : Q augenscheinlich aus den Verhältnissen 2 : 3 und 5 : 7 zusammen gesetzet.

§. 56. Hieraus kan man nachfolgenden Satz schliessen: Wenn man zwo Portionen annimmet:

A : B = C : D

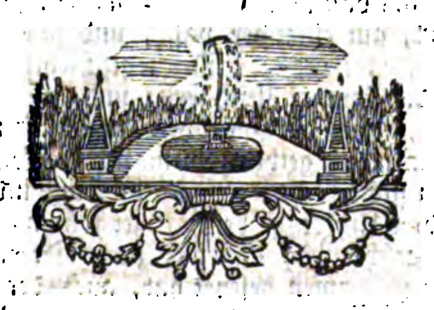
E : F = G : H und suchet zu einer nach Belieben angenommenen Grösse, und zu jeden zwoen der Grössen, deren Zeichen wir über einander gesetzet, die vierte Proportionalgrössen P, Q, R, S, so werden auch diese proportional seyn. Denn die Verhältniß P : Q ist aus den Verhältnissen A : B und E : F zusammengesetzet, und die Verhältniß R : S aus den Verhältnissen C : D und G : H. Da nun die einfachen Verhältnisse, so wie wir sie gesetzet, einander gleich seyn, so müssen auch die zusammengesetzeten gleich seyn. P : Q = R : S.

§. 57. Man kan aber auch diesen Satz noch weiter ausdehnen, oder noch allgemeiner machen, folgender gestalt. Man nehme drey Mehrere Proportionen: VIII.

A : B = C : D
E : F = G : H
J : K = L : M, und suche zu jeden dreyen Gliedern derselben, welche über einander stehen, die vierte Proportionalgrösse. Man mache nemlich:

A : E = J : P
B : F = K : Q
C : G = L : R
D : H = M : S, so werden auch diese vierte Proportionalgrössen eine richtige Proportion P : Q = R : S geben. Denn wenn man diese letztern vier Proportionen etwas anders schreibet, und ihnen die drey erstern mit einiger Versetzung der Glieder beyfüget, folgender Gestalt:

P : J = E : A
K : Q = B : F
G : C = R : L
D : H = M : S
C : D = A : B
H : G = F : E
J : K = L : M, und setzet diese Verhältnisse alle beiderseits zusammen, mit Weglassung der überflüssigen Glieder, so bekommet man allerdings P : Q = R : S. Man kan gar leicht Zahlen finden, welche dieses erläutern.



IX. Abschnitt.

Neunter Abschnitt.

Von der Gleichheit und Verhältniß der Figuren.

§. 1.

Dieses ist dasjenige, so wir uns bekannt machen musten, ehe wir uns zur besonderen Betrachtung der ebenen Flächen wenden konten, von welchen wir den Begrif gleich Anfangs IV, 33. gegeben. Wir setzen, daß wir durch gerade oder krumme Linien dergleichen Flächen von allen Seiten eingeschlossen, und damit Figuren gemachet, und wollen sehen, wie sich dergleichen Figuren bey allerhand Bedingungen gegen einander verhalten; das ist, wir wollen sehen, in welchen Umständen sie einander gleich sind, was erfordert wird, wenn eine zwey- drey- viermal grösser seyn soll als die andere, und uns dadurch in den Stand setzen, die einfachern unter diesen Figuren überhaupt mit einander zu vergleichen, und die Grösse einer derselben aus der Grösse einer andern zu bestimmen.

Grund dieser Lehre.

§. 2. Wir haben einen Grund-Satz nöthig, auf welchen wir diese Lehre bauen, aus welchem wir vor allen Dingen von der Gleichheit zwoer Figuren urtheilen können, und da ist freylich nichts natürlicher und leichter, als daß man die Figuren, welche man mit einander vergleichen will, auf einander passe, und zusehe, ob ihre Gränzen zusammen fallen, oder nicht. Denn geschiehet dieses, so ist kein Zweifel übrig, daß die Figuren gleich seyn; und dieses ist der Satz, aus welchem man gemeiniglich die Gleichheit der Figuren schliesset, wie wir bereits selbst zum öftern gethan, wenn sich die Gleichheit zwoer Figuren, die wir eben nicht suchten, von selbst, und indem wir bloß mit der Betrachtung ihrer Umkreysse beschäftiget waren, darstellete. Auf die Art haben wir geschlossen, daß jede zwey Dreyecke, welche man aus gleichen Seiten zusammen gesetzet hat, auch der Fläche nach einander gleich seyn, weil sie auf einander gepasset werden können: wie auch zwey Dreyecke, in welchen gleiche Winkel von gleichen Seiten be-

beschlossen werden; oder auch solche, in welchen gleiche Seiten zwischen gleichen Winkeln liegen. Von einigen Arten der Vierecke, und von den Cirkeln, ist eben das zu sagen.

§. 3. Allein, weil auch solche Figuren einander gleich seyn können, deren Umkreisse nicht eben zusammen fallen, zwey Dreyecke zum Exempel, welche gar verschiedene Seiten und Winkel haben, oder ein Dreyeck und ein Viereck, ein Viereck und ein Cirkel: so lässet sich dieses Kennzeichen gleicher Figuren nicht überall unmittelbar anwenden. Man muß in diesem Falle eine oder die andere, oder beide Figuren, welche man vergleichen will, in Theile zerschneiden, welche auf einander passen können, und aus der Gleichheit dieser Theile auf die Gleichheit der ganzen Figuren schliessen. Dieses geschiehet nicht ohne Umschweif, welcher zwar nicht eben allzu groß ist; allein wir haben uns überall die gröste Leichtigkeit, die nur in unserer Gewalt ist, zum Zweck vorgesetzet, und wolten also gerne auch diese kleine Umschweife ersparen. Derowegen haben wir ein anderes Kennzeichen der Gleichheit zwoer Figuren erwehlet, aus welchem so wohl die Gleichheit der ebenen Figuren, als auch die Gleichheit der Cörper selbst, viel leichter einzusehen seyn wird, als wenn man der gemeinen Art folget, und die Figuren auf solche zurück bringet, welche auf einander passen können. Die Gleichförmigkeit und Deutlichkeit erfordert, daß wir diesen Grundsatz zuerst auf die ebene Flächen anwenden, ehe wir ihn von den Cörpern brauchen, ob er zwar bey den Oberflächen nicht so vielen Vortheil bringet, als bey den Cörpern.

§. 4. Es bestehet aber dieser Grundsatz in nachfolgenden. Wenn man zwo Figuren, sie mögen geradelinicht oder krummlinicht seyn, ABCD und EFGH zwischen zwo Parallel-Linien AE, CG legen, und sodann eine dritte Linie IK, wie man will, mit den vorigen AE, CG parallel ziehen kan, deren Theile IL, MK, welche in die Figuren ABCD und EFGH fallen, einander gleich sind, IL, nemlich $\doteq$ MK, so sind die Figuren ABCD und EFGH einander gleich.

F. 205.

§. 5. Wir haben nur etwas weniges, zu deutlicherem Verstande des Satzes, beyzufügen, welches desto nothwendiger ist, weil er neu scheinen kan, indem er in den Anfangs-Gründen nicht leicht gebrauchet worden. Wir erinnern demnach 1), daß erlaubt seyn müsse, die Figuren im Anfange zu legen, wie man will, und sie nach Belieben zu kehren und zu wenden, daß aber, nachdem man sie einmal so oder so

IX. Abschnitt.

zwischen Parallel-Linien gesetzet, man sie hernach nicht wieder versetzen müsse. 2) Daß, indem wir gesaget, man müsse die Linie IK, nach Belieben, mit der AE parallel ziehen können, ohne daß die Theile IL, MK verschieden werden, wir nicht sagen wollen, es müsse dieses nur bey einer oder der andern solcher Linien zutreffen, in welchem Falle allerdings die Figuren verschiedener Grösse seyn könten; sondern wir wolten sagen, es müssen die Theile einer mit der AE parallel gezogenen Linie, welche in die Figuren fallen, einander gleich seyn, man mag diese Parallel-Linie ziehen wie man will, so, daß man den Satz auch nachfolgendergestalt ausdrucken kan: Wenn man zwo Figuren hat, ABCDA und EFGHE, und man kan durch dieselben beide so viele Parallel-Linien ziehen BO, IK, CQ, DH als man will, deren Theile innerhalb den Figuren einander gleich sind, BN, nemlich = FO, und IL = MK, wie auch CP = GQ, so sind diese Figuren ABCDA, EFGHE einander gleich.

F. 206.

§. 6. Wir zweifeln nicht, daß dieser Satz an sich klar und deutlich seyn werde. Solte ja noch einige Bedenklichkeit dabey übrig seyn, so wird dieselbe verschwinden, wenn man erweget, daß, da eine Oberfläche nach der Länge und Breite ausgedehnet ist, zwo Oberflächen einander gleich seyn müssen, wenn die eine so weit in die Länge ausgedehnet ist als die andere, und wenn sie eben so breit ist als die andere. Da nun aber die zwo Figuren ABCD und EFGH zwischen den Parallelen AE, CG liegen, so siehet man sogleich ein, daß beide Figuren von der Linie AE bis an die Linie CG gleich ausgedehnet sind, weil diese Linien einander parallel liegen, und folgends überall gleiche Entfernungen von einander haben, und beide Figuren sich von der einen dieser Parallel-Linien AE bis an die andere CG erstrecken. Will man nun diese Ausdehnung der Figuren von AE bis an CG vor die Breite derselben annehmen, wie man thun kan, so muß man sagen, daß die Figuren ABCD, EFGH gleich breit sind.

F. 205.

§. 7. Was aber die Ausdehnung der Figuren in die Länge betrift, welche nunmehro der Linie AE parallel genommen werden muß; so ist eine jede der Figuren ABCD, EFGH nach dieser Strecke ungleich ausgedehnet, oben weniger als in der Mitte, und in der Mitte mehr als weiter unten. Allein, wo man auch die Ausdehnung nach dieser Strecke in der einen Figur messen will, wie dieses bey der ersten Figur

AB-

ABCD durch IL geschehen; so findet man, daß diese zwote Figur E FGH sich daselbst eben so weit von M nach K erstrecke, weil IL = MK. Also sind auch die Figuren ABCD, EFGH zwischen den Parallel-Linien AE, CG in die Breite gleich ausgedehnet; sie haben aber auch nach der Strecke der Parallel-Linien gleiche Ausdehnungen in die Länge, wo man auch diese Ausdehnung der Figuren messen, und mit einander vergleichen will. Können bey so gestalten Sachen die Figuren ungleich seyn?

IX. Abschnitt.

Gleichheit gewisser Parallelogrammen und Dreyecke.

§. 8. Wir können also diesen Satz nunmehro zu den Betrachtungen, welche wir vorhaben, anwenden; müssen aber, damit wir uns desto deutlicher erklären können, zuvor noch sagen, daß bey denen Parallelogrammen und Dreyecken eine **Grund-Linie** genennet werde, eine jede Seite der Figur, welche man annehmen will, wenn man sich vorstellet, daß das Dreyeck oder Parallelogrammum auf derselben stehe. Die Sache hat an sich keine Schwierigkeit, und wird gleich deutlicher werden.

§. 9. Am leichtesten ist aus unserm Grundsatze einzusehen, daß jede zwey Parallelogrammen, welche auf gleichen Grund-Linien stehen, und zwischen zwo Parallel-Linien enthalten sind, deren eine durch die Grund-Linien gehet, einander gleich sind. Denn wenn auf den Grund-Linien AB, CD, und zwischen den Parallel-Linien AD, EF die Parallelogrammen BE, CF stehen, und man ziehet mit der Linie AD die Linie GHIK parallel durch beyde Parallelogrammen: so ist leicht einzusehen, daß GH der Grund-Linie AB des Vierecks BE, und IK der Grund-Linie CD des Vierecks CF gleich seyn werde. Denn GB sowohl als ID sind ebenfals Parallelogrammen, weil ihre entgegen gesetzete Seiten einander parallel laufen, und also sind diese Seiten, welche einander entgegen gesetzet sind, auch einander gleich, IV, 198. Da nun aber gesetzet worden ist, daß die Grund-Linie AB, CD einander gleich seyn sollen: so müssen auch die Linien GH, IK einander gleich seyn. Und weil dieses von einer jeden Linie, die wie GK mit der AD parallel gezogen worden, erwiesen werden kan: so sind die Parallelogrammen BE und CF nach unserm Grundsatze IX, 4. einander gleich.

F. 207.

§. 10. Ich sehe nicht, was an der Bündigkeit dieses Beweises auszusetzen wäre. Doch wollen wir zur Erleuterung desjenigen, so wir

IX. Abschnitt. gleich Anfangs von der gewöhnlichen Art die Gleichheit der Figuren zu erweisen gesagt, IX, 2. uns vorstellen, wie Euclides diesen Satz erweiset. Er setzet zum Anfang, daß die zwey Parallelogrammen A B CD und ABFE auf einer gemeinschaftlichen Grund-Linie AB, zwischen den parallelen AB und CF stehen, so ist CD = AB = EF: und wenn man zu diesen gleichen Linien CD, EF das Stück DE hinzu setzet, so wird auch CD + DE = DE + EF, das ist CE = DF. Es ist aber auch CA = DB und EA = BF, weil dieses ebenfals einander entgegen gesetzete Seiten des Parallelogrammen sind. Und es sind demnach die Seiten des Dreyeckes ECA den Seiten des Dreyeckes FDB gleich, CE nemlich = DF, CA = DB und AE = BF. Demnach sind auch diese Dreyecke einander gleich, ECA = FDB. Es haben aber diese Dreyecke das Dreyeck GED mit einander gemeinschaftlich, und man kan also dieses Dreyeck von ihnen beiderseits abziehen. Geschiehet dieses, so wird auch ECA − EDG = FDB − EDG. Nun ist aus der Figur zu ersehen, daß ECA − EDG das Viereck CAGD, und FDB − EDG das Viereck FEGB gebe, welche Vierecke demnach ebenfals einander gleich seyn werden. Und wenn man demnach einem jeden derselben das Dreyeck GAB zusetzet, so kommen wieder gleiche Figuren. Es ist aber CAGD + GAB = ABDC, und FEGB + GAB = ABFE, und diese Figuren ABDC, ABFE sind die Vierecke, deren Gleichheit solte erwiesen werden. Eben dieses kan nunmero gar leicht auf solche Vierecke mit parallelen Seiten angewandt werden, welche zwischen Parallel-Linien auf gleichen Grund-Linien stehen, ob diese Grund-Linien gleich im übrigen ausser einander liegen.

F. 208.

§. 11. Man schliesset aus diesem Satze, wie man ein Parallelogrammum machen könne, so einem andern dergleichen Vierecke gleich ist, und einen gegebenen Winkel habe. Es sey das Parallelogrammum AB gegeben, und der gegebene Winkel sey C: man soll ein Parallelogrammum machen, so dem gegebenen AB gleich sey, und unter dessen Winkeln einer so groß sey als C. Dadurch wird die Grösse der übrigen Winkel dieser Art Vierecke bestimmet; denn ist ein Winkel eines derselben gegeben, so sind alle gegeben. Man verlängere die Linie DB, und setze an dieselbe den Winkel EFG = C. Man verlängere auch die entgegen gesetzete Seite des Viereckes AB, bis sie die EF schneidet, und von dannen weiter, so viel nöthig ist, mache FG = DB, ziehe sodann durch G die gerade Linie GH der FE parallel, so wird das

F. 209.

das Parallelogrammum EG dem gegebenen AB gleich seyn, und den verlangeten Winkel haben.

IX. Abschnitt

§. 12. Auf diese Art verwandelt man ein jedes Parallelogrammum in ein rechtwinklichtes, wenn man alles machet, wie eben gewiesen worden, aber den Winkel EFG nicht schief, sondern gerade annimmet, und ein jedes schiefwinklichtes Parallelogrammum ist einem rechtwinklichten gleich, welches mit jenem eine gleiche Grundlinie hat, und zwischen einerley Parallellinien kan gesetzet werden.

§. 13. Man pfleget die Entfernung der Parallellinien AH, DG zwischen welchen zwey Parallelogrammen, oder auch jede zwo andere Figuren, beschrieben sind, das ist, die Perpendicularlinie auf die zwo parallelen AH und DG, welche zwischen ihnen enthalten ist, die Höhe der Parallelogrammen, oder überhaupt der Figuren zu nennen; und man kan also den Satz, mit welchem wir gegenwärtig beschäftiget sind, auch also ausdrucken: Alle Parallelogrammen, welche gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, sind einander gleich. Gesetzet EFGH sey ein rechtwinklichtes Parallelogrammum, so ist EF selbst seine Höhe, und eben diese EF ist auch die Höhe des Vierecks AB, welches dem EG gleich ist. Eben deswegen, weil die Höhe EF der beyden Parallelogrammen gemeinschaftlich ist, und DB=FG, sind die Parallelogrammen einander gleich.

§. 14. Man kan hieraus auch die Dreyecke mit einander vergleichen. Denn man kan ein jedes Dreyeck zu einem Parallelogrammum machen, von welchem es so dann die Helfte ist. IV, 179. Stehen nun zwey Dreyecke ABC, DEF auf gleichen Grundlinien BC, EF, und zwischen denen Parallellinien BF, AG, und man machet die Parallelogrammen BH, EG aus denselben, (welches leicht geschehen kan, wenn man nur AH der BC, und DG der EF gleich machet, und so dann die geraden Linien CH und FG ziehet) IV, 210. so sind die Parallelogrammen einander gleich, und folgends auch die Dreyecke, ABC, DEF, welche ihre Helften sind. Daß demnach auch alle Dreyecke, welche gleiche Grundlinien BC=EF haben, und einerley Höhen, oder welche zwischen einerley Parallellinien BF, AG können gesetzet werden, einander gleich sind.

F. 210.

§. 15. Dieses ist der gemeine Beweiß dieses Satzes: allein da wir den Nutzen des Grundsatzes IX, 4. von der Gleichheit der Figuren, welchen wir angenommen, uns zu zeigen, und denselben zu erläu-

IX. Abschnitt. läutern, vorgenommen haben, so würden wir wider unsern Zweck handeln, wenn wir nicht auch diesen Satz von der Gleichheit der Dreyecke aus demselben erwiesen.

F. 211. §. 16. Es seyen demnach die Dreyecke ABC und abc beyde zwischen den Parallellinien BC und DE beschrieben, und ihre Grundlinien BC, bc seyen einander gleich. Man ziehe die gerade Linie Fg wie man wil, mit der Bc oder DE parallel. Es ist zu beweisen, daß die Theile dieser geraden Linie FG, fg, welche innerhalb der Figuren fallen, einander gleich seyn werden, woraus so dann, nach unserem Grundsatze, die Gleichheit der Dreyecke so gleich folgen wird. Dieser Beweiß stehet folgendergestalt: Weil die zwo geraden Linien AB und ab beyde von den drey Parallellinien DE, Fg und Bc, geschnitten werden, so ist die Verhältniß AB : AF der Verhältniß ab : af gleich. Und man hat die Proportion AB : AF = ab : af. VII, 7. Nun aber hat man auch in dem Dreyecke ABC, in welchen FG mit der BC parallel gezogen worden, nachstehende gleiche Verhältnisse BC : FG = AB : AF; und in dem Dreyeck abc kan man aus eben dem Grunde schliessen, bc : fg = ab : af. VII, 27. Da nun also die beyden Verhältnisse BC : FG und bc : fg den beyden Verhältnissen AB : AF, und ab : af gleich sind, von diesen letzteren aber gewiesen worden ist, daß sie einander gleich sind, so müssen sie auch selbst gleich seyn, die Verhältniß, nemlich BC : FG muß der Verhältniß bc : fg gleich, und die Proportion BC : FG = bc : fg richtig seyn. Oder solte man die Sache nicht so geschwind übersehen können, so schreibe man die erwiesene Proportionen ordentlich:

$$AB : AF = ab : af,$$
$$AB : AF = BC : FG$$
$$ab : af = bc : fg,$$

so kan man aus den zwo erstern Verhältnissen diese schliessen ab : af = BC : FG, und aus dieser und der dritten folget BC : FG = bc : fg. Nun aber ist BC = bc, denn die Dreyecke ABC, abc haben gleiche Grundlinien, folgends auch FG = fg.

§. 17. Es ist fast nicht nöthig etwas weiter hinzu zu fügen. Man siehet leicht, daß eben wie Fg gezogen worden, sich auch durch alle Puncte der Dreyecke Parallellinien ziehen lassen, von welchen die Stücke, welche innerhalb die Dreyecke fallen, wie hier FG, fg, jederzeit gleich seyn; und dieses ist eben das Kennzeichen, welches wir überhaupt angenommen haben, die Gleichheit der Figuren einzusehen.

ben. Aber man stehet auch hieraus unmittelbar, daß nicht allein die Dreyecke ABC, abc welche auf gleichen Grundlinien, zwischen einerley Parallelen stehen, selbst einander gleich sind, sondern daß auch die Vierecke gleich seyn, welche von ihnen durch die gerade Linie Fg abgeschnitten werden, nemlich FC = fc, wie auch die Dreyecke AFG und afg, welche übrig bleiben, wenn man von den ganzen Dreyecken ABC, abc die eben besagete Vierecke FC, fc durch die Linie Fg abschneidet. Wiewohl diese Dreyecke stehen auch auf gleichen Grundlinien FG = fg, zwischen den Parallellinien DE und Fg.

§. 18. Wenn ein Dreyeck und ein Parallelogrammum zwischen zwo Parallellinien auf gleichen Grundlinien stehen, so ist das Dreyeck die Helfte des Viereckes. Dieses ist aus dem gesageten gar bald geschlossen. ABC ist das Dreyeck, DEFG das Parallelogrammum: es wird gesetzet, es sey BC = DE, und wir sollen zeigen, daß das Dreyeck ABC halb so groß sey, als das Viereck DEFG. Man ziehe die Queerlinie GE, welche das Parallelogrammum in zwey gleiche Dreyecke GDE, GFE theilen wird, wie längst IV, 200. gezeiget worden ist, und auch daraus sichtlich ist, weil die zwey Dreyecke GDE, FGE gleiche Grundlinien DE, GF, und gleiche Höhen haben. Es ist demnach das Dreyeck GDE die Helfte des Vierecks DF. Nun ist das eben genannte Dreyeck GDE dem Dreyecke ABC gleich, IX, 14. also ist auch ABC die Helfte des Viereckes DF.

F. 212.

§. 19. Theilet man die Grundlinie des Vierecks GE mit H in zwey gleiche Theile, und ziehet HI mit der DG parallel; so sind auch die zwey Vierecke DI und HF einander gleich, und jedes derselben ist die Helfte des ganzen Viereckes DF. Nun ist das Dreyeck ABC ebenfals die Helfte dieses Viereckes DF, derowegen ist das Dreyeck ABC dem Vierecke DI gleich: und man machet also leicht ein Parallelogrammum, welches einem gegebenen Dreyecke gleich sey, wenn man nur die Grundlinie DH dieses Viereckes halb so groß nimmet, als die Grundlinie des Dreyeckes BC ist, und hernach auf DH ein Parallelogrammum DI beschreibet, dessen Höhe so groß sey als die Höhe des Dreyeckes ABC. Man kan dazu den Winkel bey D so groß oder so klein annehmen als man wil. Machet man diesen Winkel bey D gerade, so bekommet man ein geradewinklichtes Viereck, welches dem Dreyecke ABC gleich ist. Und auf die Art kan man ein jedes Dreyeck in ein rechtwinklichtes Viereck verwandeln.

F. 213.

§. 20. Aus eben dem Satze von der Gleichheit der Dreyecke,

IX. Abschnitt. welche auf gleichen Grundlinien zwischen zwo Parallellinien stehen, wird auch geschlossen, daß ein Viereck, unter dessen Seiten zwo einander parallel laufen, einem Dreyecke gleich sey, dessen Grundlinie, die Summe der gedachten parallelen Seiten ist, und die Höhe, die Entfernung derselben von einander. Es sey ABCD ein dergleichen Viereck, F. 214. und AD sey der BC parallel. Man ziehe AC, und theile dadurch das Viereck in zwey Dreyecke ABC, ACD. So dann mache man in der verlängerten BC die Linie CE = AD, und ziehe AE. Weil nun die zwey Dreyecke ADC, ACE zwischen den parallelen AD, BE auf gleichen Grundlinien AD, CE stehen: so sind diese Dreyecke einander gleich. Folgends ist ABC + ADC = ABC + ACE, das ist, das Viereck ABCD ist dem Dreyecke ABE gleich. Nun ist die Grundlinie desselben BE = BC + CE, das ist = BC + AD, weil CE = AD, und seine Höhe ist die Entfernung der Parallellinien AD, BE von einander. Hieraus ist leicht ein dergleichen Viereck, in ein Parallelogrammum zu verwandeln. Die Grundlinie dieses Parallelogrammum wird $\frac{1}{2}$ BE, das ist $\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ CE, oder $\frac{1}{2}$ BC + $\frac{1}{2}$ AD, und seine Höhe ist der Höhe des Dreyeckes ABE gleich.

Die übrigen flachen Figuren mit Dreyecken zu vergleichen.

§. 21. Was die übrigen geradelinichten Figuren anlanget, welche unter denen die wir betrachtet haben, nicht mit begriffen sind, das ist, bey welchen sich das allgemeine Kennzeichen der Gleichheit der Figuren entweder gar nicht, oder doch nicht leicht, anwenden lässet: so sind dieselben gleich, wenn sie aus gleichen Dreyecken zusammen gesetzet sind, und dieses ist ein Kennzeichen ihrer Gleichheit. Man kan nemlich eine jede solche Figur, wie wir schon oben gesehen, durch Queerlinien in Dreyecke zertheilen. Hat man nun zwey Vielecke mit einander zu vergleichen, so theile man sie in Dreyecke, und sehe, ob dieses so geschehen könne, daß vor jedes Dreyeck, welches in der ersten Figur vorkommet, in der anderen ein Dreyeck vorkomme, welches jenem gleich ist. Ist dieses, so sind die Figuren nothwendig gleich. Allein weil daraus, daß die Figuren nicht dergestalt getheilet werden können, nicht folget, daß sie ungleich sind; denn es können auch die Summen ungleicher Grössen gleich seyn, und aus ungleichen Dreyecken können gleiche Figuren zusammen gesetzet werden: so ist diese Art die Gleichheit der Figuren zu untersuchen nicht überall anzuwenden.

§. 22. Man

§. 22. Man kan sich derowegen noch eine andere Methode vorstellen, die geradelinichte Figuren mit einander zu vergleichen, welche die Unbequemlichkeiten der vorigen nicht hat, und welche darinnen bestehet, daß man eine jede vieleckigte Figur erstlich in ein einziges Dreyeck, und hernach in ein geradewinklichtes Viereck verwandele. Denn wenn man dieses bey zwo Figuren beobachtet, und setzet vor beyde Figuren rechtwinklichte Vierecke, welche ihnen gleich sind, so kan man hernach zum öfteren durch dasjenige, so bereits gewiesen worden, sonst aber allezeit vermittelst desjenigen, so folgen wird, diese rechtwinklichte Figuren mit einander vergleichen, und sehen, ob sie gleich seyn oder nicht; findet man nun das erste, so ist der Schluß leicht gemacht, daß auch die Vielecke, aus welchen sie gemachet werden, und welchen sie gleich sind, einander gleich seyn müssen.

IX. Abschnitt.

§. 23. Wir wollen diese Anweisung, jedes Vieleck in ein Dreyeck zu verwandeln, so leicht vorstellen als es möglich ist. Sie bestehet darinnen, daß, wenn eine vieleckigte Figur gegeben ist, von so vielen Seiten als man wil, man eine andere Figur mache, welche eine Seite weniger hat als jene, und doch jener gleich ist. Man siehet leicht, daß, wenn man dieses bey allen Vielecken bewerkstelligen kan; man leicht aus einem Sechsecke ein Fünfeck, aus einem Fünfecke ein Vierck, und endlich aus einem Vierecke ein Dreyeck werde machen können, und wir haben also in der That nichts anderes zu zeigen, als wie überhaupt die Zahl der Seiten einer jeden geradelinichten Figur um eine zu vermindern sey.

§. 24. Es sey die Figur das Sechseck ABCDEF, welches man in ein Fünfeck verwandeln sol, so schneide man vermittelst einer Queerlinie AE von dem gegebenen Sechsecke ein Dreyeck ab, wie hier AFE. Durch die Spitze dieses Dreyecks F ziehe man mit der gezogenen Queerlinie AE die gerade Linie FG parallel, auf diese oder jene Seite. Man verlängere so dann eine von den Seiten des Sechsecks, welche an der AE liegen, als BA, so lange, bis sie die Linie GF in G schneidet, so kan man eine gerade Linie GE ziehen, und man hat an statt des Sechsecks ABCDEFA, das Fünfeck GBCDEG, welches dem Sechseck gleich ist.

F. 215.

§. 25. Diese Gleichheit ist also einzusehen. Das Sechseck ABCDEF bestehet aus dem Fünfecke ABCDE, und aus dem

 Drey-

IX. Abschnitt.

Dreyecke AEF; das Fünfeck GBCDE aber bestehet wieder aus ABCDE und aus dem Dreyecke GAE. Nun sind die zwey Dreyecke FAE und GAE gleich, weil sie beyde auf der Seite AE und zwischen den Parallellinien AE, GF stehen. Derowegen sind die zwo Figuren, das Sechseck und das Fünfeck, aus zwey Theilen zusammen gesetzet, welche einander gleich sind, nemlich das Sechseck aus ABCDE+AEF, und das Fünfeck aus ABCDE+AEG, woraus allerdings folget, daß dieselbe Figuren einander gleich sind. Es ist aber das Sechseck in ein Fünfeck verwandelt worden, indem der Winkel FAB verschwunden ist, da man an die Stelle der zwo Seiten BA+AF, diese zwo BA+AG in die Figur gebracht hat, welche gerade ausliegen, und in der That nur eine Seite BAG geben.

§. 26. Soll man aber ein Dreyeck machen, welches einem gegebenen regulären Vielecke gleich ist, so kan man viel leichter fertig werden, als mit andern Vielecken. Man kan jederzeit in einem regulären Vielecke ein Punct finden, welches von allen Ecken, wie auch von allen Seiten der Figur gleich weit entfernet ist, und wenn man von diesem Puncte, welches wir den Mittelpunct des Vieleckes nennen wollen, an alle Ecken des Vieleckes gerade Linien ziehet, so wird das Vieleck in lauter solche Dreyecke getheilet, welche auf einander passen können. Man könte dieses als bekannt annehmen, denn es fliesset aus demjenigen, so wir von der Beschreibung dieser Art Vielecke gewiesen; und der Mittelpunct des Vieleckes ist mit dem Mittelpuncte des Cirkels, in welchen oder um welchen das Vieleck beschrieben worden ist, einerley. Doch ist es besser, daß wir es von vorne beweisen. Wir hätten dieses bereits thun können, und vielleicht auch bereits thun sollen. Wir enthalten uns aber mit Fleiß, den Leser mit solchen Sätzen zu überhäuffen, deren Nutzen ihm nicht so gleich in die Augen leuchtet, und, wir wollen es nur bekennen, es begegnet uns auch zuweilen, daß wir einen oder den anderen Satz, welcher seinen Nutzen erst in den folgenden hat, mitzunehmen vergessen, welcher hernach da muß eingerücket werden, wo wir ihn gebrauchen.

F. 216.

§. 27. Es sey also zu beweisen, daß ein jedes reguläres Vieleck einen Mittelpunct habe. Wir werden dieses am besten zeigen können, wenn wir weisen, wie derselbe zu finden sey. Es sey das reguläre Siebeneck ABD gegeben, und dessen Mittelpunct zu suchen. Man theile den Winkel desselben A, vermittelst der Linie AC, in zwey gleiche Theile, wie auch den nebenstehenden B vermittelst der BC. Diese geraden

raden Linien AC, BC laufen nothwendig in einem Puncte zusammen. Man bemerke dieses mit C, so ist C der gesuchete Mittelpunct. Denn die Winkel CAB, CBA sind einander gleich; weil sie die Helften der gleichen Polygonwinkel A und B sind. Folgends sind auch die Seiten AC und CB, in dem Dreyecke ACB einander gleich. Man ziehe von C an die nächste Ecke des Vieleckes die gerade Linie CE. Weil nun auch CBE die Helfte des Polygonwinkels B und folgends dem Winkel CAB gleich ist, aber auch CB=CA, und BE=AB, so ist das Dreyeck CBE dem Dreyecke CAB gleich und ähnlich, und CE=CB, aber auch CEB=CBA; IV, 112. und CEB ist wieder die Helfte des Polygonwinkels. Demnach sind die drey Puncte A, B, E von dem Mittelpuncte C gleich weit entfernet: aber man hat auch eben die Gründe weiter zu gehen und zu zeigen, daß D von C so weit entfernet sey, als E, welche man gebrauchet zu zeigen, daß E von C so weit entfernet sey als B. Und man kan also schliessen, daß alle Ecken der Winkel des Vieleckes von dem Puncte C gleich weit entfernet sind, wie auch, daß durch die gerade Linien CA, CB, CE und so fort, das reguläre Vieleck in gleiche Dreyecke zertheilet werde.

IX. Abschnitt.

§. 28. Und hieraus schliesset man leicht, daß auch alle Seiten der Figur von C gleich weit entfernet sind. Denn die Entfernungen der Seiten von C sind die Perpendicularlinien, welche aus C auf die Seiten fallen, dergleichen CF ist. Daß aber diese Perpendicularlinien alle gleich sind, siehet man aus der Gleichheit und Aehnlichkeit der Dreyecke CAB, CBE gar leicht, und wir wollen den Leser mit diesem Beweise nicht einmal aufhalten. Auch ist daran nicht zu zweifeln, daß wenn man aus C als dem Mittelpuncte durch A einen Cirkelkreis beschreibet, dieser auch durch B, E, D und die übrigen Ecken der Figur gehen werde, wie auch, daß wenn man um eben dieses Punct C einen Cirkelkreis dergestalt beschreibet, daß er die Seite AB berühret, er die übrigen Seiten alle berühren werde. In dem ersten Falle wird der Cirkelkreis um die reguläre Figur beschrieben, in dem andern Fall aber in dieselbe.

§. 29. Will man nun ein Dreyeck beschreiben, welches einem beliebig angenommenen Theile der regulären Vielecke CABEDC gleich ist, so verfahre man folgendergestalt. Man setze an eine beliebig angenommene gerade Linie ab=AB, ziehe auf eben diese Linie cf perpendicular, und mache sie so groß als CF ist. So dann ziehe man ca, cb; so wird das Dreyeck cab dem Dreyecke CAB gleich;

F. 216. 217.

weil

IX. Abschnitt.

weil diese Dreyecke gleiche Grundlinien AB=ab, und gleiche Höhen CF=cf haben. Ferner machet man auch be=AB und ziehe ce, so ist das Dreyeck cbe wieder dem Dreyecke ACB gleich, aus eben der Ursach die wir angegeben, weil sie gleiche Grundlinien be=AB, und gleiche Höhen CF=cf haben. Es ist aber auch das Dreyeck CAB dem Dreyecke CBE gleich, und folgends auch cbe=CBE. Fähret man nun in dieser Arbeit fort, und machet wieder ed=AB, und ziehet cd, so wird aus den wiederholten Gründen wieder ced=ACB=CED. Und da nun also CAB=cab, und CBE=cbe, wie auch CED=ced, so ist allerdings die Summe der ersteren dieser Dreyecke CAB+CBE+CED gleich der Summe der letzteren cab+cbe+ced, und die Figur CABEDC, welche aus den ersteren Dreyecken zusammen gesetzet ist, ist gleich dem Dreyecke cad, welches aus den letzteren Dreyecken bestehet. Man siehet aber auch daß ab+be+ed=AB+BE+ED, das ist, daß ad die Grundlinie des Dreyeckes cad dem Theile des Umkreises der regulären Figur ABED, gleich sey.

§. 30. Und es ist demnach das Stück des regulären Vieleckes, welches wir betrachten CABEDC einem Dreyecke cad gleich, dessen Grundlinie ad dem äusseren Umkreise desselben ABED; und dessen Höhe cf der geraden Linie CF, welche aus dem Mittelpuncte des regulären Vieleckes auf eine Seite desselben perpendicular gefallen, das ist, der Entfernung der Seiten von dem Mittelpuncte gleich ist. Wir schliessen hieraus zweyerley: Erstlich, daß, was von dem Theile des regulären Vieleckes erwiesen worden ist, auch von dem ganzen Vielecke dergestalt richtig sey, daß, wenn man ein Dreyeck verfertigen wil, welches einem regulären Vielecke gleich ist, man nur zur Grundlinie desselben den ganzen Umkreis des Vieleckes, und zur Höhe eben die Linie CF, nehmen müsse. Oder daß ein jedes reguläres Vieleck einem Dreyecke gleich sey, dessen Grundlinie der ganze Umkreis des Vieleckes ist, und die Höhe, die Entfernung der Seiten des Vieleckes von dem Mittelpuncte desselben. Und zweytens, daß, was hier von dem Theile des regulären Vieleckes CABED erwiesen worden, überhaupt von solchen Figuren richtig sey, welche, wie CABED aus gleichen und ähnlichen gleichschenklichten Dreyecken zusammen gesetzet sind, ob sie zwar nicht als ein Theil eines regulären Vieleckes angesehen werden können. Denn aus diesen Begriffen, daß die Dreyecke CAB, CBE, CED gleich, ähnlich und gleichschenklicht

sind,

sind, ist dasjenige, so wir hier erwiesen, hergeleitet worden, und kan also überhaupt von allen Figuren geschlossen werden, welche so wie CABED aus dergleichen Dreyecken zusammen gesetzet sind.

§. 31. Daß aber dergleichen Figuren seyn können, welche aus gleichen und ähnlichen gleichschenklichten Dreyecken, wie CABED zusammen gesetzet sind, ob sie zwar nicht können zu regulären Figuren ergänzet werden, siehet man gar leicht ein. Gesetzet zum Exempel der Winkel ACB in der 218 Figur betrüge $\frac{11}{21}$ eines geraden Winkels, so würde er, wenn man ihn siebenmal um C setzet $\frac{77}{21}$, das ist, $3\frac{2}{3}$ gerade Winkel betragen, und also weniger als viere, und demnach würden ACB, BCD, DCE und so fort kein reguläres Vieleck voll machen. Acht mal aber könte man diesen Winkel um C nicht setzen, weil $\frac{11}{21}$ acht mal genommen $\frac{88}{21}$ giebet, das ist $4\frac{4}{21}$, und also mehr als vier gerade Winkel.

F. 218.

§. 32. Indessen kan man auch hier aus C durch A einen Cirkelbogen beschreiben, welcher durch die Puncte B, D, E gehen wird. Wir setzen, es sey dieses geschehen, so ist aus demjenigen klar, so wir oben V, 90. von den regulären Polygonen, die in einen Cirkel beschrieben sind, gezeiget, daß wenn man die Zahl der Seiten AB, BD, DE, ohne daß man den Bogen AE vergrössere, vermehret, der Umkreis des Polygons dem Cirkelbogen, und die Perpendicularlinie CF dem Halbmesser, immer näher und näher kommen werde: und dieses zwar ohne Ende, das ist, ohne daß man jemals gezwungen wird, in dieser Näherung aufzuhören. Denn man kan die Zahl der Seiten, so groß sie auch seyn mag noch immer vermehren. Und eben so deutlich ist es auch, daß, wenn man mit den Seiten AB, BD, DE andere ab, bd, de parallel ziehet, welche die Cirkelbogen berühren, und vermehret nach und nach die Zahl dieser Seiten, sich auch der Umkreis abde dem Cirkelbogen AE ohne Ende nähern werde.

§. 33. Dieses nun giebet uns die Schlüsse an die Hand, durch welche wir wenigstens den Gedanken eine geradelinichte Figur vorstellen können, welche so groß ist als der Ausschnitt des Cirkels CABDE. Denn dieselbe würklich zu beschreiben, ist deswegen nicht möglich, weil man dieses zu bewerkstellen eine gerade Linie haben müste, welche so groß ist als der Cirkelbogen AE, welche anzugeben noch zur Zeit in keines Geometrä Gewalt ist, wenn von einer solchen Richtigkeit die Rede ist, welche durch unwidersprechliche Schlüsse darge-

IX. Abschnitt. F. 219.

gethan werden kan, dergleichen man in dieser Wissenschaft überall suchet. Könte man aber dieses machen, und wäre die Linie GH in der 219 Zeichnung dem Bogen AE gleich, so dürfte man hernach nur auf GH ein Dreyeck GHI setzen, dessen Höhe GI so groß ist, als der Radius des Ausschnittes CA. Dieses Dreyeck GHI wäre dem Ausschnitte CAE gewiß vollkommen gleich. Und daß dieses sey, kan aus den bisher gelegeten Gründen dargethan werden.

§. 34. Es ist nemlich klar, daß das Viereck CABDE kleiner sey als das Dreyeck IGH. Denn wenn man sich das Dreyeck vorstellet, welches dem Vielecke CABDE gleich ist, welches gar leicht geschehen kan, ohne daß man die Figur desselben vor Augen habe; so ist die Höhe desselben CF kleiner als IG, und die Grundlinie, welche so groß ist als der Umkreis desselben ABDE ist kleiner als GH. Woraus nothwendig folget, daß das Dreyeck, welches dem Vielecke CABDE gleich ist, und folgends das Vieleck selbst, kleiner sey als IGH. Indessen nähert sich das Vieleck CABDE dem Dreyecke IGH beständig, wenn man die Zahl seiner Seiten vermehret, weil dadurch so wohl CF der IG, als auch ABDE der GH immer näher kommet; niemals aber kan das Vieleck CABDE grösser werden als das Dreyeck IGH. Hieraus aber schliessen wir, daß es nicht möglich sey, daß der Ausschnitt CAE kleiner sey als das Dreyeck IGH. Denn wäre der Ausschnitt kleiner als das Dreyeck, so könte man machen daß ein Polygon, wie CABDE grösser würde als der Ausschnitt CAE. Gesetzet, nemlich der Ausschnitt wäre so groß als das Dreyeck IKL; weil nun durch die Vermehrung der Seiten des Vieleckes CABDE man dem Dreyecke IGH immer näher und näher kommen kan, so kan man ihm auch näher kommen, als das Dreyeck IKL dem erwehneten Dreyecke IGH ist, das ist, man kan machen, daß das Vieleck grösser wird als IKL. So bald dieses geschehen, ist das Vieleck grösser als der Ausschnitt, von welchem man gesetzet daß er dem IKL gleich sey. Dieses aber, daß das Vieleck CABDE jemals grösser werde als der Ausschnitt CAE ist ohnmöglich: also ist auch ohnmöglich daß das Dreyeck IGH grösser sey als der Ausschnitt CAE, oder daß der Ausschnitt kleiner sey als das Dreyeck.

§. 35. Man kan aber auch auf eben die Art zeigen, daß das Dreyeck IGH nicht kleiner seyn könne als der Ausschnitt CAE. Denn das Vieleck Cabde ist zwar grösser als das Dreyeck IGH, weil die Grundlinie des Dreyeckes, welche dem Vielecke Cabde gleich ist, das ist,

ist, die Länge des Umkreises desselben a b d e grösser ist als der Cirkelbogen A E, und folgends auch grösser als G H = A E, die Höhe aber des Dreyeckes, welches dem Vielecke C a b d e gleich ist, C f, der Höhe I G = C A gleich ist. Man kan aber durch die Vermehrung der Seiten des Umkreisses a b d e denselben dem Cirkelbogen A E immer näher und näher bringen, und dadurch auch das Vieleck C a b d e dem Dreyecke I G H nach Belieben immer mehr und mehr nähern; doch niemals kan das Vieleck kleiner werden als das Dreyeck I G H, weil weder die Höhe desselben C f kleiner werden kan als I G, denn diese C f bleibet beständig einerley, noch auch der Umkreis a b d e kleiner als der Bogen A E = G H. Ist aber dieses alles, so kan auch der Ausschnitt C A E nicht grösser seyn als das Dreyeck I G H. Denn wäre der Ausschnitt grösser als I G H, und etwa so groß als I M N, so könte man eine vieleckigte Figur, dergleichen C a b d e ist, machen, die kleiner wäre als der Ausschnitt. Denn weil man eine solche Figur machen kan, deren Grösse dem Dreyecke I G H so nahe kommet, als man wil, so kan man auch eine machen, deren Grösse von der Grösse des Dreyecks I G H weniger verschieden ist, als die Grösse des Dreyeckes I M N. In diesem Falle aber ist das Vieleck C a b d e kleiner als der Ausschnitt A C E, weil man setzet daß dieser Ausschnitt dem Dreyecke I M N gleich sey. Es ist demnach der Ausschnitt C A E auch nicht grösser als das Dreyeck I G H.

IX. Abschnitt.

§. 36. Und da also der Ausschnitt eines Cirkels C A E weder grösser noch kleiner ist als das Dreyeck I G H, dessen Grundlinie G H dem Bogen des Ausschnittes A E, und dessen Höhe I G dem Halbmesser desselben C A gleich ist, so muß nothwendig der Ausschnitt C A E dem Dreyecke I G H gleich seyn. Also ist der vierte Theil eines Cirkels einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie dem Quadranten, und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist, und eben diese Höhe muß man behalten, wenn man ein Dreyeck machen wil, welches einem halben oder einem ganzen Cirkel gleich ist; nur muß zu dem halben Cirkel die Grundlinie des Dreyeckes dem halben Umkreise gleich genommen werden, und wenn das Dreyeck einem ganzen Cirkel gleich seyn sol, so muß man zu seiner Grundlinie eine Länge annehmen, welche dem ganzen Umkreise des Cirkels gleich sey.

IX. Abschnitt.

Allgemeine Gründe, die Dreyecke und Parallelogrammen mit einander zu vergleichen.

§. 37. So weit konte uns unser Grundsatz führen. Es sind aber wie wir schon einiger massen erwehnet haben, die bisher angegebene Sätze noch nicht hinlänglich von der Gleichheit aller Figuren ein Urtheil zu fällen. Sie langen nicht einmal bey den einfachesten, nemlich den Dreyecken, oder den rechtwinklichten Vierecken überall zu, noch vielweniger sind wir im Stande vermittelst derselben die Verhältniß, welche zwo ungleiche Figuren gegen einander haben, anzuzeigen. Denn es folget nicht, zwey Dreyecke oder zwey Parallelogrammen haben ungleiche Grundlinien, und ungleiche Höhen, also sind sie ungleich. Es kan seyn, daß der einen Figur so viel an der Länge abgehet, als sie im Gegentheile breiter ist als die andere, und können also die Figuren, bey verschiedenen Längen und Breiten, doch gleich seyn. Wir müssen untersuchen, unter was vor Umständen diese Gleichheit der Dreyecke und der Parallelogrammen bey verschiedenen Grundlinien und Höhen statt habe, aber wir werden dieselbe nicht einsehen können, wenn wir nicht erst überhaupt ihre Verhältnisse gegen einander betrachten. So bald dieses ausgemachet seyn wird, werden wir im Stande seyn von der Vergleichung der Grösse aller ebenen Flächen etwas allgemeines anzugeben. Wir fangen natürlicher Weise von solchen Dreyecken und Parallelogrammen an, welche gleiche Höhen haben, von was vor Grösse auch übrigens ihre Winkel seyn mögen.

F. 220. §. 38. Es seyn ABC und abc zwey Dreyecke von gleicher Höhe. Man theile die Grundlinie BC des einen in eine beliebige Zahl gleicher Theile, wie wir öfters gethan, wenn wir die Verhältnisse der Grössen untersucheten, und ziehe von allen Theilungspuncten gerade Linien nach der Spitze des Dreyeckes A. Dadurch wird das Dreyeck ABC in Theile getheilet, welche einander alle gleich sind. IX, 14. Denn es haben die kleinen Dreyecke, in welche dasselbe zerfället worden ist, alle gleiche Grundlinien und gleiche Höhen, oder sie stehen alle auf gleichen Grundlinien zwischen den Parallellinien Bc und Aa : Nunmehro lege man bc aus B in D, und ziehe DA, so wird auch das Dreyeck ABD dem Dreyecke abc gleich seyn, weil diese Dreyecke ebenfals so wohl gleiche Höhen als gleiche Grundlinien haben. Man siehet aber auch leicht, daß eben dadurch das äusserste Punct D der Grundlinie BD zwischen diejenige Theilungspuncte der Linie BC fället, welche

von

von dem Anfange derselben B um so viele gleiche Theilchen entfernet sind, als viele gleiche Theile des Dreyeckes ABC zwischen der ersten Linie AB und denjenigen liegen, zwischen welche AD fället: und es ist nicht nöthig zu erinnern, daß dieses bey einer jeden Theilung der BC folgen müsse, weil ein blosser Blick in die Figur, uns davon zu überzeugen, genugsam ist. Dieses aber ist das Kennzeichen, daß sich das Dreyeck ABD zu dem Dreyecke ABC verhalte, wie sich die Grundlinie des ersteren BD zu der Grundlinie des zweyten BC verhält. VI. 60. Ist aber ABD : ABC = BD : BC, so ist auch abc : ABC = bc : BC. Denn diese Proportion folget aus jener, wenn man an die Stelle der ABD und BD, die Grössen abc, bc setzet, welche ihnen gleich sind. Es verhalten sich demnach zwey Dreyecke abc, ABC, welche gleiche Höhen haben, gegen einander, wie ihre Grundlinien bc, BC.

IX. Abschnitt.

§. 39. Wil man bey diesem Beweise bis auf die ersten Begriffe zurücke gehen, und zum Grunde legen, daß die Verhältnisse solcher Grössen gleich seyn, welche durch einerley gleichförmiges Wachsthum zugleich entstehen, so wird man mit dem Beweise fast noch eher fertig. Denn man stelle sich vor, daß die Linie BC nach und nach angewachsen, und daß jederzeit durch die äussersten Puncte derselben, und durch A gerade Linien gezogen sind: so ist klar, daß indem eines der gleichen Theilchen, die man sich in BC vorstellet, anwächset, so groß oder so klein man auch diese Theilchen annehmen wil, auch eines der gleichen Theilchen des Dreyeckes ABC erzeuget werde. Und daß also, wenn BC gleichförmig anwächset, auch das Dreyeck ABC durch ein gleichförmiges Wachsthum entstehe, über dieses aber BD und das Dreyeck ABD, wie auch BC und das Dreyeck ABC zugleich erzeuget werde. Also verhält sich nach diesen Begriffen allerdings BD zur BC, wie sich ABD zum ABC verhält, und die Proportion ABD : ABC = BD : BC ist richtig. VI, 67.

§. 40. Man wird nach einem gar kleinen Nachdenken finden, daß dasjenige so wir von den Dreyecken gewiesen, auch von den Parallelogrammen richtig sey, und daß auch dieser Figuren ihre Grössen, oder die Flächen welche von ihren Umkreisen beschlossen werden, sich gegen einander so, wie ihre Grundlinien, verhalten, wenn die Parallelogrammen gleiche Höhen haben: ihre Winkel mögen im übrigen beschaffen seyn wie sie wollen. Der Beweiß ist vollkommen wie derjenige, welchen wir eben bey den Dreyecken angewandt, und man darf nur die Augen auf die 221 Figur werfen, um ihn einzusehen. Es sind in der-

F. 221.

IX. Abschnitt. selben ABC, und abc Parallelogramme von gleichen Höhen, BC ist, wie vorher die Grundlinie des Dreyeckes ABC, in gleiche Theile getheilet, und durch die der Seite AB parallel laufende Linien, welche durch diese Theilungspuncte gezogen sind, ist auch das Viereck ABC in gleiche Vierecke zerfället, deren an der Zahl so viele sind, als viele gleiche Theilchen man der BC gegeben; BD ist der bc gleich, und folgends auch das Viereck ABD dem Vierecke abc. Aus diesen Gründen haben wir geschlossen, daß das Dreyeck ABD oder abc sich zu dem Dreyecke ABC verhalte, wie BD oder bc zur BC. Man wird also hier eben das schliessen müssen, wenn diese Buchstaben die Vierecke der 221 Figur bedeuten, und die Proportion abc : ABC = bc : BC wird auch hier richtig seyn.

§. 41. Sind die Dreyecke oder die Parallelogramme geradewinklicht, so kan man diejenigen Seiten ihre Grundlinien nennen, welche man vorher als ihre Höhen angesehen, wodurch dann diejenigen Seiten, welche vorhero die Grundlinien waren, nunmehro ihre Höhen werden. Eine Figur kan dieses deutlicher machen. Wenn ABC ein geradewinklichtes Dreyeck oder Viereck ist, und man siehet BC als seine Grundlinie an, so ist AB seine Höhe, denn diese Linie ist hier die Entfernung der Linie, welche durch die Spitze A mit der Grundlinie BC parallel kan gezogen werden, von dieser Grundlinie. Nimmet man aber AB vor die Grundlinien an, so werden so dann BC die Höhen dieser Figuren. Man kan also bey diesen Figuren die Wörter, Grundlinien und Höhen nach Belieben verwechseln, und man kan also auch, wenn von geradewinklichten Dreyecken oder Vierecken die Rede ist, sagen, daß wenn dieselben gleiche Grundlinien haben, sie sich gegen einander verhalten werden, wie sich ihre Höhen gegen einander verhalten. Dieses ist eben das vorige mit andern Worten gesaget. F. 222.

§. 42. Denket man aber dieser Sache nur noch etwas nach, so wird man finden, daß eben dieses von allen Dreyecken, wie auch von allen Parallelogrammen könne gesaget werden, daß nemlich sie sich wie ihre Höhen verhalten, wenn ihre Grundlinien gleich sind, ihre Winkel mögen so groß oder so klein seyn, als sie wollen. Man siehet dieses auf nachfolgende Art ein. Die Dreyecke ABC, abc haben einerley Grundlinien BC = bc, aber verschiedene Höhen. Man setze auf die Grundlinie EF = BC das geradewinklichte Dreyeck DEF, so dem Dreyecke ABC gleich ist, welches geschiehet, wenn man ihm eben die Höhe giebet, welche ABC hat. Und eben so setze man auf die Grundlinie F. 223.

linie ef=bc das geradewinklichte Dreyeck def= abc, welches wieder erhalten wird, wenn man auch die Höhe dieses Dreyecks de so groß machet, als die Höhe des Dreyecks abc ist. Da nun also die Dreyecke ABC, DEF, wie auch abc, def einander gleich sind, so siehet man leicht, daß die Verhältniß ABC: abc der Verhältniß DEF: def gleich sey, denn es sind so gar die Glieder beyder Verhältnisse von einerley Grösse. Nun ist aber die letztere Verhältniß DEF: def der Verhältniß DE: de gleich, wie eben gewiesen worden ist; weil nemlich die geradewinklichten Dreyecke DEF, def gleiche Grundlinien EF, ef haben, und sich also wie ihre Höhen DE: de verhalten. Da nun auch ABC: abc= DEF: def, so muß auch die Verhältniß ABC: abc der Verhältniß DE: de gleich seyn, und man hat ABC: abc= DE: de. Da nun aber DE die Höhe des Dreyecks ABC, und de die Höhe des Dreyeckes abc ist, so siehet man nunmehro dasjenige so wir erweisen solten, daß alle Dreyecke von gleichen Grundlinien sich wie ihre Höhen verhalten.

IX. Abschnitt.

§. 43. Nichts ist leichter, als eben dieses von den Parallelogrammen zu zeigen. Man darf nur den eben gegebenen Beweiß wiederholen, doch so, daß man jederzeit vor ein Dreyeck ein Parallelogrammum nenne, und derselben im übrigen auf die 224 Figur anwenden, so kan nicht der geringste Zweifel daran übrig bleiben, daß auch jede Parallelogrammen von gleichen Grundlinien sich gegen einander wie ihre Höhen verhalten.

F. 224.

§. 44. Und hieraus siehet man auch, daß ein jedes Dreyeck einem Parallelogrammum gleich sey, welches auf eben der Grundlinie stehet, auf welche das Dreyeck gesetzet worden, und dessen Höhe halb so groß ist, als die Höhe des Dreyeckes. Es sey ABC ein Dreyeck, und DEF ein Parallelogrammum, welche auf gleichen Grundlinien BC= EF zwischen zwo Parallellinien stehen: so ist das Dreyeck die Helfte des Parallelogrammum DEF. Denn man setze auf EF ein anderes Parallelogrammum GEF, dessen Höhe die Helfte ist der Höhe des DEF, und folgends die Helfte der Höhe des Dreyeckes ABC, so ist dieses Parallelogrammum GEF ebenfals die Helfte von DEF, denn die Grundlinien der Parallelogrammen DEF, GEF sind einander gleich, folgends verhalten sich die Parallelogrammen wie ihre Höhen; oder man siehet vielmehr gleich, aus der Figur, daß GEF= $\frac{1}{2}$ DEF, und da folgends so wohl ABC als GEF der Helfte von

F. 225.

DEF gleich sind, so ist auch ABC dem Parallelogrammum GEF gleich, und so ist es mit allen Dreyecken.

§. 45. Diese Sätze nun vermittelst welcher wir die Dreyecke und Parallogrammen von gleichen Höhen oder von gleichen Grundlinien mit einander verglichen, geben uns an die Hand, wie jede Dreyecke und Parallelogrammen ihre Grundlinien und Höhen mögen so groß seyn als sie wollen, mit einander verglichen werden können. Es geschiehet dieses ohne viele Weitläuftigkeit. Man darf nur die Verhältniß ihrer Grundlinien untersuchen, wie auch die Verhältniß ihrer Höhen, und diese Verhältnisse zusammen setzen, so ist die Verhältniß, welche durch diese Zusammensetzung kommet, die Verhältniß der Dreyecke oder der Parallelogrammen. Der Beweiß wird zugleich den Verstand dieser Sache etwas deutlicher machen.

F. 226. §. 46. Wir sollen das Dreyeck ABC mit dem Dreyecke abc vergleichen, und sagen, wie sich jenes zu diesem verhalte, auf eine Art, welche sich anwenden lässet, alle Dreyecke mit einander zu vergleichen, und eine eben dergleichen Vergleichung sollen wir auch mit den Vierecken ABC, abc, deren entgegen gesetzete Seiten einander parallel sind, anstellen. F. 227. Es haben die beiden Dreyecke ABC, abc verschiedene Grundlinien BC und bc, sonst wäre die Vergleichung derselben leicht, denn sie würden sich wie ihre Höhen verhalten, aber auch selbst diese Höhen sind verschieden. Eben so ist es auch mit den Vierecken. Um aber bey dem allen die Vergleichung der Dreyecke ABC, abc zu verrichten, so stelle man sich ein anderes Dreyeck DEF vor, dessen Grundlinie DEF der Grundlinie bc des Dreyeckes abc gleich ist, und welches mit dem Dreyecke ABC einerley Höhe hat. Man kan gar leicht das Dreyeck ABC mit diesem Dreyecke DEF vergleichen, vermittelst des Satzes, dessen wir eben erwehnet: nemlich, es verhält sich das Dreyeck ABC zu dem Dreyecke DEF, wie die Grundlinie des ersteren BC zu der Grundlinie des zweyten EF, oder bc = EF. Wiederum lässet sich das Dreyeck DEF mit dem Dreyecke abc vergleichen. Denn weil die Grundlinien dieser Dreyecke gleich sind, so verhält sich das Dreyeck DEF zu dem Dreyecke abc, wie sich die Höhe des ersteren AG zu der Höhe des zweyten ag verhält. Und da wir also ABC mit DEF, und DEF wieder mit abc vergleichen können, so kan die Vergleichung des Dreyeckes ABC mit dem Dreyecke abc selbst keine Schwierigkeit haben. Denn wenn wir die zwo Proportionen, die wir eben heraus gebracht haben: ABC

ABC : DEF = BC : bc
DEF : abc = AG : ag nur einiger massen betrachten, so sehen wir VIII, 8. so gleich, daß die Verhältniß des Dreyeckes ABC zu dem Dreyecke abc aus der Verhältniß der Grundlinien BC : bc, und aus der Verhältniß der Höhen AG : ag dieser Dreyecke zusammen gesetzet sey.

§. 47. Bey den Parallelogrammen ist eben das richtig, was von den Dreyecken richtig ist. Wenn wir nunmehro die 227 Figur vor uns nehmen, um den Beweiß, welchen wir von den Dreyecken gegeben, auf die in derselben gezeichnete Vierecke anzuwenden; zu welchem Ende diese eben so bezeichnet sind, wie jene: so hat man ebenfals, weil die Parallelogrammen ABC, DEF, einerley Höhe AG, und die Parallelogrammen DEF, abc, einerley Grundlinie bc = EF, haben, und weil ag, die Höhe des Vierecks abc ist; so hat man, sage ich, hier ebenfals, F. 227.

ABC : DEF = BC : bc, und
DEF : abc = AG : ag, und wenn man diese Verhältnisse zusammen setzet, so werden auch hier die Verhältnisse, welche durch die Zusammensetzung entstehen, einander gleich. Nun aber kommet durch die Zusammensetzung der ersteren zwo Verhältnisse die Verhältniß der Parallelogrammen ABC : abc, und in den zwo letzteren werden die Verhältnisse der Grundlinien dieser Parallelogrammen BC : bc, und der Höhen AG : ag zusammen gesetzet, daß also auch die Verhältniß der Parallelogrammen ABC : abc der Verhältniß BC×AG : bc×ag gleich ist, welche durch die Zusammensetzung der Verhältnisse der Grundlinien und der Höhen heraus gebracht wird.

§. 48. Wir befürchten nicht, daß diejenigen, welche recht eingesehen, was von der Zusammensetzung der Verhältnisse gelehret worden bey dem Nutzen oder der Anwendung dieses Satzes Schwierigkeit finden werden. Doch kan es nicht schaden, wenn wir die Sache zum Uberfluß erläutern, zumalen da hier die Zusammensetzung der Verhältnisse zu erst gebraucht wird; und der gegenwärtige Satz dieselbe in ein noch grössers Licht zu setzen vermögend ist. Es sey so wohl die Verhältniß der Grundlinien als auch die Verhältniß der Höhen der Dreyecke oder Parallelogramme ABC, abc, welche man vergleichen sol, durch Zahlen ausgedrücket, und es sey: F. 226. 227.

ABC : DEF = BC : bc = 5 : 3, und
DEF : abc = AG ; ag = 4 ; 2, so wird

ABC

IX. Abschnitt. ABC: abc = BC×AG: bc×ag = 5×4: 2×3 = 20: 6, und wie sich 20 zu 6 verhält, so verhält sich auch das Dreyeck oder Parallelogrammum ABC zu dem Dreyecke oder Parallelogrammum abc. Denn die Glieder der Verhältniß, welche aus den zwoen BC: bc und AG: ag zusammen gesetzet ist, sind in diesem Falle, da die Verhältnisse durch Zahlen ausgedrücket sind, allezeit die Producte der ersten und der letzten Glieder dieser Verhältnisse VIII, 24.

§. 49. Und so ist es überall bey diesen Figuren. Nachdem man so wohl die Grundlinien derselben durch Zahlen ausgedrücket hat, als auch ihre Höhen, so multipliciret man die Zahlen, welche die Grundlinien ausdrücken, durch die Zahlen, welche die Höhen anzeigen. Die Verhältniß der Producte ist eben die Verhältniß, welche die Dreyecke oder die Parallelogramme, welche man vergleichen sollen, gegen einander haben. Dieses auch dem Gesichte vorzustellen sind in der 228 Figur zwey Parallelogramme gezeichnet worden, deren Grundlinien sich so wie IX, 48. angenommen worden, gegen einander verhalten: da man denn leicht siehet, daß auch ABC sich gegen abc verhalte, wie 20: 6, welche eben die Zahlen sind, welche heraus gebracht worden, indem wir die Verhältnisse 5: 3 und 4: 2 zusammen gesetzet. Wir haben nicht nöthig erachtet, auch dergestalt getheilte Dreyecke zu zeichnen, weil man alle Dreyecke gar leicht in Parallelogrammen verwandeln kan, da denn klar ist, daß von der Grösse der Dreyecke dasjenige richtig seyn müsse, was von der Grösse der Parallelogrammen erwiesen worden. *F. 228.*

§. 50. Soll man aber zwo gerade Linien schaffen, deren erstere sich zu der zwoten verhält, wie ABC zu abc, es mögen nun diese Buchstaben die Dreyecke der 226, oder die Vierecke der 227 Figur bedeuten; so giebet uns eben der Satz, und dasjenige, so wir von der Zusammensetzung der Verhältnisse bereits wissen, dazu die Anleitung. Nachdem die erste dieser Linien, die wir uns unter P vorstellen können, ob sie zwar nicht gezeichnet ist, nach Belieben angenommen worden, so mache man VI, 13. BC: bc = P: X: und nachdem man diese Linie X gefunden, mache man nochmals AG: ag = X: Q, so ist die Verhältniß der P zu Q aus den zwo Verhältnissen BC: bc, und AG: ag zusammen gesetzet, und demnach der Verhältniß der Figur ABC zu der Figur abc gleich. Da man das erste Glied P der zusammen gesetzten *F. 226. 227.*

Verhältniß, nach Belieben annehmen darf, so kan man P allezeit so groß annehmen als BC ist; geschiehet dieses, so wird in der Proportion BC: bc = P: X, die letzte X so groß als bc, und man hat also, um die Q zu erhalten, nur zu machen AG: ag = bc: Q. Demnach ist $ABC: abc = P: Q = BC: \frac{ag \times bc}{AG}$.

IX. Abschnitt.

§. 51. Oder man nehme eine gerade Linie V, nach Belieben an, und suche zur V, zur BC und zur AG die dritte Proportionallinie P: und ferner suche man auch zu eben der V, zur bc und zur ag die dritte Proportionallinie Q, so verhält sich VIII, 55. wieder die erste dieser Linien $\frac{BC \times AG}{V}$ zu der zwoten $\frac{bc \times ag}{V}$, das ist P: Q, wie die Figur ABC zu der Figur abc. Man kan sich auch hier die Arbeit erleichtern, wenn man V so groß annimmet als BC. Denn dadurch wird $P = \frac{BC \times AG}{V}$, so groß als AG. Und die zwote Linie $Q = \frac{bc \times ag}{V}$ wird in diesem Falle $\frac{bc \times ag}{BC}$, und man kan also sagen, es verhalte sich auch ABC zu abc, wie AG zur $\frac{bc \times ag}{BC}$.

§. 52. Man siehet aber auch aus den Figuren und Beweisen, die wir bisher von der Gleichheit der Parallelogrammen und Dreyecke gegeben, daß es sehr ohnnöthig sey, in den Beweisen so wohl als in den Figuren, andere als geradewinklichte Vierecke zu nennen und vorzustellen: und daß an die Stelle der Grundlinie, und der Höhe der Parallelogrammen, man nur die Seiten eines geradewinklichten Vierecks nennen dürfe. Denn es ist nichts leichter als dasjenige, was von geradewinklichten Vierecken gezeiget wird, auf die übrigen Parallelogramme anzuwenden, welche mit dem geradewinklichten Vierecke auf einer Grundlinie, und zwischen eben den Parallelen stehen können, oder welche mit dem geradewinklichten Vierecke gleiche Grundlinien und Höhen haben. Und man muß ohne dem, wenn schiefwinklichte Parallelogramme, nach den Sätzen, welche wir bishero erkläret haben, mit einander zu vergleichen sind, dieselbe in geradewinklichte verwandeln. Denn was thut man anders, indem man die Höhe AG ziehet, als

F. 227.

IX. Abschnitt.

als daß man die eine Seite des geradelinichten Viereckes findet, welches dem schiefwinklichten ABC gleich ist, dessen andere Seite BC bereits gegeben worden. Hat man aber die zwo Seiten eines geradelinichten Viereckes, so hat man das Viereck selbst, weil diese Vierecke sich allezeit aus zwo gegebenen Seiten beschreiben lassen, IV, 205. Man siehet aber leicht, daß wir von solchen Seiten dieser Vierecke reden, welche einander nicht entgegen gesetzet sind, sondern einen Winkel mit einander einschliessen; mit einem Worte, von der Länge eines solchen Viereckes und von seiner Breite. Aus eben dem Grunde werden wir auch, bey der Vergleichung der Dreyecke, künftig hin meistens bloß geradewinklichte Dreyecke nennen, weil die übrigen doch erst in geradewinklichte Dreyecke müssen verwandelt werden, ehe man sie mit anderen Dreyecken, oder mit Parallelogrammen vergleichen will. Die Seiten eines solchen Dreyeckes sind diejenigen, welche den geraden Winkel einschliessen.

F. 229. §. 53. Will man nun ein geradewinklichtes Dreyeck abc mit einem geradewinklichten Vierecke ABC vergleichen; so hat man nur zu bedenken, daß das Dreyeck abc dem Vierecke dbc gleich sey, dessen Seite bd halb so groß ist, als die Seite ab des Dreyeckes, IX, 44. Nun ist die Verhältniß des Viereckes ABC zu dem Vierecke dbc aus den Verhältnissen AB : db und BC : bc zusammen gesetzet; also entstehet auch die Verhältniß des Viereckes ABC zu dem Dreyecke abc, durch die Zusammensetzung eben dieser Verhältnisse. Oder wenn man in der erstern derselben AB : db an statt db setzet $\frac{1}{2}$ ab, weil wir wissen, daß db = $\frac{1}{2}$ ab, so wird dieselbe Verhältniß AB : $\frac{1}{2}$ ab, und man siehet, daß die Verhältniß ABC : abc aus den zwo Verhältnissen AB : $\frac{1}{2}$ ab, und BC : bc zusammen gesetzet werde. Es wird demnach die Verhältniß des geradewinklichten Viereckes ABC zu dem geradewinklichten Dreyecke abc aus der Verhältniß einer Seite des Viereckes zu der Helfte einer Seite des Dreyeckes AB : $\frac{1}{2}$ ab, und aus der Verhältniß der andern Seite des Viereckes BC zur andern Seite des Dreyeckes bc zusammen gesetzet.

§. 54. Nun nenne man an die Stelle der einen Seite des Viereckes und des Dreyeckes die Grundlinie dieser Figur, und der anderen gebe man den Namen der Höhe, so wird der Satz allgemein, und läßet sich auch von schiefwinklichten Parallelogrammen und Dreyecken verstehen, indem er anzeiget, daß die Verhältniß eines jeden Paralle-

lo-

logrammum zu einem Dreyecke aus der Verhältniß der Höhe der ersten Figur zur halben Höhe der zwoten, und aus der Verhältniß der Grundlinie der ersten Figur zur Grundlinie der zwoten: oder aber aus der Verhältniß der Höhe der ersten Figur zur Höhe der zwoten, und aus der Verhältniß der Grundlinie der ersten zu der Helfte der Grundlinie der zwoten, zusammen gesetzet sey.

IX. Abschnitt.

§. 55. Dieses ist die allgemeine Art, Parallelogramme mit Parallelogrammen, Dreyecke mit andern Dreyecken, und Parallelogrammen mit Dreyecken, zu vergleichen. Nimmet man aber in diesen Figuren die Seiten bald von dieser bald von jener Verhältniß an, so bekommet man besondere Sätze, welche eben so nützlich sind als die allgemeinen, und die mit diesen einerley Zweck haben. Wir können uns nun zu dieser besondern Betrachtung dieser Figuren wenden.

§. 56. Wir setzen zuerst, daß bey zwey Parallelogrammen die Grundlinien sich wie die Höhen verhalten, wenn man diese verkehrt setzet, oder daß sich in den Parallelogrammen ABC, abc, die Grundlinie BC zu der Grundlinie bc verhalte, wie die Höhe ab sich zu der Höhe AB verhält, und also nachstehende Proportion BC : bc = ab : AB richtig sey. Ist nun dieses, so sind die Glieder der Verhältniß, welche kommet, wenn man eine dieser gleichen Verhältnisse BC : bc, und ab : AB verkehrt stellet, und machet AB : ab, und sodann dieselbe Verhältniß mit der ersteren BC : bc zusammen setzet, einander gleich, BC × AB nemlich = bc × ab, VIII, 47. Weil nun aber die zusammengesetzete Verhältniß BC × AB : bc × ab der Verhältniß der Vierecke ABC : abc gleich ist, IX, 45., so müssen auch diese Vierecke selbst gleich seyn. Und man siehet leicht, daß eben dieses auch von den Dreyecken ABC und abc könne gesaget werden, und demnach sind so wohl die Parallelogrammen als auch die Dreyecke, deren Grundlinien sich wie die Höhen verkehrt gesetzet verhalten, einander gleich; oder wenn bey zwey Parallelogrammen oder Dreyecken ABC, abc diese Proportion BC : bc = ab : AB richtig ist, so ist auch richtig ABC = abc.

F. 230.

F. 231.

§. 57. Man kan ohne grosse Schwierigkeit einen dergleichen Satz auch von einem Dreyecke und rechtwinklichten Vierecke heraus bringen. Das rechtwinklichte Viereck ABC verhält sich zu dem Dreyecke abc, wie die Glieder der Verhältniß, welche aus diesen zwo Verhältnissen

F. 232.

AB: ab und BC: $\frac{1}{2}$ bc zusammen gesetzet wird, oder wie BC×AB: $\frac{1}{2}$ bc × ab, IX, 53. Verhält sich nun aber BC zur $\frac{1}{2}$ bc, wie ab zur AB, und ist die Proportion BC: $\frac{1}{2}$ bc = ab: AB richtig, so ist BC × AB = $\frac{1}{2}$ bc × ab, VIII, 47.; und demnach ist in diesem Falle allezeit das Viereck ABC dem Dreyecke abc gleich, und man kan also auf die Gleichheit eines Dreyeckes und eines Parallelogrammum allezeit schliessen, wenn entweder die Grundlinie eines Dreyeckes halb genommen, sich zu der Grundlinie des Viereckes verhält, wie die ganze Höhe des Viereckes zur ganzen Höhe des Dreyeckes. Oder wenn die halbe Höhe des Dreyeckes sich zur Höhe des Viereckes verhält, wie die Grundlinie des Viereckes zur Grundlinie des Dreyeckes.

§. 58. Es lassen sich auch alle diese Sätze umkehren, und man kan sagen erstlich, daß, wenn die Parallelogrammen ABC, abc gleich sind, die Grundlinien derselben BC, bc sich umgekehrt, wie die Höhen AB, ab verhalten, und die Proportion BC: bc = ab: AB richtig seyn müsse. Denn es ist allezeit ABC: abc = AB × BC: ab × bc, es mögen die Vierecke gleich oder ungleich seyn, IX, 45. Sind aber die Vierecke ABC, abc gleich, so können die zwey letzteren Glieder der Proportion AB × BC: ab × bc nicht ungleich seyn: und es ist also AB × BC = ab × bc, das ist, die Glieder der Verhältniß, welche aus den zwoen AB: ab und BC: bc zusammen gesetzet ist, sind einander gleich. Wir haben aber gesehen, daß wenn dieses ist, die Verhältniß, welche man zusammen gesetzet hat, allezeit gleich seyn, wenn man nur die Glieder der einen verwechselt, VIII, 48., dadurch aber wird AB: ab = bc: BC, oder BC: bc = ab: AB. Und auf eben diese Art schliesset man eben diese Proportion, wenn zweytens gesetzet wird, daß das Dreyeck ABC dem Dreyecke abc gleich sey. Ist aber drittens das Viereck ABC dem Dreyecke abc gleich, so ist AB × BC = $\frac{1}{2}$ ab × bc, woraus denn ebenfals diejenige Proportion, aus welcher wir die Gleichheit vorhero geschlossen, AB: $\frac{1}{2}$ ab = bc: BC, nach eben den Gründen folget. Und es können also zwey Parallelogramme, oder zwey Dreyecke, oder ein Parallelogrammum und ein Dreyeck, ohnmöglich gleich seyn, wenn nicht diejenige Proportion statt hat, aus welcher wir ihre Gleichheit geschlossen haben.

§. 59. Der Satz, bey welchem wir uns aufhalten, ist auch durch den sich selbst gelassenen Verstand einzusehen. Daß die Verhältnisse zweyer Parallelogrammen aus der Verhältniß ihrer Grundlinien und,

aus

aus der Verhältniß ihrer Höhen zusammen gesetzet sey, heisset in der gewöhnlichen Sprache nichts anders, als daß man bey der Vergleichung solcher Vierecke so wohl auf die Länge derselben, als auch auf ihre Breite zu sehen habe, und daß die Vierecke grösser werden, nachdem entweder ihre Länge, oder nachdem ihre Breite zunimmet. Wem ist dieses unbekannt? nur setzet man gemeiniglich dergleichen Begriffe nicht recht aus einander. Ist aber ein solches Viereck A B C zwar breiter als ein anderes a b c, und dieses ist hingegen nach Proportion länger als jenes, so siehet man leicht, daß dem einen an der Länge dasjenige zuwächset, was ihm an der Breite abgehet, und daß dadurch die Vierecke wieder gleich werden. Was von den Dreyecken gesaget worden ist, könte man hieraus herleiten, wenn es nöthig wäre. Wir wenden uns aber vielmehr zu einigen leichten Aufgaben, welche hierbey vorkommen.

IX. Abschnitt.

§. 60. Gesetzet, es sey uns das rechtwinklichte Viereck ABC gegeben, und die Grundlinie eines andern b c, welches zu verfertigen ist, und welches dem gegebenen A B C gleich seyn soll: so hat man zu bedenken, daß nunmehro weiter nichts als die Höhe dieses zweyten Parallelogrammum erfordert werde, dasselbe zu verfertigen, und daß demnach bloß diese zu suchen sey. Denn so bald als die Grundlinie und Höhe eines Parallelogrammum bekannt sind, so ist auch die Grösse desselben bekannt. Diese Höhe aber ist leicht zu finden. Man stelle sich vor, daß man bereits auf die gegebene Grundlinie b c das Parallelogrammum a b c gesetzet habe, welches dem gegebenen A B C gleich ist, und daß die Höhe dieses Parallelogrammum a b sey, so ist b c: B C = A B: a b, IX, 58, und demnach ist a b die vierte Proportional-Grösse zu b c, B C und A B, und diese drey Grössen sind bekannt: also ist auch a b in unserer Gewalt; denn man kan aus den drey vordern Gliedern einer Proportion das vierte allezeit finden. Vollkommen auf eben die Art verfähret man, wenn das Dreyeck A B C gegeben ist, und b c, und man soll auf b c das Dreyeck a b c setzen, so dem Dreyecke A B C gleich ist. Und man siehet auch leicht, wie zu verfahren sey, wenn man auf b c ein Dreyeck setzen soll, so dem Vierecke A B C gleich ist, oder auf B C ein Viereck, welches so groß ist als das Dreyeck a b c.

F. 230. *F. 231.* *F. 232.*

Vergleichung eines Quadrats mit einem anderen geradewinklichten Vierecke.

§. 61. Ist das Viereck A B C, welches einem andern Vierecke, oder

F. 233. 234.

IX. Abschnitt.

oder einem Dreyecke abc gleich ist, ein Quadrat, so bleibet das übrige alles, so gewiesen worden, und es ist auch hier bc : BC = AB : ab, wenn das Quadrat dem Vierecke abc gleich ist, und bc : BC = AB : $\frac{1}{2}$ ab, wenn das Quadrat so groß ist als das Dreyeck abc. Es kommt aber hier noch etwas neues hinzu, so vorhero nicht da gewesen. Die Seiten des Quadrats ABC sind einander gleich AB = BC, und man kan AB vor BC setzen. Demnach ist die Seite des Quadrats ABC, welches dem geradewinklichten Vierecke abc gleich ist, die mittlere Proportionallinie zwischen den Seiten ab, bc dieses Viereckes, und die Seite des Quadrats, welches dem Dreyecke abc gleich ist, ist die mittlere Proportionallinie zwischen einer Seite derselben bc, und der Helfte der andern ab.

§. 62. Und wenn AB die mittlere Proportionallinie ist, zwischen den Seiten des Viereckes abc, so ist das Quadrat ABC dem Vierecke abc gleich. Denn wenn dieses ist, und man hat bc : BC = BC : ab, so hat man auch bc : BC = AB : ab, das ist, die Grundlinien der beyden geradewinklichten Vierecke ABC, abc verhalten sich wie ihre Höhen verkehrt gesetzet, welches das untrügliche Kennzeichen ist, aus welchem wir ihre Gleichheit schliessen können. Ist in der 234 Figur bc : BC = BC : $\frac{1}{2}$ ab, so kan man auf eben die Art schliessen, daß das Dreyeck abc dem Quadrate ABC gleich sey.

§. 63. Und da also VII, 73. 80. gelehret worden, wie zwischen zwo gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden sey, so ist nunmehro bey der Aufgabe, welche erforderet, daß wir ein Quadrat machen sollen, so einem gegebenen rechtwinklichten Vierecke gleich sey, keine Schwierigkeit übrig. Die Auflösung derselben erfordert nichts, als daß man die mittlere Proportionallinie zwischen den zwo Seiten des Viereckes finde; welche die Seite des verlangeten Quadrats seyn wird. Es sey das rechtwinklichte Viereck ABC gegeben. Man verlängere eine Seite desselben AB in D, so lange bis BD der andern Seite BC gleich wird. Man beschreibe so dann auf die ganze AD einen halben Cirkelkreis AED, und verlängere CB bis an diesen Umkreis AED in E, so ist BE die gesuchte Seite des Quadrats, welches dem Vierecke ABC gleich ist. Denn weil der Winkel des Viereckes ABC gerade ist, so ist BE auf den Durchmesser des halben Cirkels AD perpendicular, und folgends AB : BE = BE : BD. VII, 73. Da nun BD der BC gleich genommen worden, so ist auch AB : BE = BE : BC. Und wenn demnach BE vor die Seite eines

F. 235.

Qua-

Quadrates angenommen wird, so ist dieses Quadrat dem Vierecke ABC gleich, weil die Seite des Quadrats die mittlere Proportionallinie ist zwischen den Seiten des Viereckes.

§. 64. Wil man sich der andern Anweisung bedienen, welche wir gegeben zwischen zwo geraden Linien eine mittlere Proportionallinie zu finden, um die Seite eines Quadrates zu finden, welches dem geradewinklichten Vierecke ABC gleich sey; so verfähret man folgender gestalt. Nachdem die Seite AB des Viereckes, nach Erforderung der Umstände verlängert worden ist, mache man AD so groß, als die andere Seite des Viereckes BC ist. Man beschreibe auf diese AD einen halben Cirkelkreis AED, man verlängere CB bis sie denselben in E erreichet, so kan man AE ziehen, und dieses ist die gesuchete Seite, deren Quadrat so groß ist als das geradewinklichte Viereck ABC. Denn allerdings ist AE die mittlere Proportionallinie zwischen AB und AD; VII, 80. also ist sie auch die mittlere Proportionallinie zwischen eben der AB und der BC, welche der AD gleich ist.

F. 236.

§. 65. Diese Zusammensetzung ist weitläuftiger als die vorige: sie ersetzet aber diesen kleinen Umschweif durch die herrlichen Sätze, welche deren Betrachtung an die Hand giebet. Das Quadrat der geraden Linie AE ist dem geradewinklichten Vierecke ABC gleich. Ziehet man auch ED, so ist kein Zweifel, daß eben dieses auch auf dieser Seite richtig sey, und daß das Quadrat der Seite ED ebenfals dem geradewinklichten Vierecke aus der DB, und der DA = BC, gleich seyn werde. Dieses Viereck erhält man, wenn man DG der BC parallel ziehet, und FC verlängert, bis sie die DG in G schneidet. Dadurch wird DG = BC = DA, da nun also AEq = AC, und EDq = CD, so ist AEq + EDq = AC + CD, das ist, die beyden Quadrate, deren Seiten AE, ED sind, sind zusammen der Summe der Vierecke AC und CD gleich. Diese beyden Vierecke aber machen mit einander das Viereck AG, welches, wie leicht einzusehen, ebenfals ein Quadrat ist, die beyden Quadrate der Seiten AE und ED also, sind zusammen dem einzigen Quadrate AG der Seite AD gleich.

F. 237.

§. 66. Das Dreyeck AED ist geradelinicht, und zwar ist der Winkel AED der gerade, weil er in dem halben Cirkel AED beschrieben ist. V, 68. Man kan aber bey einem jeden geradewinklichten Dreyecke dasjenige zeigen, wie wir hier erwiesen. Man kan allezeit aus der Spitze des rechten Winkels desselben AED auf die grösseste Sei-

IX. Abschnitt.

Seite ein Perpendicularlinie EB fallen lassen, und dieselbe verlängern bis BC so groß wird als AD. Ziehet man so dann durch C die FG der AD parallel, und AF, DG auf die AD perpendicular, so ist vermöge desjenigen, so eben gezeiget worden, das Quadrat der AE dem Vierecke AC, und das Quadrat der ED dem Vierecke BG gleich, und demnach sind in einem jeden geradewinklichten Dreyecke AED die beiden Quadrate der Seiten AE, ED, welche den rechten Winkel einschliessen, zusammen genommen dem einzigen Quadrate der grössesten Seite des Dreyeckes AD, welche allezeit dem rechten Winkel entgegen stehet, gleich. Denn daß die beyden Vierecke AC und CD ein Quadrat AG machen, ist bereits als etwas, so leicht einzusehen ist, angemerket worden.

§. 67. Wir werden künftig diesen Satz noch weiter betrachten, und ihn auf verschiedene Art anwenden. Gegenwärtig fahren wir in der Vergleichung derer Parallelogrammen und Dreyecke fort, und stellen uns nunmehro zwey dergleichen Vierecke, oder zwey Dreyecke vor, deren Grundlinien sich gegen einander, wie ihre Höhen verhalten. In der 238 Figur, sollen ABC, abc zwey dergleichen Vierecke seyn, und in der 239 Figur werden mit eben den Buchstaben zwey Dreyecke bezeichnet. Beyderseits wird gesetzet, daß die Verhältniß der Höhen AB : ab der Verhältniß der Grundlinien BC : bc gleich sey, oder daß AB : ab = BC : bc. Es wird durch diesen neuen Umstand dasjenige nicht aufgehoben, so überall richtig ist, daß nemlich die Verhältniß ABC : abc aus den beyden Verhältnissen AB : ab und BC : bc zusammen gesetzet werde: aber hier sind diese Verhältnisse, welche zusammen gesetzet werden sollen, einander gleich, und es wird demnach die Verhältniß ABC : abc aus zwo gleichen Verhältnissen zusammen gesetzet. Man kan demnach in dieser Zusammensetzung einer der gleichen Verhältnisse vor die andere setzen, und man kan sagen es sey die Verhältniß ABC : abc aus den Verhältnissen AB : ab und AB : ab zusammen gesetzet, oder auch, es bestehe die Verhältniß ABC : abc aus den zwo Verhältnissen BC : bc und BC : bc das ist, die Verhältniß der Figuren, welche wir vor uns haben, sey aus der Verhältniß ihrer Höhen AB : ab, oder aus der Verhältniß ihrer Grundlinien BC : bc zwey mal genommen, zusammen gesetzet. VIII, 9.

F. 238. 239.

§. 68. Nur muß man sich in der Anwendung dieses Satzes in Acht nehmen, daß man sich darinnen nicht verstosse, daß man unrechte Linien der Figuren vor die Grundlinien oder vor die Höhen derselben annehme. Es ist zwar wahr, daß es sonst frey sey, diese oder je-

ne

ne Seite eines geradewinklichten Viereckes oder Dreyeckes vor die Grundlinie, und diejenige welche mit derselben den geraden Winkel einschliesset, vor die Höhe zu halten. Aber hier ist der allgemeine Satz auf solche Grundlinien eingeschränket, welche sich wie die Höhen verhalten, und man fehlet also, wenn man solche Grundlinien nimmet, welche sich nicht verhalten wie die Höhen, die zu den angenommenen Grundlinien gehören. Die Verhältniß ABC : abc ist zum Exempel nicht aus der Verhältniß AB : bc zwey mal genommen zusammen gesetzet, weil die Verhältniß AB : bc der Verhältniß BC : ba nicht gleich ist. Denn weil die Verhältniß AB : ab der Verhältniß BC : bc gleich gesetzet wird, so kan, wenn AB grösser oder kleiner ist, als BC, ohnmöglich die Verhältniß AB : bc der Verhältniß BC : ab gleich seyn, wie man leicht siehet. Man wird aber diesen Fehler allezeit vermeiden, wenn man entweder die Grössen der Seiten der Figuren ABC, abc beyderseits annimmet, oder die kleineren AB ist grösser als BC und ab grösser als bc. Also ist die Verhältniß welche man verdoppeln muß, damit man die Verhältniß der Figuren ABC : abc erhalte, die Verhältniß AB : ab, oder die Verhältniß BC : bc.

§. 69. Hat man aber zwey Quadrate mit einander zu vergleichen, so wird man von dieser Betrachtung niemals aufgehalten. Die Grundlinie ist hier nothwendig so groß als die Höhe, und man kan weder zur Grundlinie noch zur Höhe etwas anderes, als die Seite des Quadrates, annehmen. Und demnach ist die Verhältniß zweyer Quadrate allezeit aus der Verhältniß ihrer Seiten zwey mal genommen zusammen gesetzet. In dergleichen Figuren als diejenigen sind, welche wir eben betrachtet haben, IX, 67. verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate derjenigen Seiten der Figuren, welche einander in der Proportion entgegen stehen. Wir haben gesetzet, daß in der 238 und 239 Figur die Verhältniß AB : ab der Verhältniß BC : bc gleich sey. Man stelle sich zwey Quadrate vor, deren Seiten sind AB und ab, so ist die Verhältniß dieser Quadrate aus der Verhältniß AB : ab zwey mal genommen, zusammen gesetzet, und eben diese Verhältniß, welche aus AB : ab zwey mal genommen, zusammen gesetzet ist, ist auch die Verhältniß der Figuren ABC : abc. Demnach ist die Verhältniß der gedachten Quadrate die auf AB und ab gesetzet werden können, der Verhältniß der Figuren ABC : abc gleich. Eben dieses ist auch von den Quadraten richtig, welche man auf BC und bc setzen

IX. Abschnitt.

kan. Ihre Verhältniß ist ebenfals der Verhältniß der Figuren gleich, welche wir eben angezeiget haben.

§. 70. Damit auch dieses desto deutlicher eingesehen werde, so haben wir wieder in der 240 Figur, zwo Figuren gezeichnet, deren Grundlinien sich wie ihre Höhen verhalten; welche Verhältniß durch die Zahlen 5 : 3 ausgedrucket werden kan. Man siehet leicht daß die Verhältniß dieser Figuren ABC und abc aus der Verhältniß 5 : 3 zwey mal genommen, zusammen gesetzet werde. Denn diese Verhältniß ist 25 : 9. Man kan wenn man wil sich das übrige alles durch dergleichen Zeichnungen selbst erläutern, und damit kommet man weiter, als wenn man bloß die bereits gezeichneten Figuren ansiehet.

F. 240.

§. 71. Es ist also aus demjenigen, so wir bereits VIII, 13. bey der Abhandlung der zusammen gesetzeten Verhältnisse gewiesen, nicht schwer, zwo gerade Linien zu schaffen, welche sich gegen einander verhalten wie zwey Quadrate. Es seyn die gegebenen Quadrate ABC, abc. Man mache AB : ab = ab : D, nach der Anweisung die dritte Proportionallinie zu zweyen gegebenen zu finden, welche VII, 13. da gewesen; so ist die Verhältniß AB : D aus der Verhältniß AB : ab zwey mal genommen zusammen gesetzet, VIII, 52. und demnach der Verhältniß des Quadrates ABC zu dem Quadrate abc gleich, als welches ebenfals aus der Verhältniß AB : ab zwey mal genommen, bestehet.

§. 72. Wiederum findet man aus der Verhältniß zweyer Quadrate, welche durch gerade Linien ausgedruckt ist, AB : D, die Verhältniß der Seiten der Quadrate, wenn man nur zwischen den zwo geraden Linien, welche die Verhältniß der Quadrate ausdrucken AB und D die mittlere Proportionallinie suchet. Ist diese ab, so ist AB : ab die Verhältniß der Seiten der Quadrate, deren ersteres sich zu dem zweyten verhält, wie AB : D, und wenn man zu AB und ab die Quadrate ABC, abc würklich beschreibet, so ist ABC : abc = AB : D. Dieses ist aus dem bisher gezeigeten gar leicht zu schliessen.

§. 73. Wir schliessen hieraus, daß wenn vier Linien A, B, C, D proportional sind, und man hat A : B = C : D, man bezeichnet aber das Quadrat der ersten dieser Linien durch Aq, das Quadrat der zwoten durch Bq und so ferner; auch diese Proportion richtig seyn werde Aq : Bq = Cq : Dq, mit einem Worte, daß die Quadrate, deren Seiten proportional sind, auch selbst proportional seyn werden. Denn da die Verhältniß Aq : Bq aus der Verhältniß A : B zwey mal bestehet, und

die

die Verhältniß $C^q : D^q$ aus der Verhältniß $C : D$, welche Verhältniß der ersten $A : B$ gleich ist, zweymal genommen zusammen gesetzet ist, so können die Verhältnisse derer Quadrate nicht verschieden seyn, weil durch die Zusammensetzung gleicher Verhältnisse immer gleiche Verhältnisse kommen.

IX. Abschnitt.

§. 74. Und umgekehret, wenn vier Quadrate proportional sind, $A^q : B^q = C^q : D^q$, so sind auch ihre Seiten proportional. Denn wenn man zu A, B, C die vierte Proportionallinie suchte, welche wir E nennen wollen, und setzte $A : B = C : E$, so folget aus $A : B = C : E$ nach dem Satze welchen wir oben angemerket, die Proportion der Quadrate $A^q : B^q = C^q : E^q$, und da wir auch angenommen, daß die Proportion $A^q : B^q = C^q : D^q$ richtig sey, so folget aus diesen beyden Proportionen, daß auch D^q dem E_q gleich sey, und also $D = E$. Man kan demnach in der Proportion die ohnfehlbar richtig ist $A : B = C : E$ an die Stelle der E die D setzen, wodurch sie in die Proportion $A : B = C : D$ verwandelt wird, und diese kan demnach allezeit aus der angenommenen Proportion $A^q : B^q = C^q : D_q$ hergeleitet werden.

§. 75. Man kan dieses gar leicht auf solche Figuren anwenden, welche sich gegen einander verhalten wie die Quadrate ihrer Seiten, dergleichen wir in der 238, 239 Zeichnung dargestellt; und man siehet leicht, daß man auf eben die Art zwo gerade Linien darstellen könne, welche sich verhalten wie ABC : abc, wie man zwo gerade Linien darstellet, die sich gegen einander wie zwey gegebene Quadrate verhalten. Ja es lässet sich dasjenige, was wir von den eben genannten Figuren ABC, abc gezeiget haben, auch von vielen andern Figuren sagen, und überhaupt von allen, welche einander ähnlich sind, welches wir so gleich aus den Betrachtungen sehen werden, die uns noch bevorstehen.

F. 238. 239.

Vergleichung solcher Figuren, die einander ähnlich sind.

§. 76. Die Parallelogramme ABC, abc, wie auch die Dreyecke ABC, abc, haben bey B und b gleiche Winkel. Uebrigens können sich die Seiten wie man wil gegen einander verhalten, und man setzet demnach noch nicht, daß die Figuren ABC, abc einander ähnlich sind. Denn dazu wird ausser der Gleichheit der Winkel B und b auch erfordert, daß die Seiten, welche diese Winkel einschliessen, in den beyden Figuren ABC : abc einerley Verhältniß gegen einander haben, VII, 28. welches wir noch nicht erforderen. Dennoch aber sagen

F. 242. 243.

IX. Abschnitt. gen wir, die Verhältniß ABC: abc sey aus der Verhältniß der Seiten, welche die gleiche Winkel B und b einschliessen, zusammen gesetzet, aus diesen beiden nemlich AB: ab und BC: bc. Und dieses wird aus demjenigen, so bereits gewiesen worden, folgender gestalt hergeleitet.

§. 77. Man stelle sich die Höhen der Figuren AD, ad vor, welche Linien auf BC, bc, perpendiculär fallen, und bey D, d gerade Winkel machen. Dadurch werden die Dreyecke ABD, abd einander ähnlich. Denn aus der Gleichheit zweyer Winkel in zweyen Dreyecken folget allezeit, daß dieselben Dreyecke ähnlich sind VII, 23. Nun ist in den erwehnten Dreyecken ABD, abd der Winkel B dem Winkel b gleich, und dieses hat man zum Grunde gesetzet, ausser dem aber ist D = d, weil diese Winkel gerade sind. Also sind auch die Seiten dieser Dreyecke, die zwischen den gleichen Winkeln liegen proportional, und folgends hat man AD: ad = AB: ab, das ist die Verhältniß der Höhen AB: ab ist der Verhältniß der Seiten AD: ad gleich, und eine dieser Verhältnisse lässet sich allezeit an die Stelle der anderen setzen. Nun ist kein Zweifel, daß auch bey den gegenwärtigen Bedingungen die Verhältniß der Figuren ABC: abc aus der Verhältniß der Grundlinien derselben BC: bc, und aus der Verhältniß ihrer Höhen AD: ad zusammen gesetzet sey IX, 46. Man kan aber hier an die Stelle der letzteren Verhältniß, die ihr gleiche Verhältniß AB: ab bringen, VIII, 16. und dadurch wird die Verhältniß ABC: abc aus den Verhältnissen BC: bc und AB: ab zusammen gesetzet.

§. 78. Es sind die gegenwärtige Bedingungen bey allen ähnlichen Dreyecken anzutreffen: Denn es wird nicht nöthig seyn, daß wir künftig hin von Vierecken ins besondere reden, weil wir uns vermittelst der Dreyecke zu ganz allgemeinen Sätzen erheben werden, welche von allen ähnlichen Figuren gelten. Sind die Dreyecke ABC, abc in der 244 Figur einander ähnlich, wie wir dieses annehmen, so ist der Winkel B dem Winkel b nothwendig gleich, weil ein jeder Winkel des Dreyeckes ABC einem Winkel des Dreyeckes abc gleich ist, und man diese gleiche Winkel, so wie wir fast immer thun, mit einerley Buchstaben bezeichnen kan. Also ist die Verhältniß ABC: abc aus der Verhältniß AB: ab, und aus der Verhältniß BC: bc zusammen gesetzet. Es sind aber auch diese Verhältnisse AB: ab und BC: bc

F. 244.

ein-

einander gleich, sonst wären die Dreyecke einander nicht ähnlich. Man kan demnach in der Zusammensetzung dieser Verhältnisse eine vor die andere setzen, und sagen, die Verhältniß des Dreyeckes ABC zu dem Dreyecke abc sey aus den Verhältnissen AB: ab, und AB: ab, oder aus den Verhältnissen BC: bc und BC: bc zusammen gesetzet. Das ist: Die Verhältniß ABC: abc entstehe aus der Verhältniß der Seiten der Dreyecke, welche zwischen gleichen Winkeln liegen AB: ab zweymal genommen. Denn man siehet leicht, daß die Seiten AB, ab von den übrigen, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, keinen Vorzug haben.

IX. Abschnitt.

§. 79. Also verhält sich auch das Dreyeck ABC zu dem Dreyecke abc, wie das Quadrat auf AB zu dem Quadrate auf ab. Denn die Verhältniß dieser Quadrate entstehet ebenfals, wenn man die Verhältniß AB: ab zweymal nimmet, und zusammen setzet IX, 69.

§. 80. Nun lassen sich alle geradelinichte Figuren, die einander ähnlich sind, in ähnliche Dreyecke zertheilen, wenn man zwischen den Spitzen ihrer Winkel auf einerley Art gerade Linien ziehet VII, 41. Hieraus kan man schliessen, daß jede zwo ähnliche Figuren sich wie die Quadrate solcher geraden Linien verhalten müssen, welche in den beiden Figuren zwischen den Spitzen gleicher Winkel liegen. Es seyen in den geradelinichten Figuren ABCDE, abcde, diejenigen Winkel einander gleich, welche mit einerley Buchstaben A und a, B und b, und so fort bezeichnet sind. Man ziehe BE und be, wie auch BD und bd, so sind die Dreyecke ABE, abe, wie auch BED, bed und BCD, bcd einander ähnlich. Es ist demnach die Verhältniß AB: ab gleich der Verhältniß BE: be, und diese Verhältniß ist wieder gleich der Verhältniß BD: bd, welche endlich der Verhältniß BC: bc gleich ist. Demnach sind auch die Verhältnisse der Quadrate dieser Linien einander alle gleich IX, 73. nemlich $BA^q : ba^q = BE^q : be^q = BD^q : bd^q = BC^q . bc^q$

F. 245.

Nun aber ist IX, 79. $ABE : abe = BE^q : be^q$,
und $BED : bed = BD^q : bd^q$,
wie auch $BDC : bdc = BC^q : bc^q$,

und es sind demnach die Verhältnisse der Dreyecke alle gleichen Verhältnissen gleich, weil die Verhältnisse der Quadrate, mit welchen wir jene vergleichen, alle gleich sind. Demnach ist auch VI, 102. die Verhältniß der Summe ABE + BED + BDC zu der Summe abe + bed + bdc, das ist, die Verhältniß der Figur ABCDE zu der Figur abcde eben dieser Verhältniß $BE^q : be^q$, oder $BC^q : bc^q$ gleich,

 und

IX. Abschnitt.

und dieses ist dasjenige, welches wir erweisen solten. Die Verhältniß BEq: beq, entstehet aus der Verhältniß BE: be zweymal genommen, IX, 69. und es entstehet demnach die Verhältniß ABCDE: abcde ebenfals, wenn man die Verhältniß BE: be mit ihr selber zusammen setzet.

§. 81. Reguläre Figuren verhalten sich auch gegen einander wie die Quadrate der Halbmesser der Cirkel, in welche oder um welche sie beschrieben sind, wenn sie einander ähnlich sind, das ist, wenn sie gleich viele Seiten haben. Denn das reguläre Fünfeck ABC verhält sich gewiß zu dem regulären Fünfecke abc, wie das Quadrat aus AB sich zu dem Quadrate aus ab verhält, und man hat ABC: abc = ABq: abq. Weil aber, wie man leicht siehet, die Dreyecke ABD, abd ähnlich sind, welche man gemacht, indem man von den Mittelpuncten der Fünfecke D, d die geraden Linien DA, DB, da, db an die Ecken A, B, a, b gezogen; so ist ABq: abq = DAq: daq IX, 73. Und weil, wenn man aus D, d die Linien DE, de auf die Seiten AB, ab perpendicular fallen lässet, auch die Dreyecke DAE, dae ähnlich werden, und man also sagen kan DAq: daq = DEq: deq, so folget, daß auch ABC: abc = DAq: daq = DEq: deq.

F. 246.

§. 82. Der Satz ist auch von krummlinichten Figuren richtig, welche einander ähnlich sind. Doch wir haben nicht nöthig dieses von anderen Figuren dieser Art als blos von Cirkeln und von Ausschnitten und Abschnitten derselben zu erweisen. Wir setzen, daß die gerade Linie BC dem halben Umkreis des Cirkels gleich sey, welchen wir um den Mittelpunct A beschrieben, und daß sie denselben in B berühre, daß man an den Berührungspunct den Radius AB gezogen, und aus diesen Linien das geradewinklichte Viereck AC zusammen gesetzet, welches dem Cirkel gleich seyn wird IX, 36. Eben dieses, setzen wir, sey auch bey dem anderen Cirkel, der um a beschrieben ist, gemacht worden, und dadurch das Viereck abc entstanden, so diesem Cirkel gleich ist. Weil nun alle Halbmesser gegen ihre Umkreise und folgends auch gegen die Helften ihrer Umkreise, einerley Verhältniß haben VII, 56. so ist auch AB: BC = ab: bc, und demnach sind die rechtwinklichte Vierecke ABC, und abc ähnlich, weil ihre Seiten in gleicher Verhältnisse gegen einander stehen. Folgends ist ABC: abc = ABq: abq. Die Vierecke nemlich verhalten sich gegen einander, wie die Quadrate der Halbmesser AB: ab IX, 80. Und weil diese Vierecke ABC, abc den Cirkeln, an denen sie stehen, gleich sind, so ver-

F. 247.

hält

hält sich auch der Cirkel um A, zu dem Cirkel um a, wie das Quadrat auf AB, zu dem Quadrate auf ab. Weil aber auch die Halbmesser sich verhalten wie die ganzen Durchmesser, und folgends die Quadrate der Halbmesser wie die Quadrate der Durchmesser IX, 73. so verhält sich auch der Cirkel um A zu dem Cirkel um a, wie das Quadrat des Durchmessers BD sich zu dem Quadrate des Durchmessers bd verhält.

IX. Abschnitt.

§. 83. Man siehet leicht, daß aus diesem Beweise auch fliesse, daß der grössere Cirkel sich zu dem kleineren verhalte, wie sich das Quadrat der geraden Linie BC, die dem halben Umkreise des grösseren Cirkels gleich ist, zu dem Quadrat der bc, oder des halben Umkreises des kleineren Cirkels verhält. Allein dieser Satz wäre ziemlich unnütze, weil die Grössen der Umkreise der Cirkel geometrisch nicht können gegeben werden. Von grösserem Nutzen ist es, wenn wir betrachten, daß dasjenige, so von ganzen Cirkeln gezeiget worden, sich auch auf solche Ausschnitte anwenden lasse, die an den Mittelpuncten gleiche Winkel haben, und welche demnach einander ähnlich sind. ABD und abd sollen dergleichen Ausschnitte vorstellen, und wir setzen, daß die geraden Linien BC, bc welche die Bogen in B, b berühren, dem Bogen gleich sind, BC dem BD, und bc dem bd. So lässet sich hier alles wiederholen, so eben von den Cirkeln gesaget worden. Die rechtwinklichten Dreyecke ABC. abc sind einander ähnlich, weil AB : BC = ab : bc, also ist auch ABC : abc = ABq : abq. Und weil das Dreyeck ABC dem Ausschnitte ABD, und das Dreyeck abc dem Ausschnitte abd gleich ist, so ist auch ABD : abd = ABq : abq.

F. 248.

§. 84. Wenn man in den ähnlichen Ausschnitten ABDC, abdc die Sehnen BC, bc ziehet, so werden auch die Abschnitte BDC, bdc einander ähnlich, und man kan sich vorstellen, daß alle ähnliche Abschnitte auf die Art entstanden sind, weil bey ähnlichen Abschnitten die Winkel an den Mittelpuncten A, a, allezeit gleich werden müssen, wenn man die Halbmesser AB, AC wie auch ab, ac, an die äussersten Puncte der Bogen ziehet VII, 68. Es werden aber dadurch auch die Dreyecke ABC, abc einander ähnlich, wie man leicht siehet. Demnach ist, dem zu Folge so eben erwiesen worden ABDC : abdc = ABq : abq, aber auch ABC : abc = ABq : abq. Man nehme die Dreyecke von den Ausschnitten weg, so bleiben die Abschnitte BDC : bdc. Weil aber die Verhältniß der Ausschnitte ABCD : abcd so wohl als die Verhältniß der Dreyecke ABC : abc der Verhältniß ABq : abq

F. 249.

gleich

IX. Abschnitt.

gleich ist, so wird durch diesen Abzug die Verhältniß nicht geändert VI, 98. und es ist demnach auch $BDC : bdc = ABq : abq$. Man siehet leicht, daß $ABq : abq = BCq : bcq$, und daß man demnach auch sagen könne, $BDC : bdc = BCq : bcq$, daß also die ähnlichen Abschnitte BCD, bcd sich verhalten wie die Quadrate der Halbmesser ihrer Cirkel $ABq : abq$, oder wie die Quadrate ihrer Sehnen BCq, bcq.

Aehnliche Figuren zusammen zu setzen; und eine von der andern abzuziehen.

§. 85. Dieses sind die Grund-Sätze, welche bey der Vergleichung und Zusammensetzung der Flächen gebrauchet werden, ausser einigen wenigen andern, die theils aus denselben fliessen, theils vor sich einzusehen sind, welche wir noch anfügen müssen, damit nichts übrig bleibe, so in diesen Dingen zu wissen nöthig ist. Aus den gewiesenen Sätzen allein folget eine Anweisung, wie eine Figur zu machen ist, welche einer gegebenen Figur ähnlich, und derselben, und einer andern ihr ebenfals ähnlichen Figur zusammen genommen gleich sey. Es seyen die zwo Figuren ABC und DEF einander ähnlich, und man sol eine dritte Figur machen, welche einer jeden dieser Figuren ABC, DEF ebenfals ähnlich sey, aber so groß als diese beide Figuren zusammen genommen.

F. 250.

§. 86. Man siehet, daß man dazu nichts zu suchen habe, als eine Seite der Figur, welche zu verfertigen ist, welche eben so liegen sol, wie die Seite AB in der Figur ABC lieget. Das ist, wenn von Parallelogrammen die Rede ist, und AB ist die grössere Seite des Parallelogrammum ABC, so hat man die grössere Seite des Viereckes, von dieser Art, welches zu finden ist, zu suchen, oder überhaupt eine solche Seite oder Querlinie, aus welcher die Verhältniß der Figur, welche zu verfertigen ist, zu der gegebenen Figur ABC oder DEF kan geschlossen werden. Wir wissen aus dem vorhergehenden, was dieses vor Linien sind. Solche nemlich, welche in geradelinichten Figuren zwischen den Spitzen gleicher Winkel gezogen sind. Bey Cirkeln oder Theilen der Cirkel sind es die Durchmesser, oder die Halbmesser, oder die Sehnen ähnlicher Bogen, und so weiter. Wir erinnern uns aber auch verhoffentlich, wie wenn eine dergleichen Linie gegeben ist, man hernach eine Figur verfertigen müsse, welche einer gegebenen Figur ähnlich

sich sey. Dieses ist an seinem Orte VII, 50. gezeiget worden, und darf hier nicht wiederholet werden. Diese Seite aber, welche man allein brauchet, wird nachfolgender gestalt gefunden:

IX. Abschnitt.

§. 87. Man nehme in der Figur DEF eine Seite EF oder eine Querlinie nach Belieben, und aus der Figur ABC nehme man diejenige Seite, welche in derselben eben so lieget wie EF in DEF. Diese ist die Seite AB. Man setze AB und EF dergestalt an einander, daß sie einen geraden Winkel geben, welches wir hier gethan, indem wir die FG auf die EF perpendicular gesetzet, und der AB gleich gemachet haben. Ist dieses geschehen, so ziehe man EG, diese ist die gesuchte Seite, und wenn man auf EG die Figur EGH setzet, welche der Figur ABC oder DEF ähnlich ist, und in welcher EG eben so lieget, wie AB in ABC, oder EF in DEF, so ist EGH so groß als ABC und DEF zusammen.

§. 88. Dieses wird nachfolgender massen erwiesen. Es ist aus einem der Sätze, welche wir ohnlängst IX, 65. erwiesen, bekannt, daß das Quadrat der Seite EG so groß sey als die beiden Quadrate der Seiten EF und FG zusammen; weil das Dreyeck EFG bey F einen rechten Winkel hat. Es ist aber auch daraus, daß die drey Figuren ABC, DEF und EGH ähnlich sind, zu schliessen, daß sie sich gegen einander verhalten wie die Quadrate der Seiten AB, EF und EG, IX, 80. Demnach ist ABq : EFq = ABC : DEF, und folgends wenn man die ersteren Glieder der Verhältnisse zusammen nimmet VI, 80. ABq : ABq + EFq = ABC : ABC + DEF, oder weil AB = FG, so ist ABq : FGq + EFq = ABC : ABC + DEF. Da nun aber, wie wir bereits erinnert haben, FGq + EFq = EGq so kan man an statt FGq + EFq in der eben gegebenen Proportion EGq schreiben, ohne dieselbe aufzuheben, und es ist also ABq : EGq = ABC : ABC + DEF. Weil aber auch die Figur ABC der Figur EGH ähnlich ist, so hat man auch ABq : EGq = ABC : EGH, und wenn man diese Proportion mit der letzteren vergleichet, so findet man, daß die drey ersteren Glieder derselben einerley sind. Demnach können die vierten Glieder derselben nicht von verschiedener Grösse seyn, sondern es ist ABC + DEF = EGH, und man hat demnach die der ABC ähnliche Figur EGH so groß gemachet, als ABC + DEF zusammen, wie aufgegeben war.

§. 89. Es wäre überflüßig, wenn wir nunmehro zeigen wolten,

 wie

IX. Abschnitt. wie diese allgemeine Auflösung auf die besonderen Arten der Figuren anzuwenden sey, weil dieses gar etwas leichtes ist. Man siehet zum Exempel so gleich, daß, wenn man einen Cirkel machen wil, welcher so groß ist als zween gegebene Cirkel, deren Durchmesser AB und EF sind; man ebenfals diese Linien, wie in der Figur bereits geschehen, dergestalt zusammen zu setzen habe, daß der Winkel EFG gerade werde. Die grösseste Seite des Dreyeckes EG, welche man nunmehro leicht ziehen kan, ist der Durchmesser des Cirkels, welcher den zweyen gegebenen Cirkeln, deren Durchmesser AB und EF sind, gleich ist, und eben so verfähret man in allen dergleichen Fällen. Man kan aber auch an die Stelle der Durchmesser der Cirkel ihre Halbmesser nehmen, wie leicht zu sehen ist.

§. 90. Durch die Wiederholung dieser Arbeit machet man eine Figur, welche so vielen Figuren gleich ist, als gegeben seyn mögen, falls diese gegebene Figuren einander alle ähnlich sind. Es seyen zum Exempel die vier Cirkel A, B, C, D gegeben, und es sey ein Cirkel zu machen, welcher so groß ist als $A + B + C + D$. Wir haben nicht nöthig erachtet, dieselbe zu zeichnen, weil die Sache auch ohnedem verständlich gemachet werden kan. Denn wir haben dabey nichts zu sagen, als daß man erstlich, wie eben gewiesen worden, einen Cirkel E machen müsse, welcher so groß sey als $A + B$. Sodann aber müsse man einen Cirkel machen, welcher so groß sey als $E + C$, welchen wir F nennen wollen, und endlich den dritten G, der so groß sey als $F + D$, welches alles geschiehet, indem man immer bloß zween Cirkel in einen bringet. Weil nun $G = F + D$, und $F = E + C$, so ist auch $G = E + C + D$, und weil wieder $E = A + B$, so ist eben der Cirkel $G = A + B + C + D$, welches zu machen war.

§. 91. Die Figur ABC ist der Unterschied der zwo ähnlichen Figuren DEF und EGH. Denn wenn man sie zu den kleineren dieser Figuren DEF setzet, so wird die Summe $ABC + DEF$ der grösseren Figur EFG gleich, und dieses ist allezeit ein Kennzeichen des richtigen Unterschiedes. Wenn demnach die zwo ähnlichen Figuren EGH und DEF gegeben sind, und man sol die Figur ABC finden, welche einer jeden der gegebenen ebenfals ähnlich, und ihrem Unterschiede gleich sey; so wird man dieses durch eben die Figur erhalten können, welche wir vor uns haben, nur muß die Zeichnung derselben anders angefangen werden. Denn man kan hier das rechtwinklichte Dreyeck EFG nicht von den Seiten EF und FG zu beschreiben anfangen, weil zwar EF,

EF, nicht aber FG = AB gegeben ist, sondern diese letztere Seite gesuchet wird. Man muß vielmehr dieses Dreyeck aus seiner grössesten Seite EG und aus der Seite EF verfertigen. Dieses aber geschiehet nachfolgender massen. Man beschreibe auf EG einen halben Cirkel EFG, und lege in denselben aus E die Sehne EF, welche der Seite der gegebenen Figur DEF, die wir vor dem IX, 87. genau beschrieben, gleich ist: so kan man FG ziehen, und diese FG ist die Seite der Figur ABC, welche den beyden Figuren EGH und DEF ähnlich, und ihrem Unterschiede gleich ist.

IX. Abschnitt. F. 251.

§. 92. Wenn ein Cirkel von einem anderen abzuziehen, und ein Cirkel zu finden ist, welcher dem Unterschiede der ersteren gleich sey, so geschiehet dieses durch eine Zeichnung, welche uns artig vorkommet. Man beschreibet die zween Cirkel, deren einer von dem andern abzuziehen ist, um einen Mittelpunct A, ziehet so dann eine Linie BC, welche den kleineren Cirkel in B berühret, bis an den Umkreis des grösseren in C, so ist diese BC der Halbmesser des Cirkels, welcher dem Unterschiede der beyden gezeichneten Cirkel, und folgends dem Ringe, welcher übrig bleiben würde, wenn man den kleineren aus dem grösseren heraus schnitte, gleich ist. Denn wenn man den Halbmesser AB an den Berührungspunct B ziehet, so ist der Winkel ABC gerade, V, 47. und ziehet man auch den Halbmesser des grossen Cirkels AC, so hat das Dreyeck ABC bey B einen geraden Winkel. Es ist demnach der Cirkel des Halbmessers AB, zusamt dem Cirkel des Halbmessers BC, dem Cirkel des Halbmessers AC gleich. Demnach ist der Cirkel, welcher mit dem Halbmesser BC beschrieben wird, der Unterschied der beyden Cirkel, deren Halbmesser sind AB und AC; welches eben die beyden Cirkel sind, welche wir um den Mittelpunct A verzeichnet haben.

F. 252.

§. 93. Sind aber zwo Figuren F und G gegeben, und man sol eine dritte Figur H machen, welche der ersten der gegebenen Figuren F ähnlich, und der zwoten G gleich sey, so muß man sich auf die Aufgabe gründen, vermittelst welcher zwischen zwo gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden ist. Es ist nemlich nichts zu suchen als eine Seite der Figur H, welche zu beschreiben ist, welche in dieser Figur zwischen zween Winkeln liege, die zween Winkeln der Figur F gleich seyen. Man nehme die Winkel a und b dieser Figur, zwischen welche die Seite ab lieget, und verwandele erstlich die Figur F in ein Dreyeck, wie IX, 22. gewiesen worden ist,

F. 253.

IX. Abschnitt.

ist, und dieses Dreyeck verwandele man wieder in ein geradewinklichtes Viereck, in welchem eine Seite so groß sey als ab. Auch dieses ist gewiesen worden, IX, 60. man kan es aber auch gleich erhalten, indem man F in ein Dreyeck verwandelt. Denn man kan diese Arbeit so einrichten, daß die Seite ab unverändert bleibet. Wir setzen das Viereck ABC sey der Figur F gleich und AB=ab, so verwandele man nunmehro auch G in ein geradewinklichtes Viereck CD, welches mit dem vorigen einerley Höhe BC habe: so ist ABC:CBD=F:G, weil die ersteren Figuren den letzteren gleich sind. Weil aber die Vierecke ABC, CBD gleiche Höhen haben, so ist ABC:CBD=AB:BD, IX, 40. und folgends auch F:G=AB:BD, weil diese beyden Verhältnisse einer dritten ACB:CBD gleich sind.

§. 94. Nunmehro suche man zwischen AB und BD die mittlere Proportionallinie BE. Diese ist die gesuchte Seite, welche in der Figur H eben so liegen muß, wie ab in F lieget. Denn wenn man auf diese BE die Figur H dergestalt beschreibet, wie F an ab beschrieben ist; so ist F:H=ABq:BEq, IX, 80. weil AB=ab, und weil AB:BE=BE:BD, so ist auch ABq:BEq=AB:BD. VIII. 52. Denn die Verhältniß AB:BD ist so wohl aus der Verhältniß AB:BE zweymal genommen zusammen gesetzet, als die Verhältniß ABq:BEq. Wenn man also an statt ABq:BEq die Verhältniß AB:BD setzet, so wird F:H=AB:BD, oder AB:BD=F:H. Nun ist auch, wie wir gesehen, AB:BD=F:G, und die drey erstern Glieder dieser Proportionen sind einerley. Demnach ist auch G=H, und die Figur H, welche man der Figur F ähnlich gemacht, ist auch der G gleich, wie erfordert wurde.

Einige besondere Sätze und Aufgaben von den geradewinklichten Vierecken.

§. 95. Und diese sind die Sätze, welche aus den vorhergehenden zu schliessen waren. Die nachstehende kan man auch ohne denselben einsehen, welche nicht nur sonst unentbehrlich sind, sondern uns auch so gleich zum Grund einiger Auflösung dienen werden, welche von gar grossem Nutzen sind. Man pfleget nemlich in der Anwendung sich der Flächen oder ebenen Figuren eben so zu bedienen, wie man sich der geraden Linien bedienet, bekante Grössen von welcher Art man wil, vorzustellen, aus denselben andere dergleichen Grössen zu schliessen, die man sich ebenfals unter dem Bilde solcher flachen Figuren vor-

vorstellet, und dadurch die Aufgaben und Fragen, welche vorgeleget werden, aufzulösen. Damit dieses füglicher geschehen könne, pfleget man diese Figuren, so oft es sich thun läst, in geradewinklichte Vierecke oder Dreyecke zu verwandeln, und diese hernach zusammen zu setzen, von einander abzuziehen, oder die Verhältnisse derselben zu betrachten.

§. 96. Damit aber dieses desto leichter geschehen könne, so bezeichnet man die geradewinklichte Vierecke auch öfters so, wie man die Producte in der Rechenkunst bezeichnet, und verknüpfet die Seiten derselben vermittelst des Zeichens ×. Es bedeutet also AB×CD in der Geometrie ein geradelinichtes Viereck, dessen Seiten sind AB und CD, oder kan es wenigstens bedeuten. Diese Zeichnung hat man deswegen beliebet, weil, wenn zwey dergleichen Vierecke gegeben sind, und die Seiten des ersten sind AB und CD, die Seiten des zweyten aber ab und cd, die Verhältniß der Vierecke, welche aus den Verhältnissen ihrer Seiten zusammen gesetzet wird, nachfolgender massen ausgedruckt wird AB×CD : ab×cd. Man entfernet sich also von dem was einmal VIII. 42. angenommen worden ist, nicht weit, wenn man das geradewinklichte Viereck, dessen Seiten sind AB und BC, auch vor sich mit AB×BC bezeichnet.

§. 97. Die Summe zweyer oder mehrerer solcher Vierecke, welche eine Höhe haben AB×BC+AB×CD ist dem einzigen geradelinichten Viereck ABD gleich, dessen Höhe die vorige AB ist, die Grundlinie BD aber = BC+CD, und man kan also allezeit setzen $AB\times BC + AB\times CD = AB\times\overline{BC+CD}$, wobey der Strich über den Buchstaben, welche die Grundlinien bedeuten, anzeiget, daß man dieselbe zusammen zur Grundlinie annehmen müsse. Die Sache ist bloß aus der Figur klar. Denn man siehet, daß man alle geradewinklichte Vierecke von gleichen Höhen so an einander schieben kan, wie in der Figur geschehen. Und eben so leicht siehet man, daß der Unterschied der geradewinklichten Vierecke von gleicher Höhe $AB\times BD - AB\times CD$ dem gerawinklichten Viereck $AB\times\overline{BD-CD}$ oder AB ×BC, gleich sey. Die Figur weiset es deutlicher als viele Worte.

F. 254.

§. 98. Wenn man aber die zwo Seiten eines Quadrats AB, AC in D und E auf einerley Art theilet, so nemlich, daß AD = AE und folgends DB = EC, und ziehet durch diese Theilungspuncte die Linien DF, EG mit den Seiten parallel, so wird das Quadrat in vier Theile getheilet, welche sind: 1.) ED, das Quadrat des ersten

F. 255.

 Theils

IX. Abschnitt.

Theils der Seite AD. 2°) EF, ein geradewinklichtes Viereck, dessen Seiten die Theile der Seite des ganzen Quadrats AB sind. Nemlich CF ist = AD, und CE = DB. 3°) Noch ein dergleichen geradewinklichtes Viereck DG. Denn BG ist = AE = AD, und 4°) das Quadrat FG, dessen Seite dem zweyten Theil der AB, nemlich der DB gleich ist. Und wenn demnach die Seite eines Quadrats AB aus den zwey Theilen AD, DB bestehet, so bestehet das Quadrat derselben EB aus nachfolgenden vier Theilen ADq + 2AD × DB + DBq. Die Sache ist desto leichter einzusehen und zu behalten, weil wir dergleichen von den Quadratzahlen gleich Anfangs III, 8. erwiesen.

F. 256.

§. 99. Ist aber von AD das Quadrat DE gemacht, und man will von AD den Theil BD von beliebiger Grösse wegnehmen, und das Quadrat des Ueberbleibsels AD — BD, oder AB, aus dem vorigen Quadrat DE, machen: so kan man nachfolgendergestalt verfahren. Man mache AC = AB, wodurch auch EC der DB gleich wird, ziehe so dann BF und CG mit den Seiten des Quadrats DE parallel, verlängere aber auch CG bis CH = EC, und mache das Quadrat EH, welches dem Quadrat FG gleich seyn wird, dessen Seite der BD gleich ist. Es ist aber auch das rechtwinklichte Viereck HF dem rechtwinklichten Viereck FD gleich, und es bleibt also das gesuchte Quadrat CB dessen Seite AB ist, übrig, wenn man von der Summe der Quadrate ED + EH die zwey Vierecke HF + FD, abziehet. Oder wenn man dieses auf die vorher gebrauchte Art ausdrucken wil, so muß man sagen das Quadrat AB oder AD — BD bestehe aus den Theilen ADq + DBq — 2AD × DB, weil nemlich HF + FD so viel ist als 2AD × BD, wie aus der Figur erhellet. Wil man die vorige Ordnung behalten, so schreibe man $\overline{AD - BD}q = ADq - 2AD \times BD + DBq$.

§. 100. Man siehet auch hieraus, daß der Unterschied zweyer Quadraten, wie man sie auch annehmen wil CB und ED; der Summe der zwey rechtwinklichten Vierecke CG + GD gleich sey. Die Höhen dieser zwey Vierecke sind gleich, weil EC = DB; und zwar ist diese Höhe DB der Unterschied der zwo Seiten der Quadrate, deren eine ED von der andern CB abgezogen worden. Denn DB ist augenscheinlich = AB — AD. Die Grundlinie EG aber des Vierecks CG ist der Seite des grössern Quadrats AB gleich, und die Grundlinie GB des Vierecks GD ist die Seite des kleinern Quadrats EA oder AD. Und demnach kan man die Summe dieser beyden Vierecke

F. 255.

CG +

CG+GD also ausdrucken DB×AB+DB×AD, oder IX, 97. $DB \times \overline{AB+AD}$; woraus erhellet, daß der Unterschied zweyer Quadrate, deren Seiten sind AB und AD, einem geradelinichten Viereck gleich sey, dessen Höhe ist DB, der Unterschied der Seiten der Quadrate AB—AD, und die Grundlinie AB+AD die Summe dieser Seiten, oder kurz, daß $ABq - ADq = \overline{AB-AD} \times \overline{AB+AD}$.

§. 101. Vermittelst dieser Sätze können wir nunmehro einen dergleichen Satz, als vor die rechtwinklichte Dreyecke oben IX, 65. heraus gebracht worden ist, vor alle übrige Dreyecke finden. Es sey das Dreyeck ABC bey B rechtwinklicht, so haben wir gesehen, daß die Quadrate der Seiten AB und BC zusammen, dem Quadrate der Seite AC gleich seyen, welche dem Winkel B entgegen stehet. Wie ist es aber, wenn der Winkel B spitzig ist; und auf was Art kan man das Quadrat der AC aus den Quadraten der Seiten AB, BC machen, wenn der Winkel B stumpf ist? Man siehet leicht, daß wenn B spitzig ist, das Quadrat von AC kleiner seyn werde als die beyden Quadrate von *AB* und *BC* zusammen. Denn *AB*, *BC* sind in Ansehung der AC nunmehro grösser als da der Winkel *B* gerade war. Ist aber der Winkel *B* gerade, so ist $ABq + BCq$ genau so groß als ACq, also muß, wenn der Winkel *B* spitzig ist, $ABq + BCq$ grösser seyn als ACq. Eben so siehet man, daß wenn der Winkel *B* stumpf ist, die Summe der Quadrate $ABq + BCq$ kleiner seyn müsse als das Quadrat von AC, weil *AB* und *BC* in Ansehung der AC nunmehro kleiner sind, als da der Winkel *B* gerade war. Die Frage ist, was man in dem zweyten Fall der Summe $ABq + BCq$ zusetzen müsse, und was in dem ersten Fall von dieser Summe abzuziehen sey, damit sie dem Quadrat aus AC gleich werde. F. 257.

§. 102. Dieses einzusehen, ziehe man die Perpendicularlinie AD auf BC, welche BC, wenn der Winkel *B* stumpf ist, erst muß verlängert werden: so werden die beyden Dreyecke A*B*D, ACD rechtwinklicht, und weil $ABq = BDq + ADq$, IX, 65. so ist $ADq = ABq - BDq$. Auf der andern Seite aber hat man $ACq = ADq + DCq$, oder weil, wenn der Winkel *B* spitzig ist, $DC = BC - BD$, und also $DCq = BCq - 2BC \times BD + BDq$, IX, 99. so wird, wenn man dieses an die Stelle des DCq setzet $ACq = ADq + BCq - 2BC \times BD + BDq$, und wenn man auch vor ADq setzet $ABq - BDq$, weil der Unterschied dieser beyden Quadrate jenem gleich ist, so wird $ACq = ABq - BDq$ F. 258. 259. F. 258.

IX. Abschnitt. $-BDq+BCq-2BC\times BD+BDq$, das ist $ACq=ABq+BCq-2BC\times BD$. Denn das übrige hebt sich zusammen auf, und der Zusatz des BDq wird durch den Abgang desselben vernichtet. Demnach ist die Summe der Quadrate der Seiten, welche den spitzigen Winkel B einschliessen $ABq+BDq$, um das rechtwinklichte Viereck $2BC\times BD$ grösser als das Quadrat der Seite AC, welche demselben Winkel B entgegen stehet, und dieses Viereck aus $2BC$ und BD muß von der Summe der gedachten Quadrate abgezogen werden, damit sie dem Quadrat ACq gleich werde.

F. 259. §. 103. Ist aber der Winkel B stumpf, so bleibt das übrige, nemlich $ADq=ABq-BDq$, und $ACq=ADq+DCq$, allein DC ist hier $=BC+BD$, und folgends $DCq=BCq+2BC\times DB+DBq$, und wenn man das letztere wieder an die Stelle des erstern setzet, und vor ADq schreibet $ABq-BDq$, so wird $ACq=ABq-BDq+BCq+2BC\times DB+DBq$; oder wenn man dasjenige, so sich selbst vernichtet, $DBq-DBq$ wegläst, so wird $ACq=ABq+BCq+2BC\times BD$, und die Summe der Vierecke $ABq+BCq$ ist also hier um das geradewinklichte Viereck $2BC\times DB$ kleiner als das Quadrat von AC: weil man dieses Viereck zu der gedachten Summe hinzu setzen muß, damit sie dem ACq gleich werde.

§. 104. Nun haben wir noch eine Aufgabe übrig, vermittelst welcher eine Menge anderer Aufgaben aufgelöset werden können, und welche also einen gar grossen Nutzen hat, ob zwar hier der Ort nicht ist, denselben zu zeigen. Sie bestehet in nachfolgendem: Es ist eine Figur gegeben, von was Art sie seyn mag S und eine gerade Linie AB. Man sol ein gleichwinklichtes Viereck machen, welches der Figur S gleich sey, und dessen zwo Seiten zusammen genommen die AB geben; oder dessen kleinere Seite von der grössern abgezogen, die AB überlasse. Gesetzt nemlich, es wäre das Viereck ADE der Figur S gleich, und DE so groß als DB, so wäre $AD+DE=AD+DB=AB$, und das Viereck AE wäre dasjenige, dessen Inhalt der Figur S, und dessen zwo Seiten zusammen gesetzt der gegebenen Linie AB, gleich sind. Gesetzt wiederum das Viereck AG wäre der Figur S gleich, und $BF=FG$, so wäre nunmehro $AF-BF=AF-FG$, das ist $AB=AF-FG$, und dieses Viereck AG sol man verfertigen, wenn befohlen wird ein Viereck zu machen, welches der Figur S gleich ist, und dessen Seiten um die gegebene Linie AB von einander verschieden sind.

F. 260.

§. 105. Wir haben die Aufgabe auf die Art ausgedruckt, welche

che uns am leichtesten geschienen. Man findet aber nach einer kleinen Betrachtung, daß wenn man das Viereck AE machen wil, man die gegebene Linie AB in dem Punct D so theilen müsse, daß das geradelinichte Viereck, dessen Seiten die Theile AD und DE = DB sind, der gegebenen Figur S gleich werde: und daß wenn das Viereck AG verfertiget werden sol, man an die gegebene AB eine Linie BF von der Grösse ansetzen müsse, daß das rechtwinklichte Viereck aus der ganzen AF, oder AB + BF, und aus FG = BF, wieder der gegebenen Figur S gleich werde. Man könte eben diese Aufgabe noch anders ausdrucken. Doch wir lassen es hierbey bewenden: was wir gesagt, kan genug seyn den Leser zu erinnern, daß er Aufgaben, welche mit verschiedenen Worten vorgetragen werden, nicht gleich vor verschiedene halte.

IX. Abschnitt.

§. 106. Um aber diese Aufgabe aufzulösen, kan man auf ververschiedene Art verfahren. Nothwendig muß man erstlich die gegebene Figur S in ein gleichwinklichtes Viereck, oder in ein Quadrat verwandeln. Wie dieses geschehe, ist gewiesen worden. Wir haben gezeiget, wie eine jede Figur in ein Dreyeck, und wie jedes Dreyeck in ein rechtwinklichtes Viereck, und wie jedes Viereck in ein Quadrat zu verwandeln sey. Auch haben wir IX, 60. gezeiget, wie ein gegebenes Dreyeck oder rechtwinklichtes Viereck in ein anderes rechtwinklichtes Viereck zu verwandeln ist, welches eine Seite von gegebener Länge habe. Wir bedienen uns des letztern, und wenn wir diese Aufgabe auflösen sollen, so machen wir erstlich ein geradewinklichtes Viereck, welches der gegebenen Figur S gleich ist, und dessen Seite die Länge AB hat. Das Viereck ABC der 261 Figur hat diese Eigschaften. Es ist so groß als S, und AB ist so groß als die gegebene AB der 260 Figur: oder wir setzen wenigstens, daß dieses so sey, und eben dieses nehmen wir auch bey dem Viereck ABC in der 262 Figur an, und wir werden also künftig hin allezeit das Viereck ABC an statt der Figur S nennen.

F. 261. 262.

§. 107. Wenn nun erstlich ein geradewinklichtes Viereck zu machen ist, dessen Inhalt so groß ist als ABC, und dessen zwo Seiten zusammen gesetzet, die Linie AB ausmachen: so theilen wir AB in H in zwey gleiche Theile, und ziehen HK der BC parallel, welche HK dadurch der BC gleich wird, wir nehmen so dann den Ueberschuß der HB über die HK, und legen denselben aus K an AB auf diese oder jene Seite. Dieser Ueberschuß in seiner gehörigen Lage ist KD. Das

F. 261.

 Punct

IX. Abschnitt.

Punct D nun, welches dergestalt gefunden wird, theilet die Linie AB wie verlanget worden. Das Viereck nemlich ADE, dessen Seite DE der DB gleich genommen worden, und dessen Seiten zusammen AD+DE die AD+DB oder AB geben, ist auch dem Viereck ABC gleich, wie die Aufgabe erfordert.

§. 108. Der Beweiß hievon gründet sich darauf, daß das Dreyeck KHD bey H einen rechten Winkel hat, und folgends das Quadrat der grösten Seite derselben KD den Quadraten der übrigen Seiten KH und HD gleich ist. IX, 65. Denn es ist diese Seite $KD = HB - BC$, und folgends IX, 99. $KDq = HBq - 2HB \times BC + BCq$. Demnach ist $KHq + HDq = KDq = HBq - 2HB \times BC + BCq$. Nun ist $KHq = BCq$, weil $KH = BC$. Man ziehe diese gleiche Quadrate beyderseits ab, so wird $HDq = HBq - 2HB \times BC$. Ferner ist $2HB \times BC = AB \times BC$, weil die Seite des vorigen 2HB der AB gleich ist. Man setze dieses Viereck zu den vorigen $HDq = HBq - 2HB \times BC$ beyderseits hinzu, so wird der Abgang des $2HB \times BC$ auf der einen Seite ersetzt, und man bekommt $HDq + AB \times BC = HBq$, und wenn man hier wieder zu beyden Seiten HDq abziehet, so wird $AB \times BC = HBq - HDq$. Dieser Unterschied zweyer Quadrate nun ist wie allezeit dem rechtwinklichten Viereck gleich, dessen eine Seite die Summe der Seiten der Quadrate $HB + HD$, und die andere, deren Unterschied $HB - HD$ ist. IX, 100. Es ist aber $HB + HD = AH + HD = AD$, und $HB - HD$ ist $= DB$, welcher die DE gleich gemacht worden. Demnach ist $HBq - HDq = AD \times DE$, und folgends auch $AB \times BC = AD \times DE$, welches zu erweisen war.

F. 262. §. 109. Sol man aber an die AB eine Linie BD anstücken, welche so groß sey, daß wenn man aus AD und $BD = DE$ das Viereck ADE machet, dieses wiederum dem gegebenen Viereck ABC gleich sey, so verfahre man im übrigen wie vorher, nur nehme man hier KD so groß, als die Summe der beyden Seiten, deren Unterschied man vorhero nehmen müssen. Das ist, man theile wieder die gegebene AB mit H in zwey gleiche Theile, und ziehe HK mit der BC parallel, welche folgends auch dieser BC gleich seyn wird: so dann nehme man $KD = HB + BC$, und lege sie wie die Figur weiset, aus K an AB, so reichet sie bis in das Punct D, welches man suchte. Und wenn man dadurch BD gefunden, so ist das rechtwinklichte Viereck ADE, in welchem $DE = BD$ dasjenige so gesucht wird.

§. 110. Der Beweiß dieser Auflösung ist mit dem Beweiß der vori-

vorigen fast einerley, und wir werden uns also dabey nicht lang aufhalten dürfen. Es ist $KDq = KHq + HDq$, und weil $KD = HB + BC$, so ist auch $KDq = HBq + 2HB \times BC + BCq$, IX, 98. folgends $KHq + HDq = HBq + 2HB \times BC + BCq$. Wir haben bereits erinnert, daß hier wieder $KH = BC$, also ist auch $KHq = BCq$. Man ziehe diese gleiche Quadrate beyderseits ab, so wird $HDq = HBq + 2HB \times BC$, und wenn man hier wieder zu beyden Seiten HBq wegnimt, so bekomt man $HDq - HBq = 2HB \times BC = AB \times BC$. Denn es ist $AB = 2HB$, und kan also jenes vor dieses gesetzet werden. Der Unterschied der Quadrate $HDq - HBq$ ist hier wieder dem rechtwinklichten Viereck aus $HD + HB = HD + AH$, das ist AD, und aus $HD - HB = BD = DE$ gleich. Und wenn man dieses Viereck $AD \times DE$ an die Stelle des gedachten Unterschiedes der Quadrate setzet, und also machet $AD \times DE = AB \times BC$, so siehet man die Gleichheit der Vierecke, welche solte erwiesen werden.

IX. Abschnitt.

§. 111. Man hat bey dieser Auflösung nicht die geringste Einschränkung, welche sie zuweilen ohnmöglich machte. Denn $HB + BC$ oder $HB + KH$ ist allezeit grösser als die Entfernung des Puncts K von B, weil zwo Seiten eines Dreyeckes zusammen allezeit grösser sind als die dritte, und man kan also $KD = KH + HB$ allezeit aus K an die Seite AB legen, und das D fällt dadurch allezeit über B hinaus.

§. 112. In der 261 Figur aber, da KD dem Unterschied der HB und HK gleich zu machen war, kan es kommen, daß, wenn man KD an AB legen soll, das Punct D genau in H falle. Dieses geschiehet, wenn HB zweymal so groß ist als BC, wie in der 263 Figur. Denn wenn man in diesem Falle $KD = HB - BC$ suchet, so wird dieselbe $KD = 2BC - BC = BC = KH$. Und es ist also in diesem Falle, wenn HB zweymal so groß ist als HK oder BC, und folgends AB viermal so groß als BC, selbst das Punct H der gesuchte Theilungs-Punct D. Und das geradewinklichte Viereck AHE aus AH und $HB = AH$, oder mit einem Wort, das Quadrat AHE ist das gesuchte Viereck, welches dem ABC gleich ist. Wäre aber der Unterschied der Seiten HB und HK kleiner als HK, so würde KD nicht einmal die Linie AB erreichen, und folgends die Auflösung dieser Aufgabe ganz und gar ohnmöglich fallen.

F. 263.

§. 113. Ist nun aber das gegebene Viereck ABC ein Quadrat, und man leget an die Seite desselben AB die Linie BD dergestalt, daß das

F. 264.

IX. Abschnitt.

das Viereck ADE, in welchem BD = DE, dem Quadrat ABC gleich ist: so wird die Seite BC = AB von der EF in G dergestalt geschnitten, daß sich die ganze BC zu dem grösten Theil derselben BG so verhält, wie dieser grössere Theil BG zu dem kleinern GC, welches die Alten haben wolten, wenn sie aufgaben: Rectam AB media & extrema ratione secare. Wir begnügen uns mit der Sache, ohne die Redens-Art zu übersetzen, und beweisen nachfolgendergestalt, daß unsere Anweisung zu diesem Schnitt richtig sey.

§. 114. Es ist das Viereck ADE dem Quadrat ABC gleich gemacht worden, und wenn man demnach beiderseits das gemeinschaftliche Viereck ABG abziehet, so bleibet BDE = FGC. Nun ist BDE ein Quadrat, weil man DE der BD gleich gemacht, und man kan vor BDE schreiben BGq. Weil aber auch FG = BC, so ist FGC = BC × GC, und demnach BGq = BC × GC, das ist, das Quadrat der Linie BG ist dem geradewinklichten Vierecke, dessen Seiten sind BC × GC gleich. Folgends ist die Seite des Quadrats die mittlere Proportionallinie zwischen den Seiten des Viereckes, IX, 61, und also BC: BG = BG: GC, wie zu erweisen war.

§. 115. Man kan merken, daß hier KD = KH + HB drey Helften der Seite BC betrage: denn HK ist der Seite BC gleich, und HB ist die Helfte derselben. Es ist aber KD allezeit KH + HB. Sonst haben wir bey diesem Schnitte nichts zu erinnern nöthig: denn man siehet vor sich leicht, welche Linien aus der Figur weg bleiben können, ohne daß dadurch die Verzeichnung derselben, und die Erfindung des Gesuchten, ohnmöglich werde.



Zehen-

Zehender Abschnitt.

Von der Lage gerader Linien und Flächen, in Ansehung anderer Flächen.

§. 1.

Bisher haben wir immer die Flächen als gegebene angenommen, und alle gerade und krumme Linien, welche wir betrachtet, wie auch alle Figuren in dergleichen Flächen beschrieben. Wir müssen nunmehro auch solche Linien betrachten, welche ausser einer gegebenen Fläche gezogen sind, und uns die Lage dieser Linien, in Ansehung der Fläche, und die Eigenschaften, welche daraus folgen, nach und nach bekannt machen. Wir müssen verschiedene Flächen bald auf diese bald auf jene Art an einander legen, und uns Begriffe davon machen, was aus dieser oder jener Lage, in Ansehung der Flächen selbst, oder in Ansehung der Linien, welche in denselben gezogen sind, folge. Diese Betrachtung ist an sich nützlich, ja unentbehrlich; es kan aber auch ohne derselben nichts von den Cörpern erwiesen werden, deren Betrachtung uns noch vorstehet. Sie ist an sich leicht, ja eine der leichtesten, welche wir gehabt haben, wenn man sich nur die Mühe giebet, die ersten Begriffe von diesen Dingen genau aus einander zu setzen.

§. 2. Die einzige Schwierigkeit dabey ist, daß man diese Begriffe durch Figuren nicht so vollkommen ausdrucken kan, als bisher geschehen ist, da die Figur dasjenige meist vollkommen vorstellen konte, so in dem Begrif enthalten war. Denn die Figuren werden auf einer Ebene verzeichnet, und sollen doch Linien und Oberflächen vorstellen, welche nicht alle in einer Ebene sind. Man kan aber diese Schwierigkeiten heben, wenn man im Anfang Papiere auf verschiedene Arten zusammen setzet, welche die Flächen vorstellen, die wir betrachten. Die geraden Linien aber, welche bey denselben liegen sollen, durch straf gezogene Faden oder steiffe und gerade Stücke Drats, anzeiget. Man wird wohl thun, wenn man, der Einbildungs-Kraft zu Hülfe zu kommen, an statt der Figuren, welche ohnmöglich alles so wohl und deutlich vorstellen können, zuweilen solche Blätter und sol-

X. Abschnitt. che steiffe Stifte zur Hand nimmet, und vermittelst derselben sich die Dinge vorstellet, welche das Augenmerk der nechstfolgenden Betrachtung seyn werden. Doch ist es nicht allezeit nöthig, und die Einbildung gewöhnet sich gar bald auch an die blosse Figuren.

Wie zwo Flächen einander schneiden.

§. 3. Daß wir uns nun gleich Anfangs dieser Beyhülfe bedienen, so nehme man ein Stück Papieres von was Figur man will, und suche es dergestalt zusammen zu faltzen, daß die zwey Theile desselben F. 265. ABC, ABD zwo verschiedene ebene Flächen werden, und sich folgends nirgends krümmen. Man wird dieses nicht anders thun können, als wenn der Faltz AB, welcher das Blatt nunmehro in zwo verschiedene Flächen ABC und ABD zerschneidet, eine gerade Linie AB wird. Dieses kan man als eine Erfahrung annehmen, welche an sich dasjenige zeiget, so wir zuerst von zwo Flächen betrachten werden, welche wir aber hier bloß zu dem Ende anführen, damit wir einen desto deutlicheren Begrif von solchen Flächen, die einander schneiden, beybringen können.

§. 4. Man kan eine jede Fläche so weit ausdehnen als man will, eben wie dieses auch mit einer geraden Linie angehet; allein, da die gerade Linie sich nur nach einer Strecke verlängern läst, so kan man eine Fläche so wohl in die Länge als in die Breite weiter ausdehnen. Die Natur der Fläche erfordert es, daß, wenn man sie dergestalt vergrössert, man sie nach geraden Linien weiter und weiter ausstrecke, sonst bliebe sie nicht eine ebene Fläche. Ausser dem aber wird man bey dieser Ausdehnung von nichts eingeschränket, IV, 34. Aus dieser Ursach stellen wir uns hier, da wir bloß auf die Lage Acht haben, die Oberflächen ohne einige Gränzen der Länge und der Breite vor, eben wie wir uns die geraden Linien ohne Gränzen vorgestellet, als wir bloß von ihrer Lage handelten, IV, 40. Wir konten uns den Begrif einer Linie, welche auf einer andern perpendicular stehet, machen, ohne auf die Grösse dieser Linien Acht zu haben; ja wir musten uns denselben so machen, weil die verschiedene Grösse in dieser Lage nichts ändert. Eben so wenig aber ändert auch die Grösse in der Lage der Flächen etwas, und darf also bey derselben in keine Betrachtung gezogen werden. Wir stellen uns demnach hier alle Flächen, als ohne Anfang und Ende, vor, ob man sie zwar nicht anders zeichnen kan, als von allen Seiten eingeschlossene Figuren, eben wie man keine gerade Linien

nien zeichnen kan, welche nicht ihren Anfang und Ende hätten. Meistentheils stellet man die Ebenen hier durch Vierecke vor: aber dieses geschiehet bloß deswegen, weil diese Figur vor andern geschickt ist, die Lage der Flächen deutlich vorzubilden.

X. Abschnitt.

§. 5. Wenn wir dieses auf die zwo Flächen, welche wir uns eben als die zwey Theile eines gefalzten Blatt Papieres vorgestellet, anwenden, und die Flächen A B C, A B D durch A B in E und F fortführen, so entstehen zwo Flächen, welche einander in A B schneiden, C E und D F. Dergleichen Flächen haben wir zuerst zu betrachten. Man siehet vor allen Dingen leicht, daß der Schnitt A B ganz keine Breite haben könne, und dieses ist daraus klar, weil die Flächen selbst keine Dicke haben, sondern bloß in die Länge und Breite ausgedehnet sind. Daraus folget, daß, wenn man die Fläche C E von C anfänget, und gegen die F D nach und nach vergrössert, sie sich der Fläche F D beständig nähere, bis sie diese bey A B in einem oder mehreren Puncten erreichet; und daß, wenn dieses geschehen, und man die Fläche C E von den Puncten an, in welchen sie die Fläche D F erreichet, weiter fort nach unten zu gegen E ausdehnet, sie die Fläche D F bey denselben Puncten so gleich wieder verlasse. Wäre dieses nicht, so müste die Fläche C E eine Weile in der Dicke der Fläche D F fortgehen können, welches aber ohnmöglich ist, weil die Fläche D F keine Dicke hat.

F. 266.

§. 6. Dieses deutlicher einzusehen, darf man sich nur vorstellen, welchergestalt eine Fläche einen Cörper schneidet. Der Cörper sey A B, und die Fläche, welche ihn schneidet C D. Man stelle sich vor, daß man diese Fläche nach und nach von C an gegen den Cörper A B ausdehne. So bald sie nun den Cörper in E F erreichet, so bald fänget sie an, denselben zu schneiden; aber indem man sie noch weiter herunter führet, bleibet sie immer an dem Cörper, und fähret fort denselben zu schneiden, bis sie in G H kommet, da sie den Cörper wieder verlässet. Es wird demnach der Schnitt E F G H von einer desto grösseren Breite, je dicker der Cörper A B ist. Denn ist der Cörper sehr dünne, wie zum Exempel ein Blatt des feinesten Papieres, so ist der Schnitt schon kaum so breit, daß man diese Breite bemerken könte. Und weil der Schnitt bey noch dünneren Cörpern auch immer schmäler und schmäler wird, so siehet man, daß, wenn die Dicke gar verschwindet, das ist, wenn man sich an die Stelle des Cörpers eine Oberfläche vorstellet, auch die Breite des Schnittes gar verschwinden, und der

F. 267.

Schnitt

X. Abschnitt. Schnitt zu einer Länge ohne Breite, oder zu einer Linie, werden müsse.

F. 266. §. 7. Indem die Fläche CE die Fläche DF schneidet, so schneidet auch hinwiederum die Fläche DF die Fläche CE, und der Schnitt AB ist beyden Flächen gemeinschaftlich, daß demnach, da CE die DF in einer Linie schneidet, auch hinwiederum DF die CE in einer Linie schneiden muß; und zwar in eben derselben AB, in welcher sie selbst geschnitten wird.

§. 8. Man siehet leicht, daß, was wir eben erwogen, auch von gekrümten oder unebenen Oberflächen richtig sey, welche nemlich nach einer oder mehreren Seiten nach krummen Linien ausgedehnet sind; und daß überhaupt alle Oberflächen, sie mögen eben oder uneben seyn, wenn sie einander schneiden, einander in einer Linie schneiden. Man kan durch eine geringe Arbeit der Einbildungs-Kraft, diesen Satz bis dahin erweitern, insonderheit wenn man ihr mit gebeugeten Papieren etwas zu Hülfe kommet, und dadurch die Oberflächen, welche einander schneiden sollen, sich vorstellet. Was ferner gesaget werden soll, ist bloß von den ebenen Flächen zu verstehen, welche wir bis anhero unter dem einfachen Worte einer Fläche verstanden haben wollen. Man nehme sich nur in Acht, die ebenen und geradelinichten Flächen nicht mit einander zu verwirren, und lese auf allem Fall lieber dasjenige nach, so von dem Gebrauche dieser Wörter gleich im Anfange der Geometrie IV, 37. gesaget worden ist.

§. 9. Die ebene Flächen schneiden einander nur in einer Linie, und niemals in mehreren. Man kan sich die Sache wieder mit zusammen gefaltzeten Papiere vorstellen: Es können die zwey Theile eines zusammen gefaltzeten Blattes CB, BD einander, ausser der AB, ohnmöglich noch einmal schneiden, so lange sie eben bleiben und man sie nicht beuget: Ja sie können nicht einmal in einem Puncte zusammen kommen, welches ausser dem ebengedachten Schnitte oder Faltze AB gelegen wäre; es müste denn seyn, daß man dieselbe ganz auf einander legen wolte. Und dieses letztere kan man auch geometrisch von allen Flächen zeigen, zu welchem Ende wir den Satz dergestalt abfassen: Wenn zwo Flächen einander schneiden, so ist nicht möglich, daß ausser der Linie, in welcher sie einander schneiden, sie einiges anderes Punct gemeinschaftlich haben solten. Darunter wird das erstgesagete nothwendig begriffen. Denn haben zwo Flächen ausser ihren gemeinschaftlichem

F. 268.

lichem Schnitte nicht einmal ein Punct gemeinschaftlich, so haben sie noch viel weniger eine Linie gemeinschaftlich, als in welcher unendlich viele gemeinschaftliche Puncte anzugeben wären: Es ist aber ein jeder Schnitt nothwendig den beiden einander schneidenden Flächen gemeinschaftlich.

§. 10. Es wird sich aber diese an sich nicht schwere Sache folgendergestalt einsehen lassen. Es seyen ABC, ABD zwo Flächen, welche die Linie AB gemeinschaftlich haben, in welcher sie zusammen laufen, und einander schneiden würden, wenn man sie nach der Seite AB weiter ausstreckete. Es wird gesaget, daß ausser dieser AB diese zwo Flächen kein einziges Punct gemeinschaftlich haben. Wil jemand dieses leugnen, so muß er ein Punct ausser BC angeben, welches beiden Flächen gemeinschaftlich seyn soll: Gesetzet, dieses sey das Punct E, so kan man folgendergestalt zeigen, daß weder dieses E, noch ein anderes Punct, die angegebene Beschaffenheit haben könne. Man erwehle in AB ein Punct F wo man wil. Dieses ist den beiden Flächen ABC, ABD gemeinschaftlich. Man ziehe die gerade Linie FE in der Fläche ABC, und in der Fläche ABD ziehe man die gerade Linie FGE, beides lässet sich thun, IV, 35. Sind nun die Flächen von einander verschieden, so können auch die Linien FE und FGE nicht in eines zusammen fallen, sondern sie müssen zwischen F und E als bey G, von einander entfernet seyn, und es sind also zwischen den zwey Puncten F und E zwey verschiedene gerade Linien gezogen. Wir wissen, daß dieses ohnmöglich seyn könne, IV, 26: also kan auch das Punct E nicht beiden Flächen ABC, ABD gemeinschaftlich seyn, oder die Flächen, welche in der Linie AB zusammen stossen, können ohnmöglich einander noch in einem anderen Puncte E antreffen.

F. 268.

§. 11. Wir wissen also, daß zwo Flächen einander in einer Linie AB schneiden können, und ausser derselben sonst nirgends: oder daß, nachdem sie einander dergestalt geschnitten, sie einander hernach ausser dieser Linie AB nicht mehr erreichen können, man mag sie vergrössern wie man wil. Aber was ist diese AB vor eine Linie? ist sie gerade oder ist sie krum? Ist es möglich, daß zwo ebene Flächen einander nach einer krummen Linie schneiden können, oder schneiden sie einander immer in einer geraden Linie? Die Erfahrung, welche wir gleich Anfangs X, 3. zur Erleuterung angegeben haben, das ist, ein Stück gefaltetes Papier, würde uns die Antwort leicht an die Hand geben,

Sss wenn

X. Abschnitt. wenn es erlaubet wäre, geometrische Beweise auf blosse Erfahrungen zu gründen. Es ist aber auch aus dem, was wir bereits von dem Schnitte der Flächen wissen, leicht einzusehen, daß die Linie A B, in welcher zwo Flächen einander schneiden, allezeit gerade sey.

F. 266. §. 12. Denn man mag die Linie A B, in welcher zwo Flächen einander schneiden, sich im Anfange vorstellen wie man will, so kan man doch in derselben zwey Puncte A und B annehmen, welche beiden einander schneidenden Flächen gemeinschaftlich sind. Denn da die ganze Linie A B in beyden schneidenden Flächen zugleich lieget, so kan es allerdinges mit diesen zwey gemeinschaftlichen Puncten keine Schwierigkeit haben. Hat man nun diese beyde Puncte nach Belieben angenommen, so stelle man sich vor, daß man sie vermittelst einer geraden Linie zusammen gezogen. Diese gerade Linie zwischen A, B muß so wohl in die eine CE, als in die andere D F, der einander schneidenden Flächen fallen. Denn die Puncte A und B sind so wohl in der einen als in der andern dieser Flächen CE, DF. Die gerade Linie aber, welche zwey Puncte einer Fläche zusammen hänget, fället allezeit in eben dieselbige Fläche, sonst wäre die Fläche keine Fläche, weil eben daraus erkant wird, daß sie eine Fläche sey, wenn man zwischen jeden zwey Puncten derselben eine gerade Linie ziehen kan, welche ganz in dieselbe fället. IV, 35. Ist nun also die gerade Linie zwischen A und B in den beyden einander schneidenden Flächen C E, D F zugleich, so schliesset man ferner folgender gestalt: Ausser der Linie AB, in welcher zwo Flächen einander schneiden, ist keine andere zu ziehen, welche in beyden Flächen zugleich wäre; die gerade Linie zwischen A und B ist in beyden Flächen C E, D F zugleich, derowegen ist diese gerade Linie zwischen A und B selbst die Linie A B, in welcher die Flächen einander schneiden, und es schneiden also zwo Flächen einander allezeit nach einer geraden Linie, sie mögen im übrigen gebildet seyn, wie sie wollen.

§. 13. Wenn man die Flächen, welche einander schneiden gehörig vergrössert, so wird auch die gerade Linie A B, in welcher sie einander schneiden, verlängert, ja man kan, indem man diese Schneidungslinie AB verlängert, so gleich alle übrige Puncte angeben, welche die Flächen CE, FD die einander schneiden, gemeinschaftlich haben werden, wenn man sie gehörig vergrössert. Denn kein einziges Punct, welches beyden Flächen gemeinschaftlich ist, fället ausser dieser also verlängerten Schneidungslinie A B.

§. 14. Man siehet leicht, daß man ohnmöglich zwey Puncte A, B an-

angeben könne, durch welche man nicht eben so wohl eine Flä- che DB legen könte, als man zwischen dieselbe eine gerade Linie ziehen kan, welche gerade Linie allezeit in die Fläche BD fället, die man durch die zwey Puncte A, B geleget. Allein da man durch zwey Puncte nur eine gerade Linie AB ziehen kan, so kan man im Gegentheile durch dieselbe so viele Flächen BD, BC legen als man wil, welche einander alle in der geraden Linie AB schneiden werden: oder man kan BC um AB nach Belieben drehen. Eine Thür in ihren Angeln giebet ein deutliches Exempel davon, oder auch ein zusammen gefaltzetes Papier. Jene kan man um ihre Angel nach Belieben auf und zu schlagen, und dieses lässet sich um seinen Falz ebenfals mehr oder weniger von einander beugen, wie man wil.

X. Abschnitt. F. 265.

Wie die Lage einer Fläche bestimmet wird.

§. 15. Setzet man nun daß in einer Fläche ABC, zwey Puncte A und B, und die gerade Linie AB, feste sind, und beständig an ihrem Orte liegen bleiben, wie die zwey Angeln an einer Thür, und daß man die Fläche um diese Puncte, und folgends um die gerade Linie AB, welche man durch sie beyde gezogen hat, so lange herum drehe, bis sie ein anderes Punct D erreichet, welches ausser der geraden Linie AB lieget: so höret alle Bewegung dieser Fläche so bald auf, als sie dieses Punct erreichet hat, wenn man nemlich setzet, daß sie das Punct D nicht wieder verlassen, sondern beständig durch dasselbe hindurch gehen sol. Denn so bald man die Fläche noch weiter um AB drehen wolte, würde sie das Punct D wieder verlassen. Es ist wieder eben so, wie mit einer Thür, welche man um ihre Angel so lange drehet, bis sie an ein festes Punct anstösset. Man kan sie so dann nicht zugleich weiter fort bewegen, und doch noch beständig durch dieses feste Punct durchgehen lassen. Man mag also drey Puncte nehmen wo man wil, in einer geraden Linie oder ausser derselben, so kan man jederzeit eine Fläche durch dieselbe legen; aber, wenn diese drey Puncte nicht in einer geraden Linie sind, so wird die Lage der Fläche durch dieselben Puncte bestimmet, und es kan durch drey Puncte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, nicht mehr als eine einzige Fläche geleget werden, eben als wie durch zwey Puncte nicht mehr als eine gerade Linie gezogen werden kan.

F. 269.

§. 16. Nun stelle man sich vor, die drey gegebenen Puncte seyn A, B und C, welche nicht in einer geraden Linie liegen, und lege an dieselbe eine Fläche, so nemlich, daß alle drey Puncte A, B, C in diese Fläche fallen; so dann ziehe man durch zwey dieser Puncte die gerade

F. 270.

X. Abschnitt.

Linie AB, welche man nach Belieben verlängern kan. Dieselbe fället ganz in eben die Fläche, welche durch A, B und C gehet, und kan nicht aus derselben fallen, weil sonst die Fläche nicht überall nach geraden Linien ausgedehnet wäre, wenn sie jemals von der AB abwiche. Eben so ist es mit der geraden Linie CB, welche die vorige in B schneidet, sie fället ganz in eben die Fläche, welche wir betrachten, die nemlich gleich Anfanges an A, B, C geleget worden ist, und man muß also sagen, daß wenn zwo gerade Linien AB, CB einander schneiden, man allezeit eine Fläche so legen könne, daß diese gerade Linien, man mag sie verlängern wie man wil, ganz in dieselbe fallen: oder daß man allezeit sich eine ebene Fläche vorstellen könne, welche durch diese Linien hindurch gehet.

§. 17. Ziehet man noch die dritte Linie AC, nachdem man das vorige gelassen, wie es war, so kommet diese Linie AC in eben die Fläche zu liegen, in welcher die Puncte A, B, C liegen, und liegen demnach die drey Seiten der Figur ABC zusammen in einer Fläche, und so ist es mit allen dreyseitigen Figuren. Denn man kan allezeit durch die drey Spitzen ihrer Winkel eine Fläche legen, in welche so dann ihre Seiten nothwendig fallen. Oder man mag drey Puncte A, B, C, nehmen wie man wil, und dieselben mit den geraden Linien AB, BC, CA zusammen hängen, so bekommet man allezeit ein Dreyeck, wie es im Anfange IV, 83. erkläret, und bisher betrachtet worden ist, nemlich eine ebene Figur, welche von drey geraden Linien beschlossen wird.

§. 18. Mit den Vierecken ist es schon nicht nothwendig so; noch weniger mit dem Fünfeck, und den übrigen vieleckigten Figuren; das ist, wenn man vier Puncte A, B, C, D nach Belieben leget, wie man wil, und sie vermittelst der geraden Linien AB, BC, CD, DA zusammen hänget, so wird die Figur ABCD nicht nothwendig eben, und man erhält also dadurch nicht allezeit solche Vierecke, als wir im vorigen betrachtet haben: und eben so ist es mit allen Vielecken beschaffen. Wir wollen bey den Vierecken stehen bleiben, weil deren Betrachtung die vorige etwas erläutern kan. Wenn ABCD ein Viereck ist, dessen Seiten man mit Fleiß alle in eine Ebene geleget hat; und man ziehet eine Queerlinie BD, so kan man hernach die Figur nach BD falzen, und das Dreyeck BAD gegen BCD neigen wie man wil, als, bis in aBD, da denn die Dreyecke aBD, BDC zwo verschiedene Flächen

F. 271.

ab-

abgeben werden, welche einander nach BD berühren, aber keinesweges eine ebene Figur, dergleichen ABCD war. Man schneide sich ein Viereck von Papier aus, und falze dasselbe, wie angewiesen worden ist, so siehet man die Sache deutlich.

X. Abschnitt.

§. 19. Das Parallelogrammum machet hier eine Ausnahme: nicht als ob nicht ein Viereck von dieser Art sich eben so falzen und beugen liesse, wie wir eben gewiesen haben: sondern weil es aufhöret ein Parallelogrammum zu seyn, so bald man es beuget. Denn dadurch höret nothwendig der Parallelstand der entgegen gesetzeten Seiten auf, weil, nach dem ersten Begriffe, die Parallellinien nothwendig in einer Fläche liegen müssen, IV, 78. und wenn sie nicht so liegen, keine Parallellinien können genennet werden. Es sind nemlich die Parallellinien diejenigen, welche nicht zusammen laufen, man mag sie verlängern, wie man wil, aber das ist nicht genug. Nicht alle gerade Linien, welche, wenn man sie verlängert, einander nicht erreichen, sind parallel. Dieses thun zwo Linien, deren eine man auf dem Tisch von Abend gegen Morgen, die andere aber auf dem Boden des Zimmers von Mittag nach Mitternacht gezogen hat, ebenfals nicht: sie sind aber deswegen nicht parallel, und die von Parallellinien erwiesene Eigenschaften können ihnen keinesweges zukommen. Wir haben allezeit, indem wir dieselbe Eigenschaften erwiesen, zugleich vor Augen gehabt, daß die Linien, welchen wir parallel genennet, in eben der Fläche liegen.

F. 272.

§. 20. Ist nun also ABCD ein Parallelogrammum, so liegen die Seiten AD und BC in einer Fläche, und, weil die äussersten Puncte der Seiten AB und DC in eben der Fläche liegen, indem sie in die erst angezeigete Parallellinien AD, BC fallen; so kan es nicht anders seyn, es müssen auch diese Linien AB, DC ganz in eben der Fläche liegen, welche durch die Parallellinien AD, BC gehet. Denn eine Linie fället niemals in eine andere Fläche, als in diejenige, in welche zwey Puncte derselben fallen. Man könte diesen Satz mehr allgemein machen, und sagen, wenn zwo einander entgegen gesetzete Seiten eines Viereckes, wie hier AD, BC in einer Fläche liegen, so liegen alle Seiten desselben Vierecks in eben der Fläche. Der Beweiß ist mit dem, welchen wir eben gegeben haben, einerley: allein diese Betrachtung ist von keinem sonderlichen Nutzen.

X. Abschnitt.

Gerade Linien, so einer Fläche parallel lauffen.

§. 21. Dieses sind die Grundsätze der gegenwärtigen Abhandlung, und wir können nunmehro zu demjenigen übergehen, was wir hauptsächlich zu betrachten haben. Wir machen den Anfang mit solchen geraden Linien, welche einer gegebenen Fläche parallel gezogen werden. Man saget aber, daß eine gerade Linie einer Fläche parallel laufe, wenn sie die Fläche niemals erreichet, man mag sie verlängern und die Fläche vergrössern wie man wil. Mehr wird zu dieser parallelen Lage nicht erfordert.

§. 22. Und man kan sich nachfolgende Anweisung vorstellen, eine gerade Linie nicht allein mit einer Fläche, sondern auch mit einer in derselben gegebenen geraden Linie parallel zu ziehen. Denn es muß auch diese letztere gegeben seyn, oder wenn sie nicht angegeben wäre, so müste man sie nach Belieben annehmen, weil, wie leicht einzusehen ist, gar verschiedene Linien mit jeder gegebenen Fläche parallel können gezogen werden, nach andern und andern strecken. Ja es muß auch drittens das Punct, durch welches die Parallellinie sol gezogen werden, entweder zugleich bestimmet seyn, oder doch nach Belieben genommen werden. Hat man dieses alles, und ist die Fläche, welcher die Linie parallel laufen sol AB; die Linie aber in dieser Fläche, welcher die zu ziehende Linie parallel seyn sol, CD, und E das Punct ausser der Fläche AB, durch welches die Parallellinie zu ziehen ist: so lege man an CD eine neue Fläche, die zugleich durch das gegebene Punct E gehet, welche Fläche ED vorstellet, und ziehe in dieser Fläche, wie Anfangs IV, 173. gewiesen worden ist, die EF mit der CD parallel. Diese ist auch der Fläche AB parallel.

F. 273.

§. 23. Man siehet, daß zu dem Beweise, daß EF mit der Ebene AB parallel sey, nichts erfordert werde, als daß man zeige, daß EF die Fläche AB niemals erreichen werde, und dieses kan man ohne Schwierigkeit einsehen. Weil EF mit der CD parallel läuft, so kan EF mit der CD niemals zusammen kommen. Nun schneiden die Flächen AB und ED einander in CD: also kan EF niemals in den Schnitt dieser beyden Flächen kommen. Und wenn also EF die Fläche AB jemals erreichen solte, so müste dieses ausser diesem Schnitte CD geschehen. Man siehet aber leicht, daß dieses ohnmöglich ist. Denn weil die Linie EF beständig in der Fläche ED bleibet, und mit dieser in einem fortgehet: so muß da, wo die Linie EF die Fläche AB errei-

erreichet, auch selbst die Fläche ED die eben genante AB erreichen. Es ist aber nicht möglich, daß ED mit der AB ausser der CD ein gemeinschaftliches Punct haben solte; X, 9. also kan auch ED die Fläche AB nicht ausser der CD erreichen: die Linie EF erreichet also die Fläche AB weder in der CD noch ausser der CD, das ist, nirgends.

X. Abschnitt.

§. 24. Wir wollen diesen Satz zum Behufe des Gedächtnisses kürzer also fassen: Wenn man mit einer Linie CD, so in einer Fläche AB gegeben ist, ausser dieser Fläche eine Parallellinie EF ziehet; so ist diese Linie EF auch selbst der Fläche AB parallel. Selbst hieraus könte man das nächstfolgende ohne weitern Umschweif einsehen: wir wollen es aber grösserer Deutlichkeit halber besonders beweisen. Wir setzen, daß man die EF mit der Fläche AB parallel gezogen, und so dann an EF eine andere Fläche geleget habe, welche die erstere AB in CD schneidet, und sagen erstlich, daß EF mit der CD parallel sey. Dieses ist gar leicht erwiesen. Denn weil EF mit der Fläche AB parallel lieget, so kan sie mit der Fläche AB nicht zusammen laufen, und also auch nicht mit der Linie CD. Denn wenn EF die Linie CD erreichte, so erreichte sie nothwendig auch die Fläche AB, weil die Linie CD ganz in der AB lieget. Es liegen also in der Fläche ED zwo Linien EF und CD, welche nicht zusammen laufen. Dieses ist der Begrif von zwo Linien die einander parallel liegen, IV, 78. demnach ist die Linie EF der Linie CD parallel.

F. 274.

§. 25. Ferner setzen wir, daß nachdem alles noch eben so gemachet worden, wie wir gewiesen haben, nachdem man nemlich EF mit der Fläche AB parallel gezogen, und an EF die Fläche ED geleget, welche die AB in CD schneidet, man noch eine andere Fläche EH ebenfals an die EF gelreget habe, welche die Fläche AB in GH schneidet: und sagen zum zweyten, daß dieser Schnitt GH mit dem vorigen CD parallel laufe. Auch dieses ist aus eben den Gründen einzusehen, welche wir eben gebrauchet haben. Wir haben gesehen, daß CD mit EF parallel sey, und weil GH eben so entstanden ist, wie CD, so ist eben dieses auch von der HG zu sagen. Also kommet weder die eine noch die andere dieser zwo Linien CD, GH jemals mit der EF zusammen, wie weit man sie auch verlängern mag. Und hieraus schliessen wir ferner, daß sie einander auch selbst nicht erreichen können. Wir haben erst X, 24. gezeiget, wie dieses heraus zu bringen sey, und erachten also nicht nöthig, es so gleich zu wiederholen, zumalen es als etwas sehr gemeines angesehen werden kan, daß zwo gerade Linien CD, GH

X. Abschnitt.

so in zwo einander in EF schneidenden Flächen ED, EH dergestalt gezogen sind, daß sie den Schnitt EF niemals erreichen, auch einander selbst nicht erreichen können. Es haben demnach die zwo Linien CD, HG das erste Kennzeichen der Parallellinien, daß sie nemlich einander niemals erreichen. Das andere ist sichtlich. Sie liegen beyde in der Fläche AB. Also sind diese Linien CD, HG nothwendig einander parallel.

§. 26. Nunmehro kehre man die Sache um, und sehe sie von einer anderen Seite an. Man setze, daß man zuerst die Linie CD in der Fläche AB nach Belieben gezogen, so dann an CD die Fläche ED geleget, und in derselben die Linie EF der CD parallel gemacht habe, welche EF dadurch auch der Fläche AB parallel worden. Ferner setze man, daß man auch in der Ebene AB die Linie GH der vorigen CD parallel gemacht, und daß, nachdem dieses alles geschehen, man an EF die Fläche EH dergestalt geleget habe, daß sie durch das Punct G gehet: so wird diese Fläche EH die AB in keiner andern Linie als in der GH schneiden. Denn der Schnitt, wo man sich denselben auch vorstellen mag, ist, wie gezeiget worden, X, 25. mit der CD parallel; und weil man die Fläche EH an G geleget hat: so gehet diese der CD parallel laufende Linie durch G. Dieses aber thut die im Anfang gezogene GH und keine andere. IV, 184. Also ist der Schnitt selbst die GH, oder, die Fläche EH schneidet die Fläche AB in keiner andern Linie, die durch G ginge, als in derjenigen die durch G der CD parallel läuft.

§. 27. Wir hätten vielleicht dem Leser überlassen können, gegenwärtiges aus dem, so eben vorher gegangen ist, zu schliessen. Aber wir haben uns ein allgemeines Gesetz gemachet, lieber etwas Umschweife zu machen, als die geringeste Schwierigkeit, so zu heben möglich ist, zurück zu lassen. Indessen siehet man, daß hierinnen nachfolgender Satz lieget: Wenn man einer Linie CD eine andere GH in einer gewissen Fläche AB parallel ziehet, und ziehet der ersten CD noch eine andere EF in einer andern Fläche DE parallel, so ist diese letztere EF auch der GH parallel. Dieser Satz sage ich lieget in den vorigen. Denn wenn man, wie wir gethan, nachdem wir gezeiget, daß es allezeit geschehen könne, die Fläche EH an EF dergestalt leget, daß sie die AB in GH schneide; so ist aus dem gesageten X, 25. klar, daß EF mit der GH parallel seyn müsse. Man kan diesen Satz auch kürzer so ausdrücken: Zwo gerade Linien EF und GH welche beyde einer drit-

dritten CD parallel laufen, sind selbst parallel, ob sie zwar in zwo verschiedenen Flächen liegen: und man hat nicht nöthig zu erwehnen daß CD und GH in einer Fläche AB liegen müssen, und EF und CD wieder nur in einer ED, weil dieses in dem ersten Begriffe der Parallellinien enthalten ist.

§. 28. Nun können wir weiter, und zu einer andern Betrachtung übergehen, welche ebenfals Parallellinien zum Augenmerke hat, die nicht alle in einer Fläche liegen. Man ziehe zwo gerade Linien AB, CB nach Belieben, doch so, daß sie einander in B berühren, und einen Winkel ABC machen. Es liegen diese Linien beyde in einer Ebene, welche durch die drey Puncte A, B, C kan geleget werden. X, 16. Ausser dieser Ebene ziehe man mit der AB die Linie ab, und mit der BC die Linie bc parallel, welche Linien ebenfals in einem Puncte b zusammen laufen, und einen Winkel abc machen werden. Denn es laufet die Fläche in welcher die zwo Linien AB, ab liegen, mit derjenigen, in welcher die andern zwo CB, cb liegen, nothwendig zusammen, und schneiden einander, wie man leicht siehet. Es kan erwiesen werden, daß diese zween Winkel ABC, abc gleich seyn: ja man siehet dieses fast von selbst. Wenn sie nicht gleich sind, welcher ist der grössere? Gleich wie ab der AB parallel gezogen worden, so ist auch AB der ab parallel; und wiederum ist BC der bc nicht weniger parallel, als bc der BC, was hat also der eine Winkel vor dem anderen vor einen Vorzug?

F. 275.

§. 29. Doch wir haben uns niemals an dergleichen Beweisen begnügen lassen, welche noch immer einige Undeutlichkeit bey sich haben, und wir müssen auch hier ganz anders verfahren, wenn wir die Sache zu einer vollkommenen Gewisheit bringen wollen; es ist dieses nicht schwer. Man mache die ab welche der AB parallel ist, auch derselben gleich, und ziehe die gerade Linien Aa, Bb, dadurch erhält man ein Parallelogrammum ABba, als welches jederzeit beschrieben wird, wenn man die äussersten Puucte A, a, wie auch B, b zwoer gleichen Parallellinien AB, ab mit geraden Linien Aa, Bb zusammen ziehet. IV, 210. Es ist demnach wie in einem jeden Parallelogrammum Aa der Bb gleich und parallel. Eben dieses mache man auch mit CB und cb, man mache sie einander gleich, und ziehe ihre äussersten Puncte C, c mit der geraden Linie Cc zusammen, denn Bb hat man nicht nöthig zu ziehen, weil sie bereits gezogen ist. Das Viereck CBbc ist wieder ein Parallelogrammum, weil die erst angezogene Gründe auch hier

X. Abschnitt.

statt finden. Demnach ist auch Cc der Bb gleich und parallel. Das ist, die beyden Linien Aa, Cc sind der Linie Bb gleich, und eben diese zwo Linien sind auch beyde der Linie Bb parallel. Aus dem ersten folget, daß sie auch einander gleich seyn, und aus dem zweyten daß sie auch einander parallel laufen. X, 27. Ziehet man nun also diese gleiche Parallellinien Aa und Cc wieder, vermittelst der geraden Linien AC und ac, zusammen, damit man das Viereck AacC erlange: so ist dieses Viereck wieder ein Parallelogrammum, und demnach AC der ac gleich. Da nun also AB = ab, BC = bc, und CA = ca, das ist, da in den Dreyecken ABC, abc, alle Seiten gleich sind, so sind auch die Winkel ABC und abc, welche zwischen gleichen Seiten liegen, einander gleich, welches zu erweisen war.

Gerade Linien, so auf einer Fläche perpendicular stehen.

§. 30. Und dieses war dasjenige so wir von den Parallellinien, welche nicht in einer Fläche liegen, zu bemerken hatten. Wir gehen zu solchen geraden Linien über, welche auf den Flächen gerade, oder perpendicular stehen. Man saget aber, daß eine gerade Linie AB auf einer Fläche CD gerade oder perpendicular stehe, wenn sie mit allen geraden Linien BE, BF, BG rechte Winkel machet, die man in der Fläche CD durch das Punct B ziehen kan, in welchem sie die Fläche berühret. Oder, das Kennzeichen, ob eine gerade Linie AB auf einer Fläche perpendicular stehe oder nicht, ist dieses. Man bemerket das Punct B, in welchem die gerade Linie AB die Fläche berühret, und ziehet durch dasselbe gerade Linien BE, BF, BG nach allen Seiten. Ist nun AB auf diese Linien alle perpendicular keine ausgenommen, oder sind die Winkel ABE, ABF, ABG, und alle übrige die man dergestalt bekommet, alle gerade, so muß man sagen daß AB auf die Fläche CD perpendicular sey: sonst, wenn einer oder der andere dieser Winkel nicht gerade wäre, stünde die Linie AB schief auf der Fläche CD.

F. 276.

§. 31. Es wäre in der Anwendung zu weitläuftig alle diese Winkel zu erforschen, und zu untersuchen ob sie gerade sind oder nicht. Man hat aber dieses nicht nöthig. Ein viel leichteres Kennzeichen, daß eine Linie auf einer Fläche perpendicular stehet, lieget in nachfolgendem Satze, welchen wir erweisen müssen: Wenn eine gerade Linie AB eine Fläche CD in B erreichet, und mit zwo geraden Linien BE und BF welche in dieser Fläche durch das Punct B nach Belieben gezogen sind, rechte

rechte Winkel machet ABF nemlich = ABE = R: so ist die Linie AB auch auf alle übrige gerade Linien, welche man in eben der Fläche CD durch B ziehen kan, perpendicular, und folgends auch auf die Fläche selbst. Daß man also, diesem zu Folge, nur zu untersuchen hat, ob die zween Winkel ABE, ABF gerade sind oder nicht, wenn man wissen wil, ob AB auf die Fläche perpendicular sey, und nicht nöthig hat, sich um alle übrige Linien zu bekümmern, weil AB auf dieselbe, wenn nur der Satz richtig ist, nothwendig perpendicular seyn muß, wenn die Winkel ABE, ABF gerade sind.

X. Abschnitt.

§. 32. Die Richtigkeit aber dieses Satzes kan man auf nachfolgende Art einsehen. AB ist so wohl auf BE als auf BF perpendicular. Dieses wird zum Grunde gesetzet. Man verlängere diese Linien beyde durch B, bis Be = BE, und Bf = BF, und ziehe die gerade Linien fe, FE. Die Dreyecke BEF, Bef werden dadurch gleich und ähnlich. Denn es sind so wohl ihre Winkel EBF, eBf gleich, als auch die Seiten, welche sie einschliessen; also sind IV, 112. ihre dritten Seiten EF, ef, wie auch die Winkel E, e, und F, f einander ebenfals gleich. Nun ziehe man von einem in der AB nach Belieben angenommenen Puncte A eine gerade Linie nach F, und eine andere nach f, so bekommet man zwey Dreyecke ABF, ABf, welche bey B rechtwinklicht sind, und zwo gleiche Seiten haben, nemlich Bf = BF, und BA = BA. Es sind also in diesen Dreyecken auch die übrigen Seiten gleich, AF = Af. Und ziehet man ferner auch die geraden Linien AE, Ae, so werden diese Linien einander ebenfals gleich, aus eben den Gründen die wir eben gehabt haben. Denn es ist ABE = ABe = R, und Be = BE, AB = AB. Wenn man sich also nunmehro die zwey Dreyecke Afe, AFE vorstellet, so siehet man, daß sie gleich und ähnlich seyn. Denn alle Seiten des einen, sind allen Seiten des andern gleich, fe = FE, Af = AF, und AE = Ae, welches alles erwiesen worden ist. Ja man könte dasselbe auch ohne weitläuftigem Beweise bloß daraus einsehen, weil bey Verfertigung dieser Dreyecke AEF, und Aef man alles auf einer Seite eben so gemachet hat, wie auf der andern. Dieses alles ist demnach nothwendig richtig, so bald man setzet, daß AB auf die beyden geraden Linien BE, BF zugleich perpendicular sey. Nun ist zu zeigen, daß hieraus fliesse, daß eben diese AB auch auf einer jeden anderen geraden Linie, welche in der Fläche CD durch B gezogen werden kan, perpendicular stehe. Man ziehe eine Linie nach Belieben durch B, nemlich gG, so sich beyderseits in den Linien FE, fe endiget. Man

F. 277.

 siehet

X. Abschnitt. siehet leicht, daß die Theile derselben BG und Bg einander gleich fallen müssen. Und solte es nicht so gleich einzusehen seyn, so kan man durch folgende Betrachtung sich davon überführen.

§. 33. Die Winkel gBe und GBE sind einander gleich, weil sie durch den Schnitt zwoer geraden Linien entstanden sind. IV, 70. Die Winkel GEB und geB sind Winkel der Dreyecke FEB, feB, von welchen wir gleich Anfangs gesehen, daß sie gleich sind, und die Seiten EB, eB sind einander mit Fleisse gleich gemachet worden; Derowegen sind die Dreyecke gBe, GBE, in welchen zween Winkel und eine Seite einander gleich sind, selbst gleich und ähnlich: IV, 120. es ist also, wie wir zeigen solten, gB = GB, aber auch ge = GE, welches aus eben diesen fliesset, und so gleich wird gebrauchet werden. Nemlich, man ziehe nunmehro die geraden Linien AG und Ag, so haben die zwey Dreyecke AEG und Aeg erstlich die Seite AE gleich der Seite Ae, zum zweyten die Seite EG gleich der Seite eg, und zum dritten den Winkel AEG gleich dem Winkel Aeg, als welches Winkel sind in den Dreyecken AEF, Aef, von welchen wir gesehen, daß sie einander gleich sind. Und hieraus folget, IV, 112. daß in den Dreyecken AEG, Aeg, auch die Seiten AG, Ag einander gleich sind. Und dieses kan man wieder leicht vor sich einsehen, wenn man nur betrachtet, daß um die Linie Ag zu ziehen, man auf der einen Seite vollkommen so verfahren, und alles eben so gemacht habe, wie man auf der andern Seite verfahren, die Linie AG zu erhalten, und daß also gar kein Grund sey, warum die eine AG grösser oder kleiner seyn solte, als die andere Ag.

§. 34. Ist nun also Ag = AG, wie auch gB = GB, welches wir vorhero gesehen, so sind, weil AB die dritte Seite in den Dreyecken ABG und ABg abgiebet, diese Dreyecke gleich und ähnlich; also sind auch die Winkel derselben bey B, nemlich ABG und ABg einander gleich, als welche in diesen Dreyecken zwischen gleichen Seiten liegen. Es fället demnach die gerade Linie AB auf Gg, welche man in der Ebene CD gezogen dergestalt, daß sie mit derselben bey B zween gleiche Winkel machet. Also ist, nach den ersten Begriffen, AB auf Gg perpendicular, welches von dieser Linie zu erweisen war. Und weil man diese Linie Gg legen konte wie man wolte, so siehet man leicht, daß eben dieser Beweiß zeige, daß eben die AB auf alle Linien, die in der Fläche CD durch B können gezogen werden, perpendicular sey. AB ist auf Gg perpendicular, welche man in der Fläche CD durch B ziehen

hen kan, wie man wil. Was heisset dieses anders als AB ist auf eine jede gerade Linie perpendicular, die man in der Fläche CD durch B ziehen kan?

X. Abschnitt.

35. Dieser Beweiß ist etwas lang, wegen der vielen Drevecke, deren eines man nach dem andern zu betrachten hat, aber im übrigen gar nicht schwer, weil er sich bloß auf die ersten und leichtesten Sätze gründet, welche nunmehro, nachdem sie so oft angewandt werden, ganz natürlich seyn müssen; und in der That gewöhnet man sich endlich dergleichen Beweise, so zu reden, in einem Blicke zu übersehen. Dieses ist dasjenige, so wir zuerst zu bemerken haben. Die Sache selbst aber noch deutlicher zu machen, und sie dem Gedächtnisse einzuprägen, wollen wir ein Werkzeug beschreiben, mit welchem auf einmal eine Perpendicularlinie auf eine jede gegebene Fläche zu setzen ist. Denn ein gemeiner Winkelhacken ist dazu etwas unbequem. Man muß zwey Winkelhacken ABC, ABD, bey welchen nemlich ABC, ABD gerade Winkel sind, so zusammen setzen, daß ihre Schärfen AB in eines zusammen fallen, die anderen Seiten aber aus einander gehen, und einen Winckel DBC machen, der so groß seyn kan als man wil, doch mache man ihn lieber etwas groß als klein. Wenn man nun dieses Instrument dergestalt auf eine Fläche setzet, daß die Schärfen BD, BC beide in dieselbe fallen, so ist AB auf diese Fläche perpendicular, weil AB so wohl auf der BD als auch auf der BC perpendicular stehet, und diese Linien in der Ebene liegen, auf welche man die Perpendicularlinie setzen sollen.

F. 278.

§. 36. Man siehet hieraus, daß, wenn ein Punct in einer Ebene gegeben ist, man durch dasselbe nicht mehr als eine gerade Linie ziehen könne, welche auf derselben Ebene perpendicular stehe. Denn hat man durch das Punct B, so in der Ebene CD lieget, die Perpendicularlinie AB gezogen, wie allezeit geschehen kan: und man wil durch B noch eine andere gerade Linie BE ziehen, welche von der AB verschieden sey, so muß sie mit der AB bey B nothwendig einen Winkel machen, und sich demnach auf der einen oder der andern Seite nach der Ebene CD mehr neigen, als die Perpendicularlinie AB: Woraus folget, daß die Winkel, welche BE mit den geraden Linien machet, die in der Ebene CD durch B gezogen werden können, ohnmöglich alle gerade seyn können. Man lege durch die beiden Linien AB, BE, die Fläche AF, welche die vorige CD in BF schneidet: wenn nun so wohl AB als EB auf der CD perpendicular stehen, so sind die Winkel

F. 279.

X. Abschnitt. ABF und EBF, welche beide in der Fläche AF liegen, beide gerade, und folgends einander gleich, welches widersinnisch ist.

F. 280. §. 37. Auf eben die Art siehet man, daß sich die Ebene CD nicht an dem Puncte B auf diese oder jene Seite neigen lasse, ohne daß so gleich AB aufhöre auf dieselbe perpendicular zu seyn, oder daß, wenn AB auf CD perpendicular stehet, keine andere Fläche EF durch B könne geleget werden, auf welcher eben diese AB perpendicular stünde. Denn weil die Winkel, welche AB mit allen geraden Linien machet, die in der Fläche CD durch B gezogen sind, gerade sind X, 30. so ist es nicht möglich, daß auch die Winkel, welche eben die AB mit allen Linien einschliesset, die in der Fläche EF durch B gehen, gerade seyn solten. Man lege durch AB die Fläche AG, welche die CD in BG und die EF in BH, schneidet: Wäre nun AB so wohl auf CD als auch auf EF perpendicular; so müsten die Winkel ABH, ABG beide gerade seyn, welches ohnmöglich ist, weil diese Winkel beide in der Ebene AG liegen IV, 55.

F. 281. §. 38. Es kan aber auch durch ein jedes Punct A ausser der Fläche CD nur eine einzige Perpendicularlinie AB auf die Fläche CD gezogen werden. Denn wenn man setzen wolte, daß durch eben das Punct A noch eine andere Perpendicularlinie auf CD könne gezogen werden als AE; so müste folgen, daß ein Dreyeck zween gerade Winkel haben könne. Denn ziehet man BE in der Ebene CD; so ist der Winkel ABE, welchen die Perpendicularlinie AB mit der BE machet, nothwendig gerade. Wäre nun AE auch auf CD perpendicular, so wäre der Winkel AEB auch gerade, und es hätte also das Dreyeck ABE zween gerade Winkel B und E, welches nicht seyn kan IV, 214.

F. 276. §. 39. Wir können nunmehro den Satz, welchen wir bisher betrachtet, verkehren; und sagen: wenn man in einer geraden Linie AB das Punct B nach Belieben annimmet, und durch B drey oder mehrere Linien BE, BF, BG ziehet, welche alle auf der AB perpendicular stehen, und mit derselben die rechten Winkel ABE, ABF, ABG einschliessen; so werden diese Linien BE, BF, BG alle in die Ebene CD fallen, welche durch das Punct B dergestalt geleget werden kan, daß AB auf derselben perpendicular stehe. Wir müssen bey diesem Satze erst ein und anderes anmerken, ehe wir ihn beweisen. Da wir nemlich gesaget, es sollen BE, BF, BG alle durch das Punct B gehen, und doch auf die AB perpendicular seyn; so kan dieses nicht so verstan-

den-

den werden, als ob diese Perpendicularlinien BE, BF, BG alle mit der AB in einerley Ebene liegen solten. In diesem Verstande ist die Sache ohnmöglich. Denn wir haben IV, 55. gewiesen und eben wiederholet, daß in einer gegebenen Ebene nur eine gerade Linie auf einer andern perpendicular stehen könne, wenn zugleich das Punct bestimmet ist, durch welches sie gehen sol. Wenn man sich aber durch AB verschiedene Flächen geleget vorstellet, so kan in einer jeden derselben eine Linie auf die AB perpendicular gezogen werden, welche durch B gehet, und dieses ist der einzige Verstand, welchen der Satz leidet. Ferner aber ist nicht nöthig zu beweisen, daß zwo dieser Perpendicularlinien BE, BF in einer Ebene liegen werden, auf welche AB perpendicular stehet. Denn dieses siehet man aus dem X, 16. gewiesenen gar leicht. Weil BE, BF in dem Puncte B zusammen lauffen, so kan allerdings durch dieselbe eine Ebene CD geleget werden, und auf dieser Ebene muß AB perpendicular stehen, weil sie auf den zwo Linien BE, BF in der Ebene CD perpendicular stehet X, 31. Das einzige also, so zu beweisen übrig ist, ist, daß auch die dritte Perpendicularlinie BG in eben die Ebene CD fallen werde. Allein, wenn dieses nicht wäre, so könte man doch auch durch BF und BG eine Ebene legen, auf welcher AB perpendicular stehen würde X, 31. Wäre nun diese Ebene von der CD, die durch EBF gehet, verschieden, so stünde die AB auf zwo verschiedenen Ebenen, welche beide durch B gehen perpendicular. Dieses ist nicht möglich X, 37. also kan die Ebene durch FBG von der Ebene CD nicht verschieden seyn, sondern GB fället in eben die Ebene CD, welche durch EBF gehet. Und eben so ist es mit der vierten, fünften und allen übrigen Linien, welche man durch B auf AB perpendicular ziehen kan.

X. Abschnitt.

§. 40. Wenn AB auf der Ebene CD perpendicular stehet, und man beschreibet um das Punct B, auf welchem sie stehet, einen Cirkelkreis EFG; so ist ein jedes Punct der Perpendicularlinie A von allen Puncten des Umkreises EFG gleich weit entfernet. Denn wenn man in dem Umkreise die beiden Puncte E und F nach Belieben annimmet, und an dieselbe die Halbmesser BE, BF ziehet, und ferner AE und AF, so haben die zwey Dreyecke ABE, ABF, deren Winkel bey B gerade sind, zwo gleiche Seiten AB = AB und BE = BF. Also sind auch ihre übrigen Seiten gleich, AE nemlich = AF. Diese Seiten AE und AF aber sind die Entfernungen des Punctes A von den Puncten E und F des Umkreises.

F. 282.

§. 41.

X. Abschnitt.

§. 41. Dieses war dasjenige, so wir von den Lagen der geraden Linien gegen eine Fläche, welche insonderheit zu betrachten nöthig sind, zu bemerken hatten. Nun können wir die Lagen der Flächen gegen einander selbst einsehen, welche Erkänntniß aber uns wieder auf verschiedenes, so wir von den Lagen der geraden Linien gegen einander, und gegen die Flächen, an welchen sie liegen, noch nicht deutlich übersehen können, zurück führen wird.

Neigung einer Fläche gegen eine andere.

§. 42. Zwo Flächen, welche einander in einer geraden Linie schneiden, haben eine gewisse Neigung gegen einander. Die Flächen sind ABC und CBD, die gerade Linie, in welcher sie einander schneiden ist BC. Diese **Neigung**, welche die Flächen gegen einander haben, welche man auch den **Winkel** nennet, welchen sie einschliessen, wird dergestalt ausgedrücket. Man ziehet in der einen dieser Flächen EF auf CB perpendicular, und in der andern FG ebenfals auf CB perpendicular, und zwar so, daß diese Perpendicularlinien in dem Puncte F zusammen stossen, und einen Winkel EFG machen: dieser ist der Winkel, durch welchen man die Neigung der Flächen AB, BD gegen einander ausdrücket, und man hält EFG vor eben den Winkel, welchen die Flächen mit einander machen.

F. 283.

§. 43. Man hätte diese Linien EF, FG auch anders ziehen können, zum Exempel so, daß die Winkel EFC, GFC die Helften von geraden Winkeln, oder etwas dergleichen geworden wären, um hernach aus der Grösse des Winkels EFG die Grösse der Neigung, welche die Flächen AB, BD gegen einander haben, auszudrücken. Alleine man siehet leicht, daß dieses Weitläuftigkeiten verursachet haben würde, welche in der Geometrie mehr, als in einiger anderen Wissenschaft, zu vermeiden ist, da hingegen diejenige Art die Grösse der Winkel, welche die Flächen mit einander einschliessen, durch den Winkel der Perpendicularlinie EFG zu messen, welche wir erkläret haben, und die von allen angenommen wird, ganz natürlich ist.

§. 44. Dieses siehet man hieben leicht ein, daß es einerley sey, wo man die Perpendicularlinien EF, FG ziehet, und daß die Grösse des Winkels nicht anders wäre gefunden worden, wenn man an statt der EF, FG die Linien ef, fg auf BC perpendicular gezogen hätte. Denn weil EF, ef beide in der Ebene AB auf die BC perpendicular sind, so sind sie einander parallel, und aus eben der Ursache ist auch

fg

fg der FG parallel. Da nun aber Parallellinien, wenn sie, wie hier EF und FG, wie auch ef und fg, zusammen lauffen, jederzeit gleiche Winkel einschliessen X, 28. so sind auch die Winkel EFG und efg einander gleich. Es ist also eines, welchen von den Winkeln EFG oder efg man nehme, den Winkel, welchen die Flächen AB, BD mit einander einschliessen, auszudrucken.

X. Abschnitt.

§. 45. Machen zwo Flächen einen geraden Winkel mit einander, oder, ist der Winkel EFG, welchem die Neigung der Fläche ABC gegen die Fläche CBD gleich ist, ein gerader Winkel: so stehet die erstere Fläche auf der andern gerade oder perpendicular. Dieses ist die Redensart, womit der eben erwehnete Stand einer dieser Flächen an der andern ausgedrucket wird. Die 284 Zeichmung zeiget diesen Stand der Flächen, so gut es sich thun lässet, an: die Fläche AB ist auf die Fläche BD perpendicular, und der Winkel EFG ist gerade.

§. 46. Es ist in diesem Falle, wenn AB auf der BD gerade stehet, eine gerade Linie, welche wie EF in der einen Fläche AB auf die Schneidungslinie BC perpendicular gezogen wird, nicht nur auf FG perpendicular, welche in der Ebene BD auf BC perpendicular gezogen worden ist, sondern auch auf eine jede andere gerade Linie, welche man in der Fläche BD nach dem Puncte F ziehen kan. Denn daß EF auf die GF perpendicular sey, siehet man daraus, weil, wenn dieses nicht wäre, die Fläche AB auf der Fläche BD nicht gerade stehen würde, wie doch angenommen wird. Es ist demnach EF auf zwo Linien FC und FG, welche beide in der Fläche BD liegen perpendicular, folgends ist sie auch selbst auf die Fläche BD perpendicular X, 31. und machet also mit allen geraden Linien, welche in dieser Fläche durch das Punct F gezogen werden können, gerade Winkel.

F. 284.

§. 47. Man siehet auch, daß wenn eine gerade Linie EF auf der Fläche BD perpendicular stehet, und man leget durch diese Linie EF eine Fläche AB, wie man im übrigen wil; diese Fläche AB auch gewiß auf die Fläche BD perpendicular zu stehen kommen werde. Denn wenn wieder BC die gerade Linie ist, in welcher die beiden Flächen einander schneiden; so ist EF auf FC perpendicular, weil FC in der Fläche BD lieget, und EF auf allen geraden Linien perpendicular stehet, welche in dieser Fläche BD durch das Punct F gezogen werden können. Aus eben der Ursache ist auch EF auf FG perpendicular,

 wel-

X. Abschnitt. welche man in eben der Fläche BD auf BC perpendicular gezogen, sich vorstellet: es ist demnach der Winkel EFG, welchen die zwo geraden Linien EF, FG einschliessen, die auf der Schneidungslinie CB perpendicular stehen, gerade, folgends ist AB auf CD perpendicular X, 45.

F. 285. §. 48. Wiederum, wenn die Fläche AB auf der BD perpendicular stehet, und man wil durch ein Punct des Durchschnittes der beiden Flächen CB, als F, eine gerade Linie auf BD perpendicular setzen: so kan diese Linie ohnmöglich ausser der Fläche AB fallen. Denn, wie wir X, 46. gesehen, so kan in der Fläche AB durch F eine gerade Linie EF gezogen werden, welche auf der Fläche BD perpendicular stehet. Wenn nun auch eine Perpendicularlinie auf BD möglich wäre, welche ebenfals durch F gienge, aber nicht in die Fläche AB fiele, FG zum Exempel, so giengen durch F zwo gerade Linien, welche beide auf BD perpendicular stünden, nemlich die EF, welche in der Fläche AB gezogen worden ist, und die FG, von welcher man annimmet, daß sie nicht in dieselbe Fläche AB falle. Wir haben aber X, 36. gesehen, daß es ohnmöglich sey, daß durch ein Punct F zwo gerade Linien EF, GF gehen, welche beide auf einer Fläche BD perpendicular stehen: also kan die beschriebene Perpendicularlinie nicht ausser der Perpendicularfläche AB fallen.

§. 49. Nichts ist leichter, als hieraus ferner zu schliessen, daß wenn man zwo Flächen dergestalt aufrichtet, daß sie beide auf einer dritten Fläche perpendicular stehen, und einander in einer geraden Linie schneiden, diese gerade Linie auch selbst auf die Fläche, auf welcher jene perpendicular stehen, perpendicular seyn werde. Zwo Wände unserer Zimmer, welche mit einander einen Winkel machen, stehen auf dem Boden perpendicular, oder sollen doch wenigstens so stehen. Ist aber dieses, so ist auch die gerade Linie, in welcher sie einander berühren, auf den Boden perpendicular. Eben so ist es mit den beiden

F. 286. Flächen AB und CD welche beide auf der Fläche EF perpendicular stehen, und einander in der geraden Linie GH durchschneiden. Diese gerade Linie GH ist auf die Fläche EF perpendicular. Man siehet es dergestalt ein. Man stelle sich vor, daß man durch H eine gerade Linie ziehen sol, welche auf EF perpendicular stehe. Weil H in der Fläche CD angenommen worden, so muß diese Perpendicularlinie in die Fläche CD fallen, wie wir eben gesehen. Es ist aber eben das Punct H auch in der Perpendicularfläche AB; also wird die Perpendicu-

dicularlinie auch in diese Fläche AB fallen müssen, folgends ist dieselbe den beyden Flächen AB und CD gemeinschaftlich. Nun aber haben die zwo Flächen AB und CD keine andere Linie gemeinschaftlich, als die gerade Linie GH, in welcher sie einander schneiden: X, 9. demnach ist selbst diese Linie die Perpendicularlinie, welche auf die Fläche EF durch das Punct H kan gezogen werden.

X. Abschnitt.

§. 50. Wir haben bey dieser Materie von den Flächen und Linien, die auf einer andern Fläche perpendicular stehen, nur noch ein paar Sätze übrig. Wenn eine gerade Linie AB auf einer Fläche CD perpendicular stehet, und man hat mit dieser Linie AB eine andere EF parallel gezogen, so stehet auch diese auf der Ebene CD perpendicular. Denn weil die Linien AB, EF einander parallel laufen, so liegen sie nothwendig in einer Ebene: oder, man kan eine Fläche so legen, daß sie durch die beyden Linien AB und EF gehe. Wir setzen dieses sey geschehen, und die Fläche, welche durch unsere Parallellinien gehet, sey ABFE, welche die Fläche CD in BF schneidet. So ist diese Fläche auf die CD perpendicular, weil sie durch die Perpendicularlinie AB gehet. X, 47. Es ist auch der Winkel ABF gerade, weil BF in der Fläche CD durch das Punct B gehet, und AB auf die Fläche CD perpendicular ist. Nun aber sind jederzeit die zween Winkel zwischen zwo Parallellinien, die von einer dritten geschnitten werden, zween geraden Winkeln gleich, IV, 189. und diese Bewandniß muß es auch mit den beyden geraden Linien AB und EF haben, welche von der BF geschnitten werden. Da nun aber der Winkel B selbst ein gerader Winkel ist, so muß auch der bey F ein gerader Winkel seyn. Demnach ist die Linie EF in der Fläche AF, welche auf der Fläche CD perpendicular stehet, dergestalt gezogen, daß sie mit dem Durchschnitte der beyden Flächen BF einen geraden Winkel machet. Es ist also EF selbst auf die Fläche CD perpendicular, wie dieses von allen auf die Art gezogenen Linien erwiesen worden ist. X, 46.

F. 287.

§. 51. Und wenn die geraden Linien AB, EF beyde auf einer Fläche CD perpendicular stehen, so sind sie parallel. Dieses ist der eben erwiesene Satz verkehrt gesetzet, und man kan ihn also vermittelst desselben ziemlich leicht einsehen. Wäre nemlich die EF, die so wohl als AB auf der Ebene CD perpendicular stehet, dieser AB nicht parallel, so könte man durch das Punct F eine andere Linie ziehen, welche der AB parallel wäre. Es sey diese Linie FG, so muß FG, vermöge des eben erwiesenen Satzes, auf CD perpendicular stehen. Da nun aber gesetzet wird, es stehe auch EF auf CD perpendicular;

F. 288.

X. Abschnitt. so gehen durch das Punct F zwo gerade Linien FE, FG, welche beyde auf die Fläche CD perpendicular sind. Dieses ist ohnmöglich; X, 36. also ist die von der FE verschiedene Linie FG nicht der AB parallel, und weil man doch durch F eine Linie ziehen kan, welche der AB parallel ist, so muß die Perpendicularlinie EF selbst dieselbe seyn: welches zu erweisen war.

Flächen, deren eine der anderen parallel lieget.

§. 52. Nun sind noch die Parallelflächen zu betrachten übrig. Diese liegen dergestalt, daß sie nicht zusammen laufen, man mag sie vergrössern wie man wil, und nach welcher Seite man wil. Es ist nicht nöthig, daß die Seiten der Flächen parallel liegen, wenn sie welche haben. Denn man siehet bey der Lage der Flächen niemals auf die Seiten derselben. Und derowegen hindert es nicht, wenn eine der Flächen die Figur eines Cirkels, und die andere die Figur eines Viereckes hat. Es kan der Cirkel dem Vierecke doch parallel seyn, ob man sich zwar nicht einmal vorstellen kan, auf was Art ein Theil des Umkreises des Cirkels einer Seite des Vierecks parallel laufen solle. Wenn man die Fläche des Cirkels so wohl als die Fläche des Viereckes fortführen kan, wie man wil, ohne daß die eine die andere erreichet, so ist der Cirkel dem Vierecke parallel. Auf die Art ist die Oberfläche eines jeden Tischblattes, es mag dasselbe eckicht oder rund seyn, dem Boden des Zimmers, wie auch seiner Decke, parallel, oder solte es wenigstens seyn.

F. 289. §. 53. Eines der Kennzeichen nun, daß zwo Flächen AB und CD einander parallel liegen, ist, wenn die gerade Linie EF, welche auf einer derselben CD perpendicular stehet, auch auf die andere AB perpendicular fället. Oder, wenn auf die Fläche CD eine gerade Linie EF, wo man wil, perpendicular aufgerichtet ist, und eine andere Fläche AB ist dergestalt geleget, daß eben die gerade Linie EF auch auf AB perpendicular stehet; so ist die letztere Fläche AB der ersteren CD parallel. Es ist dieses leicht einzusehen. Man lege durch EF eine Fläche GH, welche auf beyden der gegebenen Flächen AB, CD perpendicular stehen wird, weil die EF, durch welche man sie geleget hat, auf beyden der eben genannten Flächen AB, CD perpendicular stehet. X, 47. Wir setzen diese Fläche GH schneide die eine der beyden Parallelflächen in GI und die andere in KH, so sind diese Linien beyde auf EF perpendicular, denn sie liegen in den Flächen AB, CD, auf welchen EF perpendicular stehet, und gehen durch die Puncte E und

und F. Stehen aber diese beyde Linien auf EF perpendicular, so sind sie einander parallel und laufen nicht zusammen. IV, 82. Und man siehet leicht, daß wenn man die Fläche GH versetzet, man wieder andere Schneidungslinien bekomme, wie GI und KH waren, welche einander parallel laufen und niemals zusammen kommen; ja man siehet, daß von den Puncten E und F aus, nach allen Seiten dergleichen Linien liegen. Erreichen aber diese Linien, welche dergestalt von E und F aus, in den Ebenen A*B* und CD nach allen Seiten fortlauffen, und deren zwo jederzeit in einer gemeinschaftlichen Ebene GH befindlich sind, einander niemals, so können auch die Flächen einander niemals erreichen, man mag sie nach dieser oder jener Seite vergrössern, wie man wil. Folgends liegen die Flächen A*B*, CD einander parallel.

X. Abschnitt.

§. 54. Wäre EF auf die Fläche CD perpendicular und folgends der Winkel EFK gerade, GEF aber wäre nicht gerade, sondern spitzig; so würden die Linien FK, EG gewiß zusammen laufen, und mit ihnen auch die Flächen in welchen sie liegen CD und A*B*. IV, 212. Wenn also die EF welche auf CD perpendicular stehet, nicht zugleich auf die A*B* perpendicular ist, so laufen die Flächen A*B*, CD gewiß irgendwo zusammen, und sind nicht parallel. Denn, wenn die gerade Linie EF, welche auf der Fläche CD perpendicular stehet, nicht zugleich auf A*B* perpendicular ist, so muß sie nothwendig mit verschiedenen der geraden Linien, die in dieser Fläche A*B* durch E gezogen werden können einen spitzigen Winkel machen. Derowegen kan mit der Fläche CD durch das gegebene Punct E keine andere Fläche parallel geleget werden als die einzige A*B*. Denn wenn man aus E die Perpendicularlinie EF auf CD fallen lässet, so kan man durch E nur eine einzige Fläche A*B* legen, auf welche EF perpendicular ist. X, 37. Diese A*B* also ist der CD parallel, und keine andere.

§. 55. Und wenn zwo Flächen A*B*, CD parallel liegen, und man ziehet zwischen denselben wo man wil eine Linie EF, welche auf einer der Parallelflächen CD perpendicular stehet, so muß sie auch auf die andere A*B* perpendicular seyn. Denn wäre dieses nicht, so wären die Flächen nicht parallel, sondern liefen irgendwo zusammen.

§. 56. Hieraus siehet man so gleich, daß zwo Flächen A und *B* die einer dritten C parallel sind, auch einander selbst parallel seyn müssen. Denn wenn man auf C eine Perpendicularlinie setzet, und verlängert sie gehörig, so muß sie so wohl auf *B*, als auf A perpendicular stehen, sonst wäre entweder A oder *B* der C nicht parallel. Ist

F. 290.

 aber

X. Abschnitt. aber eine gerade Linie so wohl auf A als auf B perpendicular, so sind die Flächen A und B einander parallel. X, 53.

F. 291. §. 57. Ein anderes Kennzeichen der Parallelflächen ist, wenn dieselbe wie AB, CD dergestalt liegen, daß in der einen AB zwo gerade Linien EF und FG gezogen werden können, welche in einem Puncte F zusammen laufen, und in der andern CD zwo andere HI, IK welche ebenfals in einem Puncte I zusammen laufen, und den vorigen parallel sind, HI nemlich der FG und IK der EF. Ist dieses, so sind die Flächen AB, CD parallel. Oder anders, wenn zwo gerade Linien EF und IK parallel liegen, und dieselben zwo andere FG und HI berühren, welche einander ebenfals parallel sind: so sind die Flächen AB und CD, welche durch jede zwo der Linien gehen, die einander dergestalt berühren, parallel.

§. 58. Auch hievon hat der Beweiß nicht viel Schwierigkeit. Wir wollen auf unseren ersten Satz zurück gehen, und zeigen, daß bey den gesetzeten Bedingungen eine gerade Linie gezogen werden könne, welche so wohl auf die eine als auf die andere der zwo Flächen AB, CD perpendicular sey; welches folgendergestalt einzusehen ist. Man stelle sich vor, daß aus dem Puncte F die Linie Fi auf CD falle, welche auf die Fläche AB perpendicular ist, und folgends mit den beyden Linien EF und FG gerade Winkel machet. Hat nun diese Fi die Fläche CD in i erreichet, so ziehe man durch i in der Fläche CD die Linie ik mit der IK und ih mit der IH parallel. Weil nun also ik der IK parallel lieget, aber auch gleich Anfangs angenommen worden, daß auch EF der IK parallel sey: das ist, weil beyde gerade Linien ik EF der IK parallel laufen, so ist auch EF der ik parallel. Denn dieses ist von solchen Linien X, 27. überhaupt gezeiget worden. Und da also die Parallellinien EF und ik von der geraden Linie Fi geschnitten werden, und EFi ein gerader Winkel ist, so ist auch der Winkel Fik gerade. IV, 189. Eben dieser Beweiß findet auch bey den Linien FG und ih statt. Sie sind beyde der Linie HI, und folgends einander, parallel. Der Winkel GFi ist gerade, folgends auch der Winkel Fih. Es stehet demnach die gerade Linie Fi auf den beyden Linien ik und ih, welche in der Ebene CD liegen, perpendicular. Sie ist also auch auf diese Ebene CD selbst perpendicular, und weil man sie gleich Anfangs auf die Fläche AB perpendicular gesetzet hat, so ist sie auf beyden Flächen AB und CD perpendicular. Demnach sind die beyden Flächen AB, CD auf welchen die einzige Linie Fi perpendicular stehet, einander parallel. X, 53.

§. 59. Sind

X. Abschnitt.

§. 59. Sind nun nach diesen Gründen zwo Flächen AB und CD einander parallel geleget worden, und es schneidet sie beyde eine dritte Fläche EF, in den geraden Linien GH und Ik; so sind diese Schnitte einander parallel. Dieses kan ohne Schwierigkeit eingesehen werden. Die Kennzeichen der Parallellinien sind, daß sie in einer Fläche liegen, und doch niemals zusammen laufen, wie man sie auch verlängere. Beyde Kennzeichen haben die Schnitte GH und IK. Sie liegen beyde in der Ebene EF: und daß sie nicht zusammen laufsen, siehet man daher, weil sie auch in den Ebenen AB und CD liegen, welche zusammen laufen müsten, wenn die Linien GH und IK zusammen laufen solten. Das letztere gehet nicht an, weil die Flächen AB und CD parallel sind, also können auch die Linien GH, IK nicht zusammen laufen.

F. 292.

§. 60. Es erhellet hieraus so gleich, daß wenn man zwischen zwo Parallelflächen AB, CD zwo gerade Linien GI, HK einander parallel leget; diese Linien, GI, HK auch einander gleich seyn werden. Denn man lege durch diese Parallellinien die Fläche EF, wie allezeit geschehen kan, und schneide vermittelst derselben die Parallelflächen AB, CD in GH und IK: So sind diese Schnitte, GH, IK einander parallel. Da man also gesetzet, es sey auch GI der HK parallel, so ist das Viereck GK ein Parallelogrammum, und es sind in demselben die einander entgegen gesetzeten Seiten gleich GI=HK, welches wir erweisen solten. Man siehet aber zugleich, daß auch GH der IK gleich sey.

§. 61. Ferner ist aus eben dem Satze nachfolgendes zu schliessen: wenn zwo Flächen AB, CD einander in BC schneiden, und man schneidet sie nochmals durch zwo andere Flächen EFG und HIK, die einander parallel laufen, in FE, FG, und HI, IK: so sind die Winkel EFG, und HIK einander gleich. Denn weil die Fläche AB die beyden Parallelflächen EFG, HIK in EF und HI schneidet, so sind die Schnitte EF, HI parallel: und weil eben die Parallelflächen EFG, HIK auch von der Fläche CD geschnitten werden, so sind auch die Schnitte FG und IK parallel; und werden demnach die Winkel EFG und HIK von solchen Linien eingeschlossen, deren zwo und zwo einander parallel liegen: wir haben oben X, 28. gesehen, daß dergleichen Winkel jederzeit einander gleich sind.

F. 293.

§. 62. Noch einen einzigen Satz müssen wir bey dieser Sache zum Behufe des folgenden merken, wie denn diese ganze Betrachtung, wel-

X. Abschnitt. F. 294.

welche wir von den Flächen und ihren Lagen angestellet, hauptsächlich dazu dienen sol, daß wir dasjenige, so von den Cörpern zu sagen seyn wird, deutlicher einsehen können. Wir stellen uns drey Flächen vor, welche einander parallel liegen, AB, CD und EF; An ihrer Entfernung von einander ist nichts gelegen: Die mag so groß oder so klein seyn, als man wil. Wir ziehen zwo gerade Linien GI und KM zwischen den äussersten dieser Flächen AB und EF, welche von der mittleren CD in H und L geschnitten werden. Es ist im übrigen frey diese Linien zu ziehen wie man wil, und wird nicht erfordert, daß sie beyde in einer Fläche liegen. Wenn dieses alles geschehen ist, so sind die Theile der Linien, welche zwischen den Flächen auf einerley Art liegen, einander proportional, und man hat GH:HI=KL:LM.

§. 63. Denn wenn man eine dritte Linie KI von dem obersten Puncte der einen Linie K nach dem untersten Puncte der zwoten I ziehet, und das Punct, in welchem diese dritte Linie KI die mittelste Fläche CD durchstichet, mit N bezeichnet, auch ferner in der obersten Fläche AB die GK ziehet: so liegen X, 17. die drey Seiten des Dreyeckes KGI in einer Ebene, welche die Fläche CD in HN durchschneidet, und die Fläche AB in GK. Weil nun die Flächen AB und CD parallel sind, so sind die Schnitte GK und HN ebenfals parallel, X, 59. und es ist in dem Dreyecke KGI mit der Seite GK die gerade Linie HN parallel gezogen. Es ist demnach die Proportion GH:HI=KN:NI, richtig. Denn man kan bey allen Dreyecken, da man mit der einen Seite derselben eine Parallellinie gezogen, dergestalt schliessen. V, 12. Ziehet man aber auch IM in der Fläche EF, und bemerket die Linie NL, in welcher die Fläche des Dreyeckes KIM die Fläche CD schneidet: so ist bey dem Dreyecke KIM alle dasjenige richtig, so eben von dem Dreyecke GIK gewiesen worden. Demnach haben wir hier KL:LM=KN:NI. Vergleichet man aber diese Proportion mit der vorigen GH:HI=KN:NI, so siehet man, daß in der ersten die Verhältniß GH:HI, und in der zwoten die Verhältniß KL:LM der Verhältniß KN:NI gleich gesetzet wird, welche zwo Verhältnisse demnach einander selbst gleich seyn müssen. Also ist die Proportion GH:HI=KL:LM richtig, und diese ist eben diejenige, welche wir in dem Satze angegeben, und erweisen solten.

Eilfter Abschnitt.

Von den Cörpern und deren Oberflächen.

Allgemeine Begriffe.

§. 1.

Wir sind also nunmehro bis an die Betrachtung solcher Grössen, welche nicht nur in die Länge und Breite, sondern auch in die Tiefe ausgedehnet sind, gekommen. Dergleichen sind alle natürliche Cörper, welche wir vor uns haben. Allein diese Cörper haben ausser der erwehneten Ausdehnung noch eine Menge anderer Eigenschaften, welche ein Naturkündiger zu untersuchen hat, die aber vor die Geometrie nicht gehören. Dergleichen sind das Gewicht der Cörper, ihr Vermögen sich zu bewegen, andere Cörper anzustossen, oder ihnen zu widerstehen, und was dergleichen Dinge mehr sind; bey welchen allen man zwar ebenfals auf die Grösse sehen kan, wie bey der Ausdehnung; und welche deswegen, wie die Linien und Oberflächen, und die Ausdehnung der Cörper selbst, mit einander verglichen werden können. Aber alle diese Eigenschaften gehören hieher nicht, und man betrachtet in der Geometrie einen Cörper nicht weiter, als in so ferne er ein ausgedehnetes Wesen ist. Das übrige alles, so bey demselben vorkommet, wird hier in Gedanken von ihm abgesondert.

§. 2. Die Ausdehnung eines Cörpers ist mit der Ausdehnung des Raumes, welchen er füllet, in allen Stücken einerley, das ist, so wohl in Ansehung der Grösse, als auch in Ansehung der Figur: und der Begrif des einen ist von dem Begriffe des andern nicht verschieden. Eben deswegen, weil der Cörper einen Raum von dieser oder jenen Grösse, und von dieser oder jenen Figur, füllet, schreibet man ihm diese Grösse und diese Figur zu. Er würde grösser seyn, wenn er einen grössern Raum füllete; und eine andere Gestalt haben, wenn er einen Raum von einer andern Figur füllete. Eine Kugel ist deswegen eine Kugel, weil sie einen von allen Seiten gleich gerundeten Raum füllet; und würde keine Kugel seyn, wenn sie einen eckigten Raum einnähme. Allein, da ein Cörper, ausser seiner Ausdehnung und Figur, noch viele

XI. Abschnitt. andere Eigenschaften hat, welche sich nicht auf die blosse Ausdehnung gründen: so begreifen wir bey dem Raume, welchen der Cörper einnimmet, ausser der Ausdehnung und demjenigen, so sich auf derselben unmittelbar gründet, sonst gar nichts. Und wir können also, wie bereits Anfangs erinnert worden, sagen, daß diejenigen Grössen, welche von allen Seiten ausgedehnet sind, und welche wir noch zu betrachten haben, nichts anders seyn, als der Raum, welchen die Cörper einnehmen.

§. 3. Ob wir zwar also uns der gewöhnlichen Redensarten bedienen, und die nach allen Seiten, und also in die Länge, Breite und Tiefe ausgedehnete Grössen, Cörper nennen werden: so wird doch unter dieser Redensart nichts anders, als dieser Raum derselben, zu verstehen seyn. Oder will man ja Cörper nehmen, so wird man auf die blosse Ausdehnung derselben Acht haben, und die übrigen Eigenschaften derselben alle eben so wohl von den Cörpern absondern müssen, als ob sie zu den Cörpern gar nicht gehöreten. Was bleibet aber nach dieser Absonderung übrig, als wieder der blosse Raum, den die Cörper füllen?

§. 4. Alle Cörper sind in Oberflächen eingeschlossen, und diese sind entweder eben oder gekrümmet, IV. 34. Die ebenen Oberflächen sind nach ihrer Figur und Grösse genugsam betrachtet worden: wohl aber wird noch ein und anderes, von der Lage derselben, bey verschiedenen Cörpern, anzumerken seyn. Was aber die gekrümmeten Oberflächen anlanget, so stehet deren Betrachtung uns noch ganz vor: wie auch die Betrachtung einiger Linien, welche in diesen Oberflächen können gezogen werden.

§. 5. Es sind der Cörper selbst unendlich viele, und unter denselben sind die meisten in gekrümmete Oberflächen eingeschlossen. Von noch viel mehreren Arten sind die Linien, welche in diesen Oberflächen können gezogen werden. Wir werden uns hier also gar sehr einschränken müssen, wenn wir unsers Zweckes nicht verfehlen wollen, nur die ersten Anfangsgründe, und unter denselben die nöthigsten und nützlichsten beyzubringen. Dieses wird geschehen, wenn wir auch hier keine andere Oberflächen betrachten, als die sich auf die Beschreibung des Cirkels und der geraden Linie gründen; und keine Cörper als diejenigen, welche in dergleichen Oberflächen eingeschlossen sind. Dadurch werden der Cörper, welche wir zu betrachten haben, sehr wenige; und

wir werden sehen, daß dieselbe, nach ihren Haupteigenschaften, sich alle in drey Classen bringen lassen.

XI. Abschnitt.

§. 6. Wir werden von der Grösse der Cörper anfangen, und zeigen, wie die Cörper von den erwehnten Figuren, welche nach und nach deutlich beschrieben werden sollen, unter allen Umständen und verschiedenen Einschränkungen derselben, mit einander zu vergleichen sind. Der Grundsatz, dessen wir uns dabey bedienen werden, ist eben derjenige, dessen wir uns bey der Vergleichung der ebenen Figuren bedienet haben IX, 4; nur muß derselbe so ausgedrucket werden, daß er sich auch vor die Cörper schicket.

F. 295.

§. 7. Es sind AB und CD zwo ebene Flächen, die einander parallel liegen, und zwischen denselben stehen zween Cörper EF, GH dergestalt, daß sie beide von der Fläche AB bis an die CD reichen, und sich in diesen Flächen mit Puncten, Linien oder ebenen Flächen endigen. Sonst kan man diese Cörper annehmen von was Figur man will, rund oder nach Belieben eckigt. Wir setzen, daß diese Cörper EF und GH beide, vermittelst einer dritten Fläche, zugleich geschnitten worden, welche man den Flächen AB und CD parallel geführet, und daß durch diesen Schnitt in den beiden Cörpern die Figuren IK und LM zum Vorschein gekommen sind. Sind nun diese Figuren IK, LM einander gleich, und ist dieses beständig so, mag man die Cörper mit einer Fläche, die der AB parallel lieget, schneiden wie man will: so sagen wir, es seyen die beiden Cörper EF und GH einander gleich, eben wie wir dieses von den ebenen Figuren, aus eben dergleichen Kennzeichen, geschlossen haben.

§. 8. Es ist hierbey zu bemerken, daß eben nicht erfordert wird, daß die Schnitte IK, LM, oder eigentlicher zu sprechen, die Figuren IK, LM, welche durch den Schnitt hervor kommen, einander auch ähnlich seyn. Wenn sie nur einander gleich sind, so mag die eine rund, die andere eckigt seyn, oder sie mögen sonst einander unähnlich seyn wie sie wollen; die Cörper sind bey den gesetzeten Bedingungen dennoch gleich. Auch wird nicht erfordert, daß alle Schnitte des einen Cörpers EF einander gleich seyn sollen; ja es wird nicht einmal erfordert, daß die verschiedenen Schnitte dieses Cörpers EF einander ähnlich seyn. Die oberen Schnitte dieses Cörpers EF können rund seyn, und die unteren eckigt. Es können die oberen klein seyn, und die unteren groß. Wenn nur ein jeder Schnitt, wie IK, dem Schnitte LM

 gleich

XI. Abschnitt.

gleich ist, welcher LM von der AB oder CD eben so weit als IK absthehet, und so wohl als IK denselben parallel lieget, so sind die Cörper EF und GH einander gleich.

§. 9. Da wir diesen Satz als einen eigentlichen Grundsatz angeben, so ist nicht nöthig, etwas zu dem Beweise desselben anzubringen. Es wäre kein Grundsatz, wenn er Beweiß bedürfte. Zur Erleuterung desselben kan aber alles dasjenige dienen, so wir bey der vorigen Anwendung desselben IX, 6. gesaget haben. Welcher von den beiden Cörpern EF, GH ist der grössere, und welcher ist der kleinere, wenn sie ungleich sind, und worinnen lieget der Grund ihrer Ungleichheit? Wenn man die Entfernung der Fläche AB von der Fläche CD vor die Höhe der Cörper annimmet, wie man allerdings thun kan; so sind diese Cörper in die Höhe oder Tiefe gleich ausgedehnet, weil sie beide von einer dieser ebenen Flächen AB bis an die andere CD reichen. Ihre Ausdehnungen in die Längen und Breiten aber, in einem jeden Abstande von der Fläche AB, messen die Figuren, dergleichen IK und LM sind. Denn diese Ausdehnungen müssen der Fläche AB parallel genommen werden, und die eben erwehneten Figuren IK, LM liegen der AB parallel. Sind nun diese Figuren aller Orten einander gleich, so sind auch die Cörper EF, GH aller Orten in die Längen und Breiten gleich ausgedehnet. Es ist nemlich EF bey IK in die Länge und Breite, oder mit einem Worte, der AB parallel, eben so weit ausgedehnet als GH bey LM nach eben diesen Strecken, oder der AB parallel, ausgedehnet ist, und so ist es überall. Wie kan also einer dieser Cörper EF, GH grösser seyn als der andere?

Erste Art der Cörper.

§. 10. Wir werden diesen Satz am allerleichtesten auf die erste Art unserer Cörper anwenden können, von welchem wir vor allen Dingen nunmehro einen deutlichen Begrif geben müssen. Man beschreibe eine geradelinichte und ebene Figur ABCDE, von wie viel Seiten man wil, gänzlich nach Belieben. An die Spitze eines der Winkel dieser Figur A setze man eine gerade Linie von beliebiger Länge AF, so daß sie nicht in die Ebene falle, in welcher die Figur ABCDE lieget, sondern auf dieser Ebene, nach Belieben, gerade oder schief stehe. Durch B, die Spitze des zwoten Winkels der Figur ABCDE, ziehe man die gerade Linie BG der vorigen AF parallel, und eben dieses mache man bey der Spitze C des dritten Winkels, wie auch bey allen

F. 296. 297.

übri-

übrigen. Diese gerade Linien AF, BG, CH, DI, EK, werden einander alle parallel liegen, weil eine jede derselben der zuerst gezogenen AF parallel lieget, X, 27. Und man kan sich also durch AF, BG eine ebene Fläche vorstellen, wie auch durch BG und CH eine andere, welche mit der vorigen in BG zusammen laufen wird, und durch CH und DI die dritte, welche die zwote in CH schneidet, und so rings herum. Diese Flächen sind oben nicht geschlossen. Denn wir haben die Längen der Linien AF, BG, CH noch nicht bestimmet, und also noch viel weniger die Flächen FABG, GBCH und die übrigen, bey F, G, H geschlossen. Dieses aber nunmehro zu thun, und zugleich den Cörper, welchen wir beschreiben wollen, von allen Seiten einzuschliessen, lege man durch das in der AF nach Belieben angenommene Punct a eine andere ebene Fläche der Figur ABCDE parallel, welche von allen Seiten an die Flächen anstosse, in welchen die Parallellinien AF, BG, wie auch BG, CH und so fort, liegen: so ist der Cörper ABCDEabcd gehörig eingeschränket.

§. 11. Und die Oberflächen, welche ihn einschliessen, sind nachfolgende: Erstlich, die nach Belieben angenommene geradelinichte Figur ABCDE, welche wir die eine Grundfläche nennen wollen, weil sie der ebenen Fläche abcde gleich und ähnlich ist, welche dannenhero mit Recht die zwote Grundfläche kan genennet werden. Daß dieses sey, erhellet folgender massen: Man hat die Ebene abcde der ABCDE parallel geleget, und diese beiden Flächen werden in AB, ab von der Fläche geschnitten, in welcher die Parallellinien AF, BG liegen. Diese Linien also ab, AB liegen einander parallel, X, 59. Weil aber auch Aa, Bb einander parallel liegen, so ist Ab ein Parallelogrammum, und ab der AB gleich, IV, 198. Auf eben die Art erhellet, daß auch bc der BC parallel liege, daß BC ein Parallelogrammum, und bc der BC gleich sey, und eben dieses ist rings herum richtig. Der CD ist die cd parallel und gleich, der DE die de, und der EA die ea. Hieraus aber folget, daß auch der Winkel abc dem Winkel ABC gleich sey, und der Winkel bcd dem Winkel BCD. Denn die Winkel, deren Seiten einander parallel sind, sind allezeit gleich, es mögen diese Seiten übrigens liegen wie sie wollen, X, 28: und aus eben dem Grunde ist bcd = BCD und cde = CDE, und so ferner. Demnach sind die Winkel der Figur abcde den Winkeln der Figur ABCDE gleich, wie sie auf einander folgen; und die Seiten dieser beiden Figuren, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, sind einander

XI. Abschnitt. der ebenfals gleich. Also sind die Figuren gleich und ähnlich. Und aus eben diesem Beweise erhellet, daß die Cörper der ersten Art, ausser den Grundflächen, um und um in Parallelogramme Ab, Bc, Cd &c. eingeschlossen seyn, deren an der Zahl so viele sind, als viele Seiten die Grundfläche ABCDE hat. Diese Parallelogramme heissen die Seiten des Cörpers. Der dergestalt beschriebene Cörper selbst aber wird ein Prisma genennet.

§. 12. Wir haben die Beschreibung dieses ersten Cörpers deswegen etwas weitläuftig gemachet, damit zugleich erhellen möge, daß derselbe möglich sey, welches nicht bey einer jeden Beschreibung so leicht einzusehen ist, sondern öfters erst muß erwiesen werden. Nunmehro können wir ein Prisma kürzer beschreiben, indem wir sagen, ein Prisma sey ein Cörper, welcher von zwo ebenen und geradelinichten Figuren, die einander parallel liegen, ABCDE, abcde, und übrigens von Parallelogrammen beschlossen wird. Denn daß das übrige alles aus diesen Gründen fliesse, ist aus der weitläuftigeren Beschreibung leicht einzusehen.

§. 13. Da das Punct a, durch welches man die Fläche abcde geleget hat, nach Belieben angenommen worden ist, XI, 10. so folget daß, wenn man anderswo in der Linie AF ein Punct genommen, und durch dasselbe eine Fläche so geleget hätte, wie abcde durch a geleget worden ist; die Figur dieser Fläche ebenfals der ABCDE gleich und ähnlich geworden wäre. Es hindert nichts, daß dieses nicht auch nunmehro geschehe, nachdem man, vermittelst der abcde, das Prisma geschlossen hat. Es wird aber durch eine dergleichen Fläche, wenn sie durch ein Punct zwischen A und a durchgehet, das Prisma geschnitten: und man muß demnach schliessen, daß, wenn man ein Prisma dergestalt schneidet, daß der Schnitt der Grundfläche ABCDE parallel wird, dieser Schnitt auch der Grundfläche gleich und ähnlich seyn werde.

§. 14. Die Linien Aa, Bb, Cc, Dd, Ee sind einander alle gleich, weil die Seiten des Prisma Parallelogrammen sind; und also Aa = Bb = Cc und so fort: aber die Winkel der Parallelogrammen Ab, Bc, Cd sind einander nicht nothwendig gleich, und zwar sind diese Parallelogramme niemals alle gleichwinklicht, wenn die Linien Aa, Bb, Cc auf der Grundfläche AD schief stehen, wie man leicht siehet. Stehet aber Aa auf der Grundfläche AD perpendicular, so stehen auch alle übrige

übrige dergleichen Linien Bb, Cc, Dd, Ee auf den Grundflächen AD, ad perpendicular, weil sie einander parallel sind, X, 50. und der Winkel aAB ist gerade, wie auch die Winkel bBC, cCD und so fort. Demnach sind in diesem Falle die Vierecke Ab, Bc, Cd alle geradewinklicht, IV, 203. und haben noch darzu einerley Höhe. Ein dergleichen Prisma in welchem Aa auf der Fläche AD gerade stehet, wird ein gerades Prisma genant, die übrigen alle sind und heissen schiefe Prisma. Die 297 Zeichnung stellet ein gerades, und die 296 ein schiefes Prisma vor.

§. 15. Dieses ist die erste Eintheilung dieser Cörper in gerade und schiefe. Eine andere Eintheilung gründet sich auf die Zahl der Seiten der Grundfläche, welche allezeit mit der Zahl der Seiten des Prisma einerley ist. Man nennet aus dieser Betrachtung die Prisma drey-vier-viel-seitig. Die Bedeutung ist selbst aus dem Namen klar.

§. 16. In einem Prisma von vier Seiten können die Grundflächen Parallelogramme seyn: Da nun die Seiten eines jeden Prisma ebenfals Parallelogramme sind, so ist ein dergleichen Cörper in sechs Parallelogramme eingeschlossen. Denn der Seiten sind viere, und die zwo Grundflächen dazu sind sechs Parallelogramme. Ein Prisma von dieser Art heisset ein Parallelepipedum. Es kan dasselbe gerade oder schief seyn wie ein jedes anderes Prisma. Die 298 Zeichnung stellet ein gerades Parallelepipedum vor, denn mit dem schiefen werden wir nichts zu schaffen haben.

§. 17. In einem jeden Parallelepipedum sind jede zwo Seiten, die einander entgegen gesetzet sind, einander gleich und parallel. Dieses ist von den Grundflächen ABCD, EFGH nicht nöthig zu erweisen, weil es in dem Begriffe eines jeden Prisma lieget. Daß aber auch die Seite ABFE der Seite DCGH gleich und parallel sey, erhellet folgender gestalt. AC ist ein Parallelogrammum, und folgends ist AB der DC gleich und parallel. Nun ist auch AE der DH gleich und parallel, denn dieses ist von einem jeden Prisma richtig. Also ist der Winkel BAE dem Winkel CDH gleich, X, 28. und folgends das Parallelogrammum BE gleich dem Parallelogrammum CH, weil in denselben die gleichen Winkel BAE, CDH von gleichen Seiten eingeschlossen werden. Ueber dieses sind die Flächen, in welchen diese Seiten BE, CH liegen, einander auch parallel, weil die eine durch die zwo geraden Linien AB, AE gehet, die in A zusammen stossen, und welche

XI. Abschnitt. welche den geraden Linien DC, DH parallel sind, die in der Fläche CH liegen. X, 57. Ist nun AC ein rechtwinklichtes Viereck und der Cörper EC gerade, so sind alle Parallelogramme, welche ihn einschliessen geradewinklicht. Denn die Seiten eines jeden geraden Prisma sind rechtwinklichte Vierecke. XI, 14.

§. 18. Man kan also bey einem jeden Parallelepipedum diejenigen einander entgegen gesetzeten Seiten als die Grundflächen betrachten, welche man wil, und hernach diesen Cörper als ein Prisma ansehen; welches bey einem Prisma von einer andern Art nicht angehet. Dehn wenn man die Vierecke AH und BG vor die Grundflächen annimmet, so sind dieselben gleich und ähnlich, und der Cörper AG ist übrigens in die Parallelogramme AF, EG, HC, AC eingeschlossen. Dieses aber sind die allgemeinen Kennzeichen eines jeden Prisma. XI, 12. Und sind die sechs Seiten des Parallelepipedum geradewinklicht, so ist dasselbe allezeit ein gerades Prisma, man mag unter den sechs Seiten desselben vor die Grundflächen annehmen, welche man wil.

F. 299. §. 19. Ist nun in einem solchen geraden Parallelepipedum, als wir eben beschrieben haben, die Grundfläche AB nicht allein ein geradewinklichtes Viereck, sondern auch ein Quadrat, und ist über dieses die Seite BC der Seite des Quadrats AD gleich, so wird es in sechs gleiche Quadrate eingeschlossen. Denn da bey einem jeden Prisma die zwo Grundflächen einander gleich und ähnlich sind, so muß auch hier die der AB entgegen gesetzete Grundfläche ein der AB gleiches Quadrat seyn. Und daß die Seiten, welche den Cörper rings herum einschliessen bey der gesetzeten Bedingung, daß BC so groß sey als BD = AD nicht nur geradewinklichte Vierecke, sondern auch Quadrate und einander gleich sind; siehet man bloß aus der Figur gar leicht. Ein solcher Cörper heisset ein **Würfel** oder ein **Cubus**. Und diese sind die Arten der Prisma, welche mit besonderen Namen zu belegen waren.

§. 20. Es sind aber dieses die Cörper noch nicht alle, welche unter die erste Classe derjenigen, die wir uns zu betrachten vorgesetzt haben, gehören. Man stelle sich zween Cirkel vor, AB und CD die einander gleich sind, und parallel liegen, deren Mittelpuncte sind E und F. Man ziehe diese Mittelpuncte vermittelst der geraden Linie EF zusammen, und stelle sich vor, daß an dem Umkreise der Cirkel AB, CD eine gekrümmete Oberfläche ringes herum dergestalt anliege, daß, wenn man durch ein Punct derselben, wo man es annehmen wil, A, eine gerade

F. 300. 301.

Linie

Linie AC, der EF parallel ziehet, dieselbe ganz in die gekrümmete Oberfläche ABDC falle, so hat man den Begrif einer Walze oder eines Cylinders ABDC. Dieses ist der Cörper welchen wir noch mit dem Prisma unter eine Classe bringen müssen.

XI. Abschnitt.

§. 21. Denn es kommet der Cylinder mit dem Prisma in allen Stücken überein, ausser daß bey dem Prisma die Grundflächen eine geradelinichte Figur, und bey dem Cylinder ein Cirkel ist. Die entgegen gesetzeten Grundflächen sind auch hier einander gleich. Es kan auch hier eine Linie AC, welche der EF parallel laufet, gerade oder schief auf den Grundflächen AB, CD stehen, weil man die Cirkel AB, CD, übrigens legen kan, wie man wil, wenn nur ihre Flächen einander parallel bleiben. Es kan also ein Cylinder ebenfals gerade oder schief seyn. Er ist schief, wenn EF auf den Grundflächen AB, CD schief stehet, wie in der 300 Zeichnung und gerade, wenn diese EF, auf die Grundfläche perpendicular ist, wie in der 301. Alle gerade Linien, die wie AC, DB zwischen den Grundflächen der Cylinder der EF parallel gezogen werden, sind hier ebenfals gleich, weil diese Gleichheit bloß daraus folget, daß die Grundflächen AB, CD einander parallel liegen. X, 60. Man pfleget die gerade Linie EF, welche zwischen den Mittelpuncten der Grundcirkel AB, CD lieget, die Axe des Cylinders zu nennen.

F. 300. 301.

§. 22. Daß aber auch ein Cylinder von einer jeden Fläche, welche der Grundfläche desselben parallel lieget, dergestalt geschnitten werde, daß die Figur, die durch den Schnitt hervor gebracht wird, der Grundfläche gleich und ähnlich wird, wie dieses ebenfals von dem Prisma gezeiget worden ist, XI, 13. siehet man nachfolgender gestalt. Gesetzet der Cylinder AD sey vermittelst einer der AB parallel laufenden Fläche geschnitten, und der Schnitt sey GH, so ist zu erweisen daß GH ein Cirkel, und dem AB gleich sey. Man nehme in dem Umkreise des Cirkels AB das Punct I nach Belieben, und ziehe den Halbmesser EI; durch I ziehe man eine gerade Linie IK der EF parallel, welche ganz in der gekrümmeten Oberfläche des Cylinders liegen wird: XI, 20. folgends gehet diese Linie durch K in den Umkreis des Cirkels CD, und FK ist ein Radius dieses Cirkels CD: EK aber ist ein Parallelogrammum, und dieses Parallelogrammum schneidet die Ebene GH nach einer geraden Linie, welche wir mit LM bezeichnet haben. Das Punct M dieser LM lieget in dem Umkreise des Schnittes GH, weil es in der geraden Linie IK lieget, die ganz in die

F. 302.

XI. Abschnitt. gekrümmete Oberfläche des Cylinders gefallen; und L lieget in der Axe EF. Es ist aber LM der EI parallel, weil die Flächen GH und AB parallel sind, welche beyde von der Fläche EK geschnitten werden, X, 59. und weil EK ein Parallelogrammum ist, so ist auch LM dem Radius EI des Cirkels AB gleich. Das Punct L bleibet beständig einerley, man mag das Punct I in dem Umkreise AB genommen haben, wo man wil, weil dadurch EF nicht veränderet wird. Nachdem man aber I da oder dort in dem Umkreise AB annimmet, fället auch M in ein anderes Punct des Umkreisses GH; aber beständig ist eine jede LM dem Radius des Cirkels AB gleich. Also sind alle Puncte des Umkreises des Schnittes GH von dem Puncte L gleich weit entfernet: dieser Schnitt GH ist demnach ein Cirkel, und weil sein Radius LM der EI gleich ist, so ist auch dieser Cirkel GH dem AB gleich.

§. 23. Wegen diesen gemeinschaftlichen Eigenschaften nun bringen wir alle bisher erklärete Cörper unter eine Classe, und wir werden sie, die Weitläuftigkeit desto mehr zu vermeiden künftighin Cörper der ersten Art nennen, und also unter den Cörpern der ersten Art alle Arten der Prisma und der Cylinder verstehen. Es haben diese Cörper eine grosse Gemeinschaft mit dem Parallelogrammum, und die meisten Sätze, welche bey der Vergleichung der Parallelogrammen gewiesen worden, sind von denselben richtig, wie wir gleich sehen werden.

§. 24. Die Höhe eines Cörpers von dieser ersten Art ist die Entfernung der einander entgegen gesetzeten Grundflächen desselben: das ist, die gerade Linie zwischen diesen Grundflächen, welche auf denselben perpendicular stehet. Man siehet leicht, daß nichts daran gelegen sey, wo man diese Perpendicularlinie ziehe, weil alle gerade Linien, die zwischen Parallelflächen liegen, und auf eine derselben perpendicular stehen, einander gleich sind. X, 60. Es ist auch dieses hier eben so wie bey dem Parallelogrammum; nur hat man hier Grundflächen, und bey den Parallelogrammen Grundlinien.

Wie ein Cörper der ersten Art mit einem andern solchen Cörper verglichen wird.

§. 25. Wenn nun zween Cörper der ersten Art AB und CD gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben; so sind sie einander gleich, sie mögen im übrigen beschaffen seyn wie sie wollen. Denn weil die Cör-

Cörper einerley Höhe haben, so kan man sie beyde zwischen zwo Parallelflächen dergestalt setzen, daß die Grundflächen der Cörper in diese Flächen fallen. Wir setzen, es sey dieses geschehen, und die Parallelflächen seyn AE, FG. Man schneide nunmehro die Cörper beyde vermittelst der Ebene HI, welche den vorigen AE, FG ebenfals parallel sey, wo man wil. Wenn nun dadurch die Schnitte HK, LM zum Vorscheine kommen; so ist HK der Grundfläche FB, und LM der ND gleich: XI, 13. und, da diese Grundflächen FB, ND einander gleich sind, so sind auch die Schnitte HK, LM einander gleich. Dieses aber, daß dergleichen Schnitte, als HK, LM sind, einander beständig gleich fallen, war das Kennzeichen, aus welchem auf die Gleichheit der Cörper beständig konte geschlossen werden. XI, 7. Man wird derohalben in dem gegenwärtigen Falle eben den Schluß machen, und sagen müssen, die Cörper der ersten Art AB, CD, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, seyn einander gleich.

XI. Abschnitt.

§. 26. Man siehet auch leicht ein, daß die Theile AK und CM wie auch HB und LD in welche die Cörper AB, CD vermittelst der Ebene HI zerschnitten worden, einander gleich sind. Denn sie haben ebenfals gleiche Grundflächen und gleiche Höhen. Uebrigens werden wir unsere Beweise von dieser Art Cörper künftig nur auf diejenigen besondern Arten derselben einschränken können, welche man sich am leichtesten vorstellen kan, nemlich auf die geraden Prisma und Cylinder, und die Beweise werden doch von allen Cörpern dieser Art, welche eben so grosse Grundflächen und Höhen haben, richtig seyn, so lange wir bey den Cörpern nichts als ihre Grösse betrachten werden. Weil man nemlich an die Stelle eines jeden Cörpers von dieser Art einen anderen setzen kan, welcher eine eben so grosse Grundfläche und Höhe hat, als jener, ohne daß dadurch in der Grösse des Cörpers etwas veränderet werde.

§. 27. Wenn zween Cörper der ersten Art AB und CD gleiche Grundflächen haben, so verhalten sie sich wie ihre Höhen, das ist, wenn AE die Höhe des Cörpers AB ist, und CF ist die Höhe des Cörpers CD, so ist AB:CD=AE:CF. Denn, nachdem man die beyden Cörper auf eine Ebene ED gesetzet hat, so führe man die Oberfläche des kleineren AG fort, und schneide dadurch den grösseren Cörper in HI. Weil nun die Cörper AB und HD gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, so sind sie einander gleich, und man kan an statt des AB den Cörper HD, und an statt der Höhe AE die Höhe

F. 304.

XI. Abschnitt. HF nennen. Nun theile man die Höhe CF in eine beliebige Zahl gleicher Theile: so fället entweder ein Theilungspunct in H oder nicht. Es mag dieses oder jenes seyn, so stelle man sich vor, daß man durch alle Theilungspuncte der Linie CF ebene Flächen der FD parallel geleget habe, welche folgends auch der HI parallel seyn werden: so hat man dadurch den Cörper CD in eine Zahl gleicher Theile zerschnitten, welche so groß ist als die Zahl der gleichen Theile in der geraden Linie CF. Und, fället H in ein Theilungspunct der Linie CF, so fället auch die Ebene HI, welche vom CD den Cörper HD abschneidet, in eine der theilenden Flächen, zwischen welcher und der untersten FD so viele theilende Flächen liegen, als viele Theilungspuncte zwischen H und F fallen: und eben dieses ist auch richtig, wenn H nicht in ein Theilungspunct der FC, und folgends die Fläche HI in keine der Flächen fället, welche den Cörper CD theilen. Es liegen auch in diesem Falle zwischen H und F so viele Theilungspuncte, als viele theilende Flächen zwischen HI und FD liegen, und so ist es immer, man mag der gleichen Theilchen in der CF so viele gemacht haben, als man wil.

§. 28. Wir sind also wieder an dem allgemeinen Kennzeichen der Proportion, VI, 61. welches wir bereits zu verschiedenen malen angewendet haben. Denn wenn man die Zahl der gleichen Theilchen in der Höhe CF sich unter m vorstellet, und nennet eine jede andere Zahl solcher Theile n, so ist $\frac{1}{m}$ CF eines der Theilchen, in welche man die CF getheilet, und $\frac{1}{m}$ CD ist eines der Theilchen, in welche man den Cörper CD zerschnitten, $\frac{n}{m}$ CF aber bedeutet eine jede Zahl der Theile der CF, und $\frac{n}{m}$ CD bedeutet eben die Zahl der Theile des Cörpers CD. Bey der Theilung welche die Figur vorstellet ist $m=6$, und $\frac{n}{m}$ kan $\frac{1}{6}$ oder $\frac{2}{6}$ oder $\frac{3}{6}$, und so fort, bedeuten. Nun siehet man aus der Figur und demjenigen, so bereits gesaget worden ist, daß bey einer jeden Bedeutung, die man dem m und n geben wil, wenn $\frac{n}{m}$CF grösser ist als HF, auch $\frac{n}{m}$ CD grösser seyn werde als HD: und

wenn

wenn $\frac{n}{m}$ CF der HF gleich ist, auch $\frac{n}{m}$ CD dem HD gleich seyn werde: wie auch daß, wenn $\frac{n}{m}$ CF kleiner ist als HF, zugleich $\frac{n}{m}$ CD kleiner seyn werde als HD. Folgends verhält sich allerdings wie HF zu CF, so der Cörper HD zu dem Cörper CD. Oder, wenn man gleiches vor gleiches setzet, so hat man AE: CF = AB: CD, und umgekehret CF: AE = CD: AB, welches zu erweisen war.

§. 29. Ein Leser, welcher sich das bisher abgehandelte wohl bekannt gemacht, und sich dadurch an dergleichen Schlüsse gewöhnet hat; wird ohnfehlbar dieses in einem Blicke übersehen, zumalen der Satz selbst fast von Natur bekannt ist. Es ist leicht einzusehen, wenn die Grundflächen der beiden Cörper AB und CD nicht allein gleich, sondern auch ähnlich sind, und die Cörper AB und CD sind gerade; die Höhe aber des Cörpers CD ist zwey, drey, viermal so groß als die Höhe des Cörpers AB; daß auch der Cörper CD, zwey, drey, viermal so groß seyn werde, als der Cörper AB; und daß in diesem Falle überhaupt AE zur CF sich verhalten werde, wie sich der Cörper AB zu den Cörper CD verhält. Dieses ist auch den Handwerkern bekannt; und niemand zweifelt, ob, wenn man von einem Balken, der als ein Prisma angesehen werden kan, ein Prismatisches Stück abschneidet, dessen Länge $\frac{2}{5}$ der Länge des ganzen Balkens beträget, auch dieses abgeschnittene Stück $\frac{2}{5}$ des ganzen Balkens, dem cörperlichen Inhalte nach, betragen werde. Daß aber eben dieses richtig sey, wenn die Cörper der ersten Art, welche wir betrachten, schief, und ihre Grundflächen nicht ähnlich sind, siehet man daraus, weil weder die Schiefe noch die Figur der Grundflächen in der Grösse der Cörper etwas änderet, wenn nur die Grösse ihrer Höhen und ihrer Grundflächen beybehalten wird XI, 25.

§. 30. Man kan auch hier auf die Erzeugung der Cörper HD und CD zurücke gehen, und aus derselben die Proportion schliessen, die wir betrachten. Denn gesetzet, es bewege sich die Fläche FD, auf eine gleichförmige Art, dergestalt aufwärts, daß indem das Punct F in der geraden Linie FC fortgehet; die Seiten der Figur FD nachdem sie in HI gekommen, und sonst überall den Seiten der FD, wie sie im Anfang gelegen, parallel bleiben: so werden die Cörper HD, CD so wohl als die Höhen FH, FC durch eine gleichförmige Bewegung erzeuget; die Cörper nemlich durch die Bewegung der Grund-

XI. Abschnitt. fläche FD, und die Höhen durch die Bewegung des Puncts F. Es entstehen aber auch HD und HF, wie auch CD und CF zugleich: also verhält sich allerdings HF zur CF, wie sich HD zu CD verhält VI, 67.

§. 31. Hieraus aber ist nun ohne Weitläuftigkeit zu schliessen, daß jede zween Cörper der ersten Art, welche gleiche Höhen haben, sich gegen einander, wie ihre Grundflächen verhalten werden, und daß folgends, wenn man zween Cörper dieser Art hat, von was Beschaffenheit sie im übrigen seyn mögen ABC, DEF, welche gleiche Höhen haben, aber verschiedene Grundflächen AB, DE, man nur diese Grundflächen nach der Regel, welche wir zur Vergleichung der geradelinichten Figuren IX, angegeben haben mit einander vergleichen dürfe, wenn man die Cörper ABC, DEF mit einander vergleichen wil. Denn wie sich AB zu der DE verhält, so verhält sich auch der Cörper ABC zum DEF.

F. 305.

§. 32. Dieses einzusehen, verwandele man AB in ein geradewinklichtes Viereck ab, und der Figur DE mache man ein anderes geradewinklichtes Viereck de gleich, welches mit dem vorigen ab einerley Höhe habe, daß also diese zwey Vierecke ab und de beyde zwischen die Parallellinien ae, GH können gesetzet werden. Wir haben IX, 60. gewiesen, wie dieses zu thun sey. Hier aber ist es genug, daß man sich diese Verwandelung in Gedanken vorstelle, nachdem man eingesehen, daß sie möglich sey. Man setze auf ab das gerade Parallelepipedum abc, dessen Höhe bc der Höhe BC gleich sey, und auf de setze man das gerade Parallelepipedum def, von eben der Höhe. Weil nun ab = AB und bc = BC, so sind auch die Cörper abc, ABC einander gleich XI, 25. Und, weil de = DE, und über dieses die Cörper def, DEF gleiche Höhen haben, so sind auch diese Cörper einander gleich.

F. 305. 306.

§. 33. Nun siehet man ferner leicht, daß die geradewinklichten Vierecke bJ, Hf einander gleich sind; denn ihre Seiten sind gleich, wie ohne Weitläuftigkeit aus dem, so gesaget worden ist, und aus der Figur erhellet. Und wenn man also diese Vierecke bJ, Hf als die Grundflächen der Cörper abc, def ansiehet, so haben diese Cörper gleiche Grundflächen, und ihre Höhen sind Gb, dH. Demnach ist, nach dem Satze XI, 28. welchen wir eben bewiesen haben abc : def = Gb : dH. Diese gerade Linien Gb, dH aber sind die Grundlinien der gerade-

radewinklichten Vierecke ab, de, welche zwischen den Parallelen ac, GH stehen, und also gleiche Höhen haben. Diese Vierecke verhalten sich wie ihre Grundlinien, und die Verhältniß Gb: dH ist der Verhältniß ab: de gleich IX, 40. Man kan also diese vor jene in der bereits bemerketen Proportion abc: def = Gb: dH, setzen, wodurch sich diese Proportion in die nachstehende verwandelt; abc: def = ab: de. Nun schreibe man ABC an statt abc; und an statt def setze man DEF; vor ab nehme man AB, und vor de die DE; denn wir haben gezeiget, daß diese Grössen gleich seyn: so wird durch diese Verwechselung in der Proportion nichts geändert. Es kommet aber dadurch die Proportion ABC: DEF = AB: DE, deren Richtigkeit wir erweisen solten.

§. 34. Also wissen wir nunmehro, wie die Cörper der ersten Art zu vergleichen seyn, wenn sie gleiche Grundflächen haben, wir wissen auch, wie man verfahren müsse, wenn ihre Höhen einander gleich sind. Wie ist es aber, wenn so wohl die Grundflächen als auch die Höhen solcher Cörper ungleich sind, und auf was Art hat man in dem Falle bey der Vergleichung der Cörper zu verfahren? Wem die Beweise, die wir bey dem Parallelogrammum gegeben, noch im Gedächtniß schweben, der siehet so gleich, daß sich dieselben auch hier anwenden lassen, und man kan daraus ohne Weitläuftigkeit schliessen, daß bey der Vergleichung zweer Cörper von der ersten Art, man wie bey der Vergleichung der Parallelogrammen, verfahren, und so wohl auf die Verhältniß der Grundflächen, als auch auf die Verhältniß der Höhen werde Acht haben müssen, weil durch die Zusammensetzung dieser zwo Verhältnisse die Verhältniß der Cörper heraus gebracht wird.

§. 35. Es seyen die zween Cörper der ersten Art ABC, abc mit einander zu vergleichen. Die Grundfläche des ersten sey AB und seine Höhe BC, die Grundfläche aber des zweyten sey ab und die Höhe desselben bc. Man stelle sich den dritten Cörper von eben der Art vor DEF, dessen Grundfläche DE so groß sey, als die Grundfläche des zweyten ab, und dessen Höhe EF der Höhe des ersten Cörpers BC gleich sey. Weil nun die Cörper ABC und DEF gleiche Höhen, und die Cörper DEF, abc gleiche Grundflächen haben, so sind nachstehende zwo Proportionen richtig,

F. 307.

ABC: DEF = AB: DE = AB: ab XI, 31.
DEF: abc = EF: bc = BC: bc XI, 27.

Aus

XI. Abschnitt.

Aus welchem man siehet, daß die Verhältniß der Cörper ABC : abc aus den zwo Verhältnissen AB : ab und BC : bc zusammen gesetzet sey, deren erstere die Verhältniß der Grundflächen dieser Cörper ist, und die zwote die Verhältniß ihrer Höhen.

§. 36. Wenn man also die Grundfläche des ersten Cörpers ABC sich unter B vorstellet, und die Grundfläche des zweyten abc unter b, die Höhe aber des ersteren unter A, und die Höhe des zweyten unter a; den ersteren Cörper ABC aber selbst C nennet, und c den zweyten abc bedeuten lässet; so kan man den gegenwärtigen Satz, daß nemlich die Verhältniß C : c aus den zwo Verhältnissen B : b und A : a zusammen gesetzet sey, folgender gestalt kurz ausdrucken: $C : c = B \times A : b \times a$.

§. 37. Man siehet hieraus so gleich, daß, wenn bey zween Cörpern der ersten Art sich die Grundflächen verhalten, wie die Höhen verkehrt gesetzet, das ist, wenn $B : b = a : A$, diese Cörper gleich seyn müssen. Denn in diesem Falle sind die Glieder der Verhältniß, welche aus den zween $B : b$ und $A : a$ zusammen gesetzet wird, einander nothwendig gleich, das ist, es ist bey der gesetzten Bedingung $A \times B = a \times b$ VIII, 46. Also können auch in der Proportion $C : c = A \times B : a \times b$ die ersten Glieder C, c keine verschiedene Grösse haben. Wäre dieses, so könte bey der Gleichheit der letzteren Glieder die Proportion ohnmöglich bestehen.

§. 38. Und wenn Cörper von dieser ersten Art einander gleich sind, so kan man auch umgekehret schliessen, daß ihre Grundflächen sich verhalten werden, wie ihre Höhen verkehrt gesetzet: oder, daß die Grundfläche des ersteren Cörpers sich zu der Grundfläche des zweyten verhalten werde, wie sich die Höhe des zweyten zu der Höhe des ersten verhält. Denn wenn in der allgemeinen Proportion $C : c = B \times A : b \times a$, die ersten zwey Glieder, welche die Cörper bedeuten gleich sind $C = c$, so müssen auch die zwey letztern Glieder gleich seyn $B \times A = b \times a$. Die Verhältniß $B \times A : b \times a$ aber ist aus den zwoen $B : b$ und $A : a$ zusammen gesetzet, und wenn die Glieder einer Verhältniß, die aus zwo andern zusammen gesetzet ist, einander gleich sind, so sind allezeit die Verhältnisse gleich, welche man zusammen gesetzet hat, VIII, 48. wenn man nur die Glieder der einen dieser Verhältnisse versetzet, und folgends ist hier $B : b = a : A$. Oder wenn man sich diesen Satz unter den Zeichen vorgestellet hat, so kan man nur kurz sagen, wenn $B \times A = b \times a$,

so

so ist allezeit B: b = a: A, und diese ist die Proportion, von welcher wir angegeben, daß sie allezeit, bey den gleichen Cörpern der ersten Art, statt finde.

XI. Abschnitt.

Einige besondere Sätze zur Vergleichung der Cörper der ersten Art.

§. 39. Sind die Cörper, welche man mit einander vergleichet, beide gerade winklichte Parallelepipeda: so bleibet die allgemeine Proportion C: c = B × A: b × a. Es ist aber hier die Verhältniß B: b, das ist AC: ac aus den zwo Verhältnissen AB: ab und BC: bc zusammen gesetzet, IX, 47. und also B: b = AB × BC: ab × bc. Denn dieses ist überhaupt von allen geradewinklichten Vierecken richtig. Wenn man nun auch die Verhältniß A: a durch die Buchstaben der Figur ausdrucket, und also in der Verhältniß B × A: b × a vor B: b schreibet AB × BC: ab × bc, und vor A: a setzet CD: cd, so wird C: c = AB × BC × CD: ab × bc × cd. Woraus man siehet, daß die Verhältniß zweyer geradewinklichten Parallelepipeden ABCD: abcd aus der Verhältniß ihrer Längen AB: ab, ihrer Breiten BC: bc und ihrer Tieffen CD: cd zusammen gesetzet sey. Wer diese drey Verhältnisse übersiehet, übersiehet auch die Verhältniß des Cörpers ABCD zu dem Cörper abcd.

F. 308.

§. 40. Alle Würfel stehen mit unter den Cörpern, von welchen wir gegenwärtig reden, und es ist also die Verhältniß jeder zween Würfel aus der Verhältniß ihrer Längen, ihrer Breiten und ihrer Tieffen zusammen gesetzet. Allein bey den Würfeln sind diese Verhältnisse nicht verschieden. Denn weil AB = BC = CD, und ab = bc = cd, so ist auch die Verhältniß AB: ab der Verhältniß BC: bc, wie auch der Verhältniß CD: cd gleich. Und wenn man AB oder BC oder CD die Seite des Würfels nennet, und mit L bezeichnet, und ab = bc = cd mit l, so kan die Verhältniß L: l an statt einer jeden der Verhältnisse gebraucht werden, aus welchen die Verhältniß des Würfels ABCD zu dem Würfel abcd zusammen gesetzet ist. Daraus siehet man, daß die Verhältniß ABCD: abcd aus der Verhältniß der Seiten L: l, dreymal gesetzet, bestehe, oder daß ABCD: abcd = L × L × L: l × l × l.

F. 309.

§. 41. Noch müssen wir einen anderen Umstand bey den Grundflächen der Cörper der ersten Art in Betrachtung ziehen, wenn nemlich

XI. Abschnitt. diese ähnlich sind. Auch dieses kan dasjenige, so im allgemeinen Verstande erwiesen worden ist, nicht aufheben, sondern, wenn noch C den Cörper ABCD, B seine Grundfläche ABC, A aber dessen Höhe CD bedeutet; und c, b, a in Ansehung des Cörpers abcd eben die Bedeutung haben, so ist auch hier $C : c = B \times A : b \times a$. Da aber hier die Grundflächen AC, ac einander ähnlich seyn, so kan man die Verhältniß derselben B : b leichter als sonst finden. Gesetzet nemlich, daß AB, ab solche Seiten der Grundflächen sind, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, so ist die Verhältniß dieser Grundflächen aus der Verhältniß AB : ab zweymal genommen, zusammen gesetzet, oder die Verhältniß B : b ist der Verhältniß des Quadrats aus AB zu dem Quadrate aus ab gleich. IX, 80. Und wenn man demnach, wie auch sonst geschehen, diese Quadrate durch ABq, abq anzeiget, so kan man an die Stelle der Verhältniß B : b die Verhältniß ABq : abq setzen, dadurch wird $C : c = ABq \times A : abq \times a$. Woraus man siehet, daß wenn zween Cörper der ersten Art ähnliche Grundflächen haben, ihre Verhältniß aus der Verhältniß der Quadrate solcher Linien, welche in ihren Grundflächen auf einerley Art liegen, und aus der Verhältniß ihrer Höhen, zusammen gesetzet sey.

F. 310.

§. 42. Unter diesem Satze stehen alle Cylinder, sie mögen gerade oder schief seyn. Denn da die Grundflächen dieser Cörper Cirkel sind, so sind sie nothwendig einander ähnlich. Vor die geraden Linien aber, welche in den Grundflächen auf einerley Art zu ziehen sind, kan man hier die Durchmesser oder die Halbmesser nehmen. IX, 82. Es ist also die Verhältniß der Walze ABC zu der Walze abc, deren Grundcirkel die Durchmesser AB, ab haben, und deren Höhen sind BC, bc, aus den Verhältnissen ABq : abq und BC : bc zusammen gesetzet. Die Walzen sind gleich, wenn die gedachten Quadrate sich umgekehret wie die Höhen verhalten, XI, 37. oder wenn die Proportion $ABq : abq = bc : BC$ richtig ist; und wenn die Walzen einander gleich sind, so ist diese Proportion richtig. XI, 38.

F. 311.

§. 43. Wenn nun ausser dem, daß die Grundflächen einander ähnlich sind, sich auch die Höhen der Cörper verhalten wie solche Linien, welche in den Grundflächen zwischen gleichen Winkeln, oder sonst auf einerley Art, liegen; so ist die Verhältniß der Cörper aus der Verhältniß eben dieser Linien, oder aus der Verhältniß der Höhen, dreymal genommenen zusammen gesetzet. Denn daß, wenn die Grundflächen ABC, abc einander ähnlich sind, die Verhältniß der Cörper der

der ersten Art, die wir noch immer betrachten ABCD : abcd, aus der Verhältniß AB^q : ab^q, und aus der Verhältniß CD : cd zusammen gesetzet sey, wenn AB und ab in den Grundflächen auf einerley Art liegen, haben wir XI, 41. gesehen. Nun ist die Verhältniß AB^q : ab^q aus der Verhältniß AB : ab zweymal genommen zusammen gesetzet, und da wir hier setzen, daß die Verhältniß CD : cd der Verhältniß AB : ab gleich sey, so kan diese Verhältniß AB : ab an statt der vorigen CD : cd in der Zusammensetzung gebrauchet werden. Nimmet man nun dieses an, so siehet man, daß die Verhältniß der Cörper ABCD : abcd heraus gebracht werde, wenn man die Verhältniß AB : ab oder eine jede andere die ihr gleich ist, als CD : cd dreymal zusammen setzet.

F. 312.

§. 44. So ist es bey allen Cylindern, deren Höhen sich wie die Durchmesser ihrer Grundflächen verhalten, zum Exempel bey solchen, deren Höhen eben so groß sind, als die Durchmesser der Grundflächen, oder zwey, drey, viermal so groß, oder so groß als die halben Durchmesser, und so ferner. ABC und abc in der 313 Zeichnung stellen zween dergleichen Cylinder vor. Die Verhältniß ABC : abc ist aus der Verhältniß AB : ab zweymal genommen, und aus der Verhältniß BC : bc zusammen gesetzet, und da die Verhältniß BC : bc der Verhältniß AB : ab gleich ist, und man also an die Stelle der einen die andern setzen kan, so siehet man leicht, daß eben die Verhältniß ABC : abc auch durch dreyfache Zusammensetzung der Verhältniß AB : ab entstehen könne.

F. 313.

§. 45. Wenn nun bey allen Bedingungen, welche von den Cörpern der 312 und 313 Zeichnung angenommen worden sind, man sich zween Würffel vorstellet, deren Seiten, den Seiten AB, ab dieser Cörper gleich sind: so ist so wohl die Verhältniß der Cörper als auch die Verhältniß der Würfel aus der Verhältniß AB : ab dreymal genommen zusammen gesetzet, und folgends die Verhältniß der Cörper der Verhältniß der Würfel gleich. Und weil man sich allezeit Würfel vorstellen kan, deren Seiten so groß sind als eine jede gegebene gerade Linie AB oder ab, so siehet man, daß bey diesen Bedingungen, daß nemlich die Grundflächen zweyer Cörper der ersten Art einander ähnlich sind, und daß die Höhen derselben sich verhalten wie zwo gerade Linien, die in den beyden ähnlichen Grundflächen auf einerley Art liegen, diese Cörper sich allezeit wie die Würfel verhalten werden, deren Seiten die gedachten Linien sind, welche in den Grund-

XI. Abschnitt.

flächen der Cörper auf einerley Art liegen. Man siehet leicht, daß man an die Stelle dieser Linien auch jede andere nehmen könne, welche eben die Verhältniß gegen einander haben.

§. 46. Wir erachten dasjenige, so wir bishero von den Eigenschaften dieser Cörper gezeiget haben, nach unserem Zwecke vor hinlänglich. Es kommen wenige Aufgaben bey den Cörpern vor, welche in der Anwendung von sonderlichem Nutzen wären, und wir wollen also den Leser mit denselben nicht aufhalten, sondern nur eine einzige beybringen, welche aus unserer Betrachtung unmittelbar fliesset, wie man nemlich auf eine gegebene Grundfläche AB einen Cörper der ersten Art setzen könne, welcher einem gegebenen Cörper abc von eben dieser Art gleich sey. Dieses zu verrichten suche man erstlich IX, 50. zwo gerade Linien D, d, deren erstere D sich zu der zwoten d verhält, wie die Grundfläche AB zur Grundfläche ab, so kan man die Verhältniß D : d an statt der Verhältniß der Grundflächen AB : ab gebrauchen. Ist nun bc die Höhe des gegebenen Cörpers ac; so mache man VII, 13. D : d = bc : Q, diese Q ist die gesuchete Höhe des Cörpers, und wenn man demnach DC der Q gleich nimmet, und den Cörper ABC von dieser Höhe verfertiget, so wird derselbe allerdinges dem Cörper abc gleich. Denn weil B : d = bc : BC so verhalten sich die Grundflächen dieser Cörper wie ihre Höhen verkehrt gesetzt. Dieses kan hinlänglich seyn zu zeigen, wie in andern dergleichen Fällen zu verfahren sey, wenn dergleichen in der Ausübung vorkommen solte. Und wir können uns also nunmehro zu den Cörpern der zwoten Art wenden.

F. 314.

Cörper der zwoten Art.

F. 315.

§. 47. Man nehme eine ebene und geradelinichte Figur von so vielen Seiten als man wil ABCDE, und ausser der Ebene, in welcher diese Figur lieget, nehme man das Punct F nach Belieben. Man ziehe von F die geraden Linien FA, FB, FC und so weiter an alle Ecken der Figur, welche die Dreyecke FAB, FBC, FCD und so weiter, einschliessen werden. Der Cörper nun, welcher auf der erst gezeichneten Figur ABCDE stehet, und um und um von den Dreyecken eingeschlossen wird, die mit ihren Spitzen oben bey F zusammen stossen, heisset eine Pyramide.

§. 48. Und zwar heisset die Figur ABCDE die Grundfläche der Pyramide, und die Dreyecke FAB, FBC, FCD und so fort

sind

sind die Seiten derselben. Diese Seiten der Pyramide sind allezeit an der Zahl so viele, als viele Seiten die Grundfläche hat, weil nemlich auf einer jeden Seite der Grundfläche eine Seite der Pyramide stehet. Und es kan demnach eine Pyramide nicht weniger als drey Seiten haben, weil die Grundfläche derselben nicht weniger als drey Seiten haben kan, hingegen kan sie über drey Seiten deren so viele haben als man wil.

§. 49. Wenn man eine Pyramide vermittelst einer Ebene schneidet, welche der Grundfläche ABCDE parallel laufet, so ist, wie bey den Cörpern der ersten Art der Schnitt der Grundfläche ähnlich aber kleiner als diese. Es sey abcde die Figur eines dergleichen Schnittes. Weil nun die Ebene, in welcher er lieget, der Grundfläche ABCDE parallel lieget, und diese zwo ebene Flächen von dem Dreyecke FAB geschnitten werden, so ist auch ab der AB parallel. X. 59. Auf eben die Art schliesset man, daß bc gleichfals der BC, und cd der CD parallel liege und so ringes herum. Da nun der Winkel, welchen zwo gerade Linien einschliessen, dem Winkel, welcher zwischen zwo andern geraden Linien lieget, die der vorigen parallel sind, allezeit gleich ist: X, 28. so ist auch abc=ABC, und bcd=BCD, und so ringes herum. Es sind aber auch jede zwo Seiten, die in der Figur abcde eben so liegen, wie zwo Seiten in der Figur ABCDE liegen, diesen Seiten proportional, und man hat zum Exempel ab:AB=bc:BC=cd:CD, und so wieder ringes herum. Dieses erhellet daraus, weil in dem Dreyecke FAB die ab mit AB parallel lieget, und in dem Dreyecke FBC die bc mit der BC. Aus dieser Ursache ist die Verhältniß ab:AB der Verhältniß Fb:FB gleich, VII, 12. und diese wiederum der Verhältniß bc:BC. Demnach ist auch die erste Verhältniß ab:AB der letzten bc:BC gleich. Sind aber, wie erwiesen worden, die Winkel der Figur abcde den Winkeln der Figur ABCDE gleich, wie sie auf einander folgen, und sind die Seiten, welche in diesen Figuren, die gleichen Winkel einschliessen, proportional, so sind allerdings die Figuren einander ähnlich. VII, 1.

F. 316.

§. 50. Die Pyramide ist der erste der Cörper, welche wir in die zwote Abtheilung bringen. Der andere ist der Conus oder der so genannte Kegel. Diesen begreifet man folgendergestalt. An statt der eckigten Figur wird hier ein Cirkel ABC beschrieben, und ausser der Ebene, in welcher er lieget, wird, wo man wil, ein Punct D angenommen, so dann aber an das Punct D und an den Umkreis des Cir-

F. 317. 318.

XI. Abschnitt. Cirkels ABC eine Oberfläche DABCA dergestalt angeleget, daß die geraden DA, DB, DC, welche man von D an den Umkreis ABC ziehen kan, alle in diese Oberfläche fallen. Der Cörper, welcher auf dem Cirkel ABC stehet, und ringes herum von der gekrümmeten Oberfläche DABCA eingeschlossen wird, ist der Kegel.

§. 51. Ein jeder Kegel hat eine Axe, wie ein Cylinder, diese ist die gerade Linie, welche von der Spitze desselben D nach den Mittelpuncte E des Cirkels ABC gehet, der des Kegels Grundfläche abgiebet. Diese Axe kan auf der Grundfläche gerade oder schief stehen. Stehet DE auf der Grundfläche ABC schief wie in der 317 Zeichnung, so saget man, der Kegel sey schief. Stehet aber die Axe auf der Grundfläche ABC gerade oder perpendicular, wie in der 318 Zeichnung; so nennet man den Kegel einen geraden Kegel.

§. 52. In einem geraden Kegel sind alle Linien, welche wie DA, DB, DC von dessen Spitze an den Umkreis der Grundfläche ABC gezogen werden können, von einerley Länge. Dieses siehet man bloß daraus, weil alle Puncte der Linie DE welche durch den Mittelpunct des Cirkels ABC gehet, und auf dessen Fläche perpendicular ist, von den Puncten des Umkreises dieses Cirkels gleich weit entfernet sind. X, 40. Denn es ist D ein Punct der geraden Linie DE, und DA, DB, DC sind dessen Entfernungen von dem Umkreise. Eine dergleichen Linie DA oder DB wird die Seite des geraden Kegels genannt.

§. 53. Man siehet aus diesen Begriffen, daß der Kegel mit der Pyramide bisher in allen Stücken überein gekommen, ausser daß bey der Pyramide die Grundfläche eckigt, und bey dem Kegel, Cirkelrund, ist. Es kommet aber auch der Kegel mit der Pyramide darinnen überein, daß alle Schnitte, welche man in demselben mit der Grundfläche parallel machet, Cirkel, und folgends der Grundfläche ähnlich sind. Es ist nicht schwer auch dieses einzusehen. Man könte es unmittelbar aus demjenigen folgern, so bey den Pyramiden gezeiget worden ist; doch wird alles deutlicher, wenn wir den Beweiß davon insbesondere geben.

F. 319. §. 54. Es sey die Figur des Schnittes des Kegels ABCD welcher mit der Grundfläche ABC parallel gehet, abc. Man sol erweisen, daß dieser ein Cirkel sey. Man ziehe die Axe des Kegels DE. Diese wird den Schnitt irgendwo durchstechen. Es sey dieses Punct e. Man ziehe auch von D eine gerade Linie nach einen beliebigen Punct des

des Umkreises der Grundfläche, B. Diese DB wird ganz in der Oberfläche des Kegels zu liegen kommen, XI, 50. und demnach den Umkreis des Schnittes abc irgendwo schneiden. Es sey das Punct, in welchem dieses geschiehet, b. Man ziehe EB, welche der Halbmesser der Grundfläche seyn wird. Weil nun die Fläche, in welcher das Dreyeck DEB lieget, die Ebene des Schnittes abc in eb, und die Grundfläche in EB, schneidet, und die Ebene abc der Grundfläche ABC parallel ist, so sind auch die Linien EB, eb parallel, X, 59. und man hat DE : De = EB : eb, VII, 12. Stellet man sich nun vor, daß man ein Punct wie B anderswo in dem Umkreise ABC angenommen, so kan diese Proportion von diesem Puncte auf eben die Art erwiesen werden, und, wenn dieses andere Punct C ist, und man ziehet DC und EC, und bemerket die ec, in welcher die Fläche des Dreyeckes DEC die Ebene des Schnittes abc schneidet, so ist auch DE : De = Ec : ec. Da nun in dieser und der vorigen Proportion die zwey ersteren Glieder vollkommen einerley, und die dritten, als Halbmesser der Grundflächen ABC, gleich sind; so ist auch eb = ec: das ist, alle Puncte des Umkreises abc sind von dem Puncte e gleich weit entfernet, es ist demnach abc ein Cirkel, und e ist sein Mittelpunct.

§. 55. Diese spitzigen Cörper nun, die Pyramiden nemlich und die Kegel, nennen wir Cörper der zwoten Art. Ihre Höhe ist allezeit die gerade Linie, welche aus der Spitze derselben D gerade oder perpendicular auf die Grundfläche ABC fället, denn diese Perpendicularlinie ist die Entfernung der Ebene so der Grundfläche parallel lauft, zwischen welche und die Grundfläche der Cörper gesetzet werden kan, von dieser Grundfläche. Bey geraden Kegeln ist die Höhe selbst der ganzen Länge der Axe gleich.

Wie die Cörper der zwoten Art mit einander verglichen werden.

§. 56. Die Sätze, welche zur Vergleichung der Cörper dieser Art dienen, sind mit denjenigen welche wir vor die Cörper der ersten Art angegeben haben, einerley; gleichwie auch die Regeln von der Vergleichung der Dreyecke mit demjenigen überein kommen, vermittelst welcher man die Parallelogramme vergleichet. Und diese Reguln werden sich leicht zeigen lassen, wenn wir erstlich einen Umstand darthun, bey welchen die Cörper der zwoten Art einander gleich sind; so dann aber weisen, wie dieser Art Cörper mit den Cörpern der ersten Art zu vergleichen sind.

§. 57. Es

XI. Abschnitt. F. 320.

§. 57. Es sind aber die Cörper der zwoten Art, wie die Cörper der ersten, einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben. Es seyen bey den zween Cörpern der zwoten Art ABCD, EFG, die Grundfläche BD gleich der Grundfläche FG, und die Cörper seyen von gleicher Höhe: so daß, wenn man sie beyde auf die Ebene BH setzet, ihre Spitzen A, E in die Ebene AE fallen, welche mit der Ebene BH parallel lieget. Es kan erwiesen werden, daß wenn man die beyden Cörper ABCD, EFG vermittelst einer dritten Fläche IK schneidet, welche den beyden vorigen BH, AE ebenfals parallel lieget: die Schnitte IL, MN einander gleich seyn werden, woraus dann die Gleichheit der Cörper, nach unserem Grundsatze, gar leicht folgen wird.

§. 58. Denn wenn einer dieser Cörper ein Kegel ist, so ziehe man seine Axe EO, und bemerke dadurch den Mittelpunct des Schnittes P, und die Halbmesser FO, MP, in welchen die Ebene des Dreyeckes EFO die beyden Flächen FG und MN schneidet. Wir haben bereits gesehen, daß IL der BD, und MN der FG ähnlich sey: folgends verhalten sich diese Figuren gegen einander, wie die Quadrate solcher geraden Linien, die in denselben auf einerley Art liegen. VIII, 80. Und man hat demnach IL:BD=IQq:BCq, und MN:FG=MPq:FOq. Nun aber ist IQ:BC=AI:AB, und MP:FO=EM:EF. Die letzteren zwo dieser Verhältnisse aber sind einander gleich, AI:AB=EM:EF. X, 62. Denn die zwo geraden Linien AB, EF liegen zwischen den Parallelflächen AE, BH, und werden von der dritten Fläche IK, welche den vorigen ebenfals parallel ist, in I und M geschnitten. Also sind die Verhältnisse IQ:BC und MP:FO, welche den gleichen Verhältnissen AI:AB und EM:EF gleich sind, ebenfals gleich, nemlich IQ:BC=MP:FO. Demnach sind auch IX, 73. die Quadrate dieser Linien proportional, und man hat IQq:BCq=MPq:FOq. Nimmet man dieses mit den zwo Portionen, die gleich Anfangs gewiesen worden IL:BD=IQq:BCq und MN:FG=MPq:FOq zusammen, so siehet man, daß die zwo ersteren Verhältnisse dieser Proportionen IL:BD, und MN:FG gleichen Verhältnissen gleich sind, sie sind also einander auch selbst gleich, und man hat IL:BD=MN:FG, und wenn man die mittleren Glieder verwechselt. VI, 107. IL:MN=BD:FG. Da nun also die Figur BD der Figur FG gleich ist, so muß auch die Figur IL der Figur MN gleich seyn, wie zu erweisen war.

§. 59. Da

XI. Abschnitt.

§. 59. Da man nun also jede zween Cörper der andern Art, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, zwischen zwo Parallelflächen AB und BH setzen, und hernach wo man wil, vermittelst einer dritten Fläche IK, welche den beiden vorigen parallel läuft, dergestalt schneiden kan, daß die Schnitte IL, MN einander gleich werden: so haben diese Cörper das allgemeine Kennzeichen der Gleichheit der Cörper, XI, 7; und sind also einander würklich gleich.

§. 60. Wir werden demnach wieder nur einen oder den andern Cörper dieser Art, an statt aller übrigen, brauchen können. Und dasjenige, so wir, zum Exempel, von einer dreyseitigen Pyramide, in Ansehung ihrer Grösse, sogleich erweisen werden, wird von der Grösse aller Cörper der zwoten Art richtig seyn, deren Grundfläche der Grundfläche der Pyramide, und deren Höhe der Höhe der Pyramide gleich ist. Denn in der That kan man einen jeden Cörper der zwoten Art in eine solche Pyramide verwandeln. Doch wir wollen bey diesem Beweise etwas umständlicher verfahren. Der Satz, welcher zu erweisen ist, ist nachfolgender.

F. 321.

§. 61. Wenn ein Cörper der zwoten Art ABC eine Grundfläche BC hat, die so groß ist als die Grundfläche DE des Cörpers der ersten Art DF, und die Höhen dieser Cörper sind einander ebenfals gleich; so ist der Cörper der zwoten Art ABC der dritte Theil des Cörpers der ersten Art DEF, wie auch im übrigen die Figur dieser Cörper beschaffen seyn mag. Denn man mache IX, 22. ein Dreyeck GHI der Grundfläche DE gleich, und setze auf dasselbe den Cörper der ersten Art GHIKLM. Wir stellen uns diesen Cörper als gerade vor, so, daß GK, LH und MI auf die Grundflächen GHI, KLM perpendicular fallen; und der Winkel GHI kan, wenn man wil, und wenn man darinne eine grosse Deutlichkeit zu finden vermeinet, ebenfals gerade angenommen werden. Uebrigens haben wir den Cörper dergestalt gezeichnet, als ob er auf einer seiner Seiten läge, weil uns diese Zeichnung etwas deutlicher vorkommet als in der gewöhnlichen. Ist nun also der Cörper GHIKLM dem Cörper DEF gleich gemachet worden, so ziehe man die Queerlinie KH und KI, in dessen Seiten GL, GM. Man erhält dadurch das Dreyeck KHI, dessen Fläche von dem Cörper der ersten Art, welchen wir betrachten, die dreyseitige Pyramide KHGI abschneidet, welche mit dem Cörper GHIL einerley Grundfläche und Höhe hat. Denn wenn man sich GHI, als die Grund-

F. 322.

XI. Abschnitt.

fläche des Cörpers KGHI, vorstellet, so wird er um und um von den Dreyecken KGH, KHI, KIG eingeschlossen, deren Spitzen in K zusammen laufen; und es ist also dieser Cörper KGHI eine Pyramide, deren Höhe KG ist, weil KG auf der Grundfläche GHI perpendicular stehet. Da nun eben diese KG auch die Höhe des Cörpers der ersten Art GHIL ist, so ist allerdings die Grundfläche GHI, und die Höhe GK der Pyramide KGHI mit der Grundfläche und der Höhe des Prisma GHIL, einerley.

§. 62. Das übrige Stück KHIML ist ebenfals eine Pyramide, deren Grundfläche das Parallelogrammum LHIM ist; welche wir aber nicht ins besondere zu betrachten haben. Wir ziehen vielmehr die Queerlinie dieses Viereckes HM, wodurch dasselbe in zwey gleiche Dreyecke LHM, HIM getheilet wird. Wenn man sich nun auch das Dreyeck KHM vorstellet, so siehet man, daß auf einem jeden der Dreyecke LHM, HIM eine Pyramide stehe, und daß die Spitzen dieser Pyramiden oben in K zusammen stossen. Denn auf dem Dreyecke HIM stehet die Pyramide KHIM, deren Seiten die Dreyecke KHM, KHI, KIM abgeben, und auf dem Dreyecke LHM stehet die Pyramide KHLM, deren Seiten sind KHL, KHM und KLM. Diese zwo Pyramiden sind gleich, weil sie gleiche Grundflächen HIM und LHM haben, und, da sie mit ihren Spitzen in K zusammen stossen, auch von gleicher Höhe sind, XI, 59. Es kan aber auch die letztere dieser Pyramiden KHML anders betrachtet werden. Man kan KLM vor ihre Grundfläche halten, so werden KHL, LHM und KHM ihre Seiten, und ihre Höhe wird die HKL, die auf der Grundfläche KLM perpendicular stehet. Nimmet man dieses an, so siehet man, daß auch diese Pyramide HLKM mit dem Prisma GHIL einerley Grundfläche KLM, und einerley Höhe HL habe. Also ist sie derjenigen Pyramide, die wir zu allererst betrachtet haben KHGI, gleich, weil diese ebenfals die Grundfläche GHI das Prisma zu ihrer Grundfläche, und die Höhe des Prisma GK = HL zu ihrer Höhe hatte.

§. 63. Nimmet man nun dieses alles zusammen, so siehet man, daß durch alle die Flächen, vermittelst welcher wir das Prisma GHIKLM geschnitten haben, dasselbe in drey gleiche Pyramiden KGHI, KLHM und KHIM zertheilet worden. Denn es ist KHIM = KHML, und KHML = KGHI, wie erwiesen worden, folgends auch KHIM = KGHI. Also ist eine jede dieser Pyramiden KGHI der

der dritte Theil des Prisma GHIL. Nun ist die Pyramide KGHI dem Cörper der zwoten Art ABC gleich, weil GHI = DE = BC, und GK = FE, diese Höhe FE aber der Höhe der Pyramide ABC gleich ist; das Prisma GHIL aber ist dem Cörper DEF gleich gemachet worden; also ist auch ABC dem dritten Theile des Cörpers DEF gleich. Und dieses ist der Satz, welchen wir erweisen solten.

XI. Abschnitt. F. 321.

§. 64. Wenn man demnach auf AB, die Grundfläche eines Cörpers der zwoten Art ABC, einen Cörper der ersten Art ABD setzet, dessen Höhe der dritte Theil ist der Höhe des Cörpers der zwoten Art, so ist dieser Cörper ABD dem Cörper ABC gleich. Denn verhöhet man diesen Cörper ABD, bis seine obere Oberfläche EF durch C, die Spitze des Cörpers CAB gehet, und er folgends einerley Höhe mit diesem Cörper erhält; so ist so wohl ABD als ABC der dritte Theil des Cörpers ABFE, und demnach ABD dem Cörper ABC gleich, weil die dritten Theile von einerley Cörper ABFE nicht selbst von verschiedenen Grössen seyn können.

F. 323.

§. 65. Und hieraus siehet man nun, daß man bey der Vergleichung der Cörper dieser Art keine andere Regeln gebrauche, als diejenigen, welche wir oben vor die Cörper der ersten Art vorgeschrieben: Denn man kan sie allezeit in Cörper der ersten Art leicht verwandeln. Es seyen die zween Cörper der andern Art ABCD, abcd mit einander zu vergleichen. Wir setzen, daß auf die Art, die wir eben gewiesen, der Cörper der ersten Art BCDE dem ABCD, und bcde dem abcd, gleich gemachet worden sey; und daß B die Grundfläche BCD, und A die Höhe des Cörpers ABCD, und C den Cörper ABCD oder BCDE selbst, bedeute, folgends $\frac{1}{3}$A der DE gleich sey. Ferner stellen wir uns unter c den Cörper abcd oder bcde vor; unter b die Grundfläche desselben bcd, und unter a die Höhe des Cörpers abd, so, daß wieder de dem dritten Theile dieser a gleich wird: so ist aus dem gezeigeten richtig, daß $C:c = \frac{1}{3} A \times B : \frac{1}{3} a \times b$. Denn die Verhältniß der Cörper BCDE: bcde ist allerdings aus der Verhältniß ihrer Grundflächen und ihrer Höhen zusammen gesetzet, XI, 34, und wir sehen hier, daß C, c diese Cörper bedeuten. Man multiplicire die zwey letzteren Glieder der Proportion durch 3, so wird $C, c = A \times B : a \times b$, VI, 104. Weil nun auch C, c die Cörper ABCD, abcd bedeuten können; so siehet man, daß auch die Verhältniß dieser Cörper

F. 324.

XI. Abschnitt. aus der Verhältniß ihrer Grundflächen B : b, und aus der Verhältniß ihrer Höhen A : a zusammen gesetzet sey.

§. 66. Hieraus nun können wir eben dergleichen Sätze ziehen, als oben von den Cörpern der ersten Art erwiesen worden sind. Es sey erstlich B = b, und man stelle sich zween Cörper der andern Art vor, welche gleiche Grundflächen, aber verschiedene Höhen haben. Weil nun hier die Verhältniß B : b, deren Glieder gleich sind, in der Zusammensetzung keine Würkung hat, und also gänzlich weg bleiben kan, VIII, 40; so wird nunmehro C : c = A : a, das ist, zween Cörper der zwoten Art, welche gleiche Grundflächen haben, verhalten sich gegen einander wie ihre Höhen.

§. 67. Es sey B der b ungleich, aber A = a; so wird auf eben die Art aus der allgemeinen Proportion die nachfolgende C : c = B : b heraus gebracht, welche angiebet, daß zween Cörper der anderen Art, welche gleiche Höhen haben, sich gegen einander wie ihre Grundflächen verhalten.

§. 68. Es sey B : b = a : A, oder man stelle sich zween Cörper der anderen Art vor, deren Grundflächen sich verhalten, wie ihre Höhen verkehrt gesetzet, so wird B × A = b × a, das ist, die Glieder der Verhältniß B × A : b × a werden einander gleich, VIII, 46. Da nun also diese Verhältniß der Verhältniß C : c gleich ist; so ist auch in diesem Falle C = c, das ist, die Cörper sind einander selbst gleich.

§. 69. Und wenn C = c, so ist B × A = b × a, folgends B : b = a : A, VIII, 48, das ist, wenn zween Cörper der zwoten Art einander gleich sind, so verhalten sich ihre Grundflächen wie ihre Höhen verkehrt gesetzet.

§. 70. Sind die Grundflächen solcher Cörper einander ähnlich, wie denn alle Grundflächen der Kegel einander ähnlich sind, weil sie Cirkel sind: und bedeuten L, l solche Linien, welche in den beiden Grundflächen auf einerley Art liegen, so ist B : b = Lq : lq; und es wird also aus der allgemeinen Proportion C : c = B × A : b × a nunmehro C : c = Lq × A : lq × a, und die Verhältniß dieser Cörper wird aus der Verhältniß der Quadrate Lq : lq, und aus der Verhältniß der Höhen der Cörper A : a zusammen gesetzet.

§. 71. Ist nun bey ähnlichen Grundflächen auch A : a = L : l; so kan man die letztere Verhältniß in der Zusammensetzung an statt der erste-

ersteren brauchen. Und es wird also die Verhältniß C : c in diesem Falle aus der Verhältniß $L^q : l^q$, und aus der Verhältniß L : l zusammen gesetzet. Da die Verhältniß $L^q : l^q$ kommet, wenn man die Verhältniß L : l zweymal zusammen setzet, so entstehet die Verhältniß der Cörper C : c durch eine dreyfache Zusammensetzung der Verhältniß L : l. Und da die Verhältniß zwoer Würfel, deren Seiten sich verhalten wie L zu l, ebenfals durch die dreyfache Zusammensetzung der Verhältniß L : l gefunden wird; so folget, daß bey diesen Bedingungen die Cörper C, c sich verhalten wie die Würfel, deren Seiten die Verhältniß L : l haben.

XI. Abschnitt.

§. 72. Ueberleget man diese Beweise, die wir von den Cörpern der ersten und andern Art gegeben haben, etwas genauer; so wird man finden, daß sie auch vor viel mehr andere Arten von Cörpern gelten, als diejenige sind, die bey dem Anfange dieser Abhandlungen beschrieben worden sind. Beider Arten Cörper können auch andere Grundflächen haben, als geradelinichte Figuren oder Cirkel. Es können die Grundflächen in krumme Linien eingeschlossen seyn, die keine Cirkel sind: es können auch die Umkreise dieser Grundflächen, aus geraden und krummen Linien, zugleich bestehen. Die Cörper selbst aber können auf dergleichen Grundflächen ohngefehr in Form einer gewundenen Säule stehen; und bey dem allen kan es doch mit den Durchschnitten derselben eben die Beschaffenheit haben, welche bey den Cörpern gezeiget worden ist, die wir betrachtet haben. Von dergleichen Cörpern sind die Sätze von der Grösse der Cörper der ersten und anderen Art, die wir angegeben, ebenfals richtig. Doch diese und dergleichen Betrachtungen fallen demjenigen gar leicht bey, welcher die gegebenen Beweise vollkommen eingesehen hat; und es ist also nicht nöthig, daß wir uns bey dieser Art Cörper, die ohnedem in der Anwendung selten vorkommen, aufhalten.

Cörper der dritten Art.

§. 73. Was nun die Cörper der dritten Art anlanget, so pfleget man von denselben gemeiniglich in den Anfangsgründen die einzige Kugel zu betrachten. Es wird aber eine Kugel ein solcher Cörper genennet, welcher von einer einzigen gekrümmeten Oberfläche beschlossen wird, deren Puncte alle von einem gewissen Puncte, innerhalb der Kugel, gleich weit entfernet sind. Es stellet A B C einen dergleichen Cörper vor. Das gegebene Punct, innerhalb derselben, ist D und B;

F. 325.

XI. Abschnitt.

EF sollen Puncte in der gekrümmeten Oberfläche seyn. Wir setzen, daß die gerade Linie DE der geraden Linie DB gleich sey: und daß dieses beständig so zutreffe, wo man auch die Puncte B und E in der Oberfläche annehmen wil, so wird DB = DE der Radius, oder der Halbmesser der Kugel genennet, und D ihr Mittelpunct. Verlängert man aber den Radius durch den Mittelpunct D, bis wieder an die Oberfläche in G, so ist BG ein Durchmesser der Kugel. Man siehet, daß bey einer Kugel alle Durchmesser einander gleich seyn werden, weil alle Halbmesser gleich sind.

§. 74. Wir könten uns hier ebenfals mit der Abhandlung der einzigen Kugel begnügen lassen: allein da die Beweise, vermittelst welcher *Archimedes* eine Kugel mit einem Cylinder verglichen hat; deren wir uns hier bedienen werden, weil sie unmittelbar aus unserm Grundsatze fliessen, sich nicht nur auf die Kugeln, sondern auch auf viele andere Cörper erstrecken, welche keine Kugeln sind: so halten wir davor, es werde dem Leser nicht unangenehm seyn, wenn wir diese Lehre etwas erweitern; zumalen die Beweise dadurch nicht schwerer, sondern vielmehr in einigen Fällen leichter werden. Doch müssen wir gestehen, daß bey dem allen wir doch nicht alle Cörper werden beybringen können, welche unter den Sätzen begriffen sind, die wir hier erweisen werden: wie wir denn auch nicht alle Cörper abhandeln konten, welche auf eben die Art mit einander verglichen werden, wie die Cörper der ersten und zwoten Art. Indessen hoffen wir, es werde dasjenige, so wir hier zeigen werden, hinlänglich seyn, von den übrigen Cörpern allen, welche unter den folgenden Beweisen begriffen sind, zu urtheilen.

§. 75. Man nehme eine ebene Figur, deren Ecken alle von einem gegebenen Puncte gleich weit entfernet sind. Ein gleichschenklichtes Dreyeck ABC ist unter diesen die einfacheste. Bey demselben ist die Ecke A so weit als B von C entfernet. Die übrigen Figuren von dieser Art ABDE sind aus gleichschenklichten Dreyecken ACB, BCD, DCE, ECA zusammen gesetzet, deren an der Zahl so viele seyn können als man wil. Die Seiten dieser Dreyecke CA, CB, CD, CE, sind alle gleich, aber die Winkel an den Spitzen derselben bey C können so groß seyn als man wil. Folgends sind auch die Seiten der Figur AB, BD, DE, EA nicht nothwendig gleich. Doch kan auch dieses seyn, und wenn man es annimmet, so wird die Figur ABDE regulär.

F. 226. 227.

gulär. Diese Figur ABC oder ABDE giebet die Grundfläche des Cörpers ab, welchen wir zusammen setzen wollen.

§. 76. Man setze auf diese Grundfläche und an das Punct derselben C die gerade Linie CF perpendiculär, und mache sie so groß als AC = BC. Man beschreibe um C als den Mittelpunct, in der Ebene FCA, den Quadranten FA; und in der Ebene FCB beschreibe man, um eben den Mittelpunct C, den Quadranten FB: eben so verfahre man bey allen übrigen Ecken D und E, wenn die Grundfläche mehr als zwo Ecken hat, die ausser C fallen. An die zween Quadranten FA, FB krümme man eine Oberfläche dergestalt, daß alle Linien ab, welche in derselben so gezogen werden können, daß sie zugleich ganz in eine Ebene fallen, welche der ACB parallel lieget, gerade Linien sind. Und eben so verfahre man rings herum, wenn die Grundfläche mehr als zwo von der C verschiedene Ecken hat: so ist der Cörper, welcher auf der Grundfläche ABC stehet, und in die Quadranten FAC, FBC, und die gekrümmete Oberfläche FAB eingeschlossen ist, oder derjenige, welchen wir in der 327 Figur, aus dergleichen Cörpern FCBA, FCDB, FCED und so fort, zusammen gesetzet haben, ein Cörper der dritten Art, welcher aber noch keinen besondern Namen bekommen hat.

§. 77. Schneidet man einen solchen Cörper, dessen Grundfläche ein gleichschenklichtes Dreyeck ist FCBA, durch ein beliebig angenommenes Punct a mit der Grundfläche ABC parallel, so wird der Schnitt abc der Grundfläche ABC ähnlich. Denn die Seite ab lieget in der gekrümmeten Oberfläche FAB, und zugleich in der schneidenden Fläche, und ist demnach eine gerade Linie, XI, 76. Es sind aber auch ac, bc gerade Linien, und folgends ist abc ein geradelinichtes Dreyeck. Weil FC auf der Fläche ABC perpendiculär stehet, und die Fläche acb der ACB parallel lieget; so stehet eben diese FC auch auf der acb perpendiculär, X, 53. und folgends sind ac, bc in den gleichen Quadranten FCA, FCB in einerley Entfernung von dem Mittelpuncte C, auf den Halbmesser CF perpendiculär. Also sind diese Linien ac, bc einander gleich, V, 36. und das Dreyeck acb ist gleichschenklicht. Und weil auch dessen Winkel acb dem Winkel ACB gleich ist, wie man leicht siehet, X, 61. so sind auch die Dreyecke acb, ACB einander ähnlich. VII, 28. Ist nun die Grundfläche ABDE aus verschiedenen gleichschenklichten Dreyecken zusammen gesetzet, so ist acb dem ACB ähnlich, bcd dem BCD, dce dem DCE und so fort; also sind die

Figu-

XI. Abschnitt. Figuren abde, ABDE aus ähnlichen Dreyecken auf einerley Art zusammen gesetzet; sie sind demnach einander ebenfals ähnlich. VII, 44.

§. 78. Nimmet man an die Stelle des gleichschenklichten Dreyeckes einen Ausschnitt eines Cirkels ABC zur Grundfläche, und verfähret im übrigen wie vorhero, so bekommet man einen Ausschnitt einer Kugel. Nemlich, man muß wieder an den Mittelpunct C die gerade Linie FC auf die Ebene, in welcher der Ausschnitt ACB lieget, perpendicular setzen, und um C die zween Quadranten FA, FB beschreiben; so dann aber an diese Quadranten FA, FB, und an den Bogen, AB eine gekrümmete Oberfläche FAB anbringen, welche überall gleich weit von dem Puncte C entfernet sey. Der Cörper, welcher auf der Grundfläche ACB stehet, und übrigens von den Quadranten FAC, FBC, und von der gekrümmeten Oberfläche FAB beschlossen wird, ist der Ausschnitt der Kugel, welchen wir verfertigen wolten. F. 328.

§. 79. Auch hier ist ein jeder Schnitt abc der Grundfläche ABC ähnlich, welcher derselben parallel lieget. Denn daß ac der bc gleich sey, erhellet bloß aus dem bereits XI, 77. gegebenen Beweise. Nimmet man aber in der krummen Linie ab, welche den Schnitt acb an der dritten Seite schliesset, ein Punct d nach Belieben, und leget durch FC und dieses Punct d die Fläche FDC, welche eben dadurch auf die Grundfläche ACB perpendicular wird X, 47; so erhält diese Fläche FDC, indem sie den Cörper schneidet, ebenfals die Figur eines Quadranten, und dc wird der ac oder bc gleich. Also sind alle Puncte der krummen Linie adb von dem Puncte c gleich weit entfernet, und adb ist also ein Cirkelbogen, die Figur cadb aber ein Ausschnitt eines Cirkels, und dem Ausschnitte ACB ähnlich, weil der Winkel acb dem Winkel ACB gleich ist.

§. 80. Nimmet man an die Stelle des Ausschnittes einen ganzen Cirkel ABDE zur Grundfläche, und machet übrigens alles wie vorhin, so bekommet man eine halbe Kugel ABFDE. Denn daß die Oberfläche ABFDE die Eigenschaften der Oberfläche einer Kugel habe, lieget selbst in dem Begriffe, XI, 78. folgends ist der Cörper ABFDE ein Theil einer Kugel. Daß er aber eben die Helfte einer Kugel sey, kan man daraus schliessen, weil, wenn man an den Cirkel ABDE einen andern Cörper von der Figur und Grösse des ABFDE ansetzet, die Kugel ganz wird, wie man gar leicht siehet. Man siehet auch dieses leicht, daß aus dem vorigen Beweise fliesse, daß ein jeder Schnitt dieser halben Kugel, abde welcher vermittelst einer ebenen Fläche geschiehet, F. 329.

die

die der Grundfläche ABDE parallel lieget, einen Cirkel gebe, dessen Mittelpunct c. in die Linie CF fället.

XI. Abschnitt.

§. 81. Es haben also die Cörper der dritten Art dieses mit den Cörpern der ersten und zwoten Art gemeinschafftlich, daß, wenn man sie mit einer Ebene schneidet, welche der Grundfläche parallel lieget, die Figur des Schnittes der Grundfläche ähnlich wird. Auch kommen alle Cörper der dritten Art darinne mit einander überein, daß wenn man sie durch FC, und durch eine Ecke der Grundfläche, (wenn nemlich die Grundfläche Ecken hat, sonst aber, wenn sie aussen Cirkelrund ist, durch ein beliebiges Punct des Umkreises B) schneidet, der Schnitt FCB ein Quadrante wird: und hierdurch wird diese Art Cörper, von den Cörpern der ersten und zwoten Art unterschieden. Es folget aber hieraus, daß dasjenige, so wir aus der angezeigeten Figur des Perpendicularschnittes FBC, und aus der Aehnlichkeit der Schnitte, welche der Grundfläche parallel geschehen, mit der Grundfläche, herführen werden, von allen Cörpern der dritten Art richtig seyn werde; ob wir zwar bey unseren Beweisen, nur die einfachesten dieser Cörper vorstellen wollen.

Vergleich der Cörper der dritten Art mit den Cörpern der ersten.

§. 82. Es sey das Dreyeck ABC gleichschenklicht, und FABC sey ein Cörper der dritten Art. Man setze auf die Grundfläche desselben das gerade Prisma ABCFGH, dessen Obergrundfläche GHF der untern ABC gleich seyn wird. Auf diese Grundfläche FGH setze man die dreyeckigte Pyramide FGHC, deren Spitze unterwärts gekehret ist, und sich in C, dem Mittelpuncte der Quadranten FA, FB, endiget: so haben die zween Cörper, das Prisma ABCFGH, und die Pyramide FGHC, einerley Grundflächen FGH, und einerley Höhen FC, folgends ist die Pyramide der dritte Theil des Prisma. XI, 61. So hoch aber einer dieser Cörper ist, so hoch ist auch der Cörper der dritten Art FABC, denn seine Höhe ist ebenfals FC.

F. 330.

§. 83. Nun schneide man diese drey Cörper, das Prisma, die Pyramide und den Cörper der dritten Art, wie sie da stehen, mit einer Fläche IKL, die den Grundflächen ABC, FGH parallel lauft; und die Figur dieses Schnittes in dem Prisma sey IKL, die Figur des Schnittes in dem Cörper der dritten Art, MNL, und die Figur des

 Schni-

XI. Abschnitt.

Schnittes der Pyramide OPL: so wird durch diesen Schnitt von dem Prisma, das Prisma IKLFGH abgeschnitten; von dem Cörper der dritten Art aber der Theil FMNL, und von der Pyramide wird das Stück FGHPLO abgesondert. Man kan darthun, daß jederzeit FMNL so groß sey, als der Unterscheid der beyden Stücke IKLFGH und FGHPLO. Und weil der Unterschcid IKLFGH — FGHPLO dem Cörper IKHPOG gleich ist, wie man aus der Figur siehet, so wird eben dieser Satz ausgedrucket, wenn man saget; daß jederzeit FMNL dem Cörper IHKPOG gleich sey. Dieses ist dasjenige, so wir gegenwärtig auf eine Art beweisen wollen, aus welcher erhellen wird, daß eben dieses von allen Cörpern der ersten, andern und dritten Art, welche auf einer gemeinschaftlichen Grundfläche stehen, und einerley Höhe haben, richtig sey. Aus dieser Ursache wollen wir uns bey diesem Beweise allgemeiner Redensarten bedienen, welche denselben eben nicht auf unsere Figur einschränken, sondern von allen übrigen zugleich gelten können.

§. 84. Die Figur des Schnittes des Cörpers der ersten Art IKL ist der Grundfläche desselben ABC oder GHF gleich und ähnlich. Von der Figur des Schnittes des Cörpers der dritten Art MNL ist ebenfals bewiesen worden, daß sie der Grundfläche ABC ähnlich sey, und wir wissen auch, daß die Figur des Schnittes des Cörpers der zwoten Art POL, der Grundfläche desselben HGF, und folgends auch der ABC ähnlich ist. Also sind die drey Schnitte IKL, MNL, OPL einander ähnlich, weil ein jeder derselben der ABC ähnlich ist: und die Linien KL, NL, PL liegen in denselben zwischen den Spitzen gleicher Winkel, oder sonst auf einerley Art. Nun ist das Viereck CFHB ein Quadrat; weil CF=BC, und der Winkel FCB gerade ist, und HC ist der Durchmesser dieses Quadrates. Da nun PL in der Fläche eben dieses Quadrates der HF parallel läuft, so ist auch CL=PL, gleich wie FC=HF, VII. 12. und man kan CL vor PL setzen. Man ziehe auch in der Fläche eben dieses Quadrates den Radius des Quadranten FNB, welcher dem Radius BC, und folgends auch der KL, gleich seyn wird, und an statt dieser KL kan gebrauchet werden. Nun ist das Dreyeck NLC bey L rechtwinklicht, und wenn die drey Seiten desselben NC, NL, LC in ähnlichen Figuren auf einerley Art liegen, so ist die Figur, in welcher NC lieget, denen beyden Figuren, in welchen NL, CL auf eben die Art liegen, zusammen genommen gleich, IX, 87. folgends muß man auch schliessen, wenn man vor NC die KL, und

vor

der LC die PL setzet, daß wenn KL, NL, PL in ähnlichen Figuren auf einerley Art liegen, die Figur, in welcher KL lieget, den beyden Figuren, in welchen NL, PL eben so liegen, zusammen genommen gleich seyn werde. Es liegen aber diese Linien KL, NL, PL in den ähnlichen Figuren IKL, MNL, OPL auf einerley Art; also ist die Figur IKL den beyden Figuren MNL und OPL zusammen genommen gleich, oder IKL = MNL + OPL.

§. 85. Wir sind also vermittelst dieser Schlüsse so weit gekommen, daß wir gesehen haben, daß, wenn wir die drey Cörper, welche wir betrachten, mit einer Fläche schneiden, die deren Grundfläche ABC parallel lauft: allezeit der Schnitt des Cörpers der ersten Art IKL dem Schnitte des Cörpers der dritten Art MNL, und dem Schnitte des Cörpers der zwoten Art OPL zusammen, gleich seyn werde. Hieraus aber fliesset, daß der Schnitt des Cörpers der dritten Art MNL übrig bleibe, wenn man den Schnitt des Cörpers der zwoten Art OPL von dem Schnitte des Cörpers der ersten Art IKL abziehet. Da nun auch nach diesem Abzuge IKPO, der Schnitt des Cörpers GABCH, übrig bleibet: so ist überall MNL=IKPO. Und weil über dieses die Theile dieser Cörper GOIKPH, FMNL zwischen den Parallelflächen FGH, IKL liegen: so folget nach unserem Grundsatze XI, 7. daß auch der Cörper FMNL dem Cörper GOIKPH, das ist, der Theil des Cörpers der dritten Art FMNL, dem Unterscheide der Theile der Cörper der ersten und andern Art FGHKLI — FGHPLO gleich sey.

§. 86. Man schliesset auf eben die Art, daß auch der Theil des Cörpers der dritten Art LMNBAC dem Cörper POIKBCA, gleich sey, und daß folgends der Theil des Cörpers der dritten Art LMNBCA übrig bleibe, wenn man den Theil des Cörpers der zwoten Art LOPC von dem Theile des Cörpers der ersten Art LIKBCA abziehet. Denn es bleibet nach diesem Abzuge der Cörper POIKBCA übrig.

§. 87. So wohl aus diesen beyden Sätzen, als auch unmittelbar aus dem Beweise, welchen wir geführet haben, folget, daß der ganze Cörper der dritten Art FABC dem Unterschiede der Cörper der ersten und der zwoten Art, die eben die Grundfläche und Höhe haben FGHBCA — FGHC gleich sey. Denn dieser Unterschied ist GHCAB, und dieser Cörper ist dem Cörper FABC gleich, wie man aus demjenigen leicht schliesset, so eben gezeiget worden ist. In dem Falle, welchen die Figur vorstellet, wenn nemlich die Grundfläche ABC ein gleichschenklichtes Dreyeck ist, ist dieser Cörper GHCAB

 selbst

XI. Abschnitt. selbst eine Pyramide, denn er hat zu seiner Grundfläche das Parallelogrammum ABHG, und ist um und um in die Dreyecke ABC, BCH, HCG, GCA eingeschlossen, deren Spitzen in C zusammen laufen.

F. 331. §. 88. Es verhält sich aber dieses nicht in allen Fällen so. Wenn auf dem Cirkel ABDE eine halbe Kugel ABDFE und ein Cylinder AGHD, und auf der andern Grundfläche dieses Cylinders der gerade Kegel GCH, stehet, wie es der Satz und dessen Beweis erfordern; und man schneidet diese drey Cörper durch IL, vermittelst einer Ebene, die der ABDE parallel lauft; so ist zwar der Theil der Kugel MFN dem Cörper gleich, welcher übrig bleibet, wenn man den Theil des Kegels GOPH von dem Theile des Cylinders GILH abziehet: und der Theil der Kugel AMND wird ebenfals durch den Abzug des Kegels OCP von dem Cylinder IADL gefunden: die halbe Kugel AFD aber ist der Ueberschuß des ganzen Cylinders AGHD über den ganzen Kegel GCH. Allein dieser Ueberschuß hat hier weder die Figur eines Kegels, noch die Figur eines Cylinders. Denn wenn man aus dem Cylinder GADH den Kegel GCH heraus nimmet, und also den Ueberschuß des Cylinders GADH über den Kegel GCH übrig lässet: so hat dieser Ueberschuß einiger massen die Figur eines Bechers GCHDA, aber mit einer Pyramide oder einem Cylinder hat er gar keine Aehnlichkeit.

F. 330. §. 89. Indessen siehet man hieraus, daß ein jeder Cörper der dritten Art FABC zwey Drittel eines Cörpers der ersten Art FGHBCA betrage, welcher mit dem Cörper der dritten Art auf eben der Grundfläche ABC stehet, und mit demselben einerley Höhe hat. Denn der Cörper der zwoten Art FGHC ist ohnstreitig der dritte Theil des Cörpers der ersten Art FGHBCA; XI, 61. und wenn man also jenen Cörper FGHC von diesem FGHBCA abziehet, so bleiben zwey Drittel des Cörpers der ersten Art übrig. Diesem Unterschiede aber, das ist, dem Cörper GABHC, ist der Cörper der dritten Art FABC gleich; es beträget also derselbe zwey Drittel des Cörpers der ersten Art.

F. 331. §. 90. Demnach ist auch die halbe Kugel FABDE so groß als zwey Drittel der geraden Walze ADHG, deren Grundfläche dem Cirkel ABDE gleich ist, auf welchem die halbe Kugel stehet, und deren Höhe DH der halbe Durchmesser eben dieses Cirkels ist.

§. 91. Stel-

§. 91. Stellet man sich nun vor, daß man an die Grundfläche des Cörpers der dritten Art FABC, noch einen andern Cörper der dritten Art ABCf gesetzet habe, welcher dem vorigen FABC in allen Stücken gleich und ähnlich ist; und man habe auch den Cörper der ersten Art FHGBCA verlängert, bis fghBCA dem FGHBCA gleich geworden; so ist FABC = $\frac{2}{3}$ FGHBCA, und fABC = $\frac{2}{3}$ fghBCA, und folgends auch FABC + fABC = $\frac{2}{3}$ FGHBCA + $\frac{2}{3}$ fghBCA, das ist, der ganze Cörper AfBF beträget zwey Drittel des Cörpers der ersten Art GghfFH. Es sind in diesem Falle FAf, und FBf halbe Cirkel, und der Cörper AfBF ist in zwey halbe Cirkel, und die gekrümmete Oberfläche FAfBF eingeschlossen. Wenn man auf die Grundfläche GHF einen Cörper der zweyten Art fGHF setzet, welcher mit seiner Spitze bis in f reichet, und ziehet diesen Cörper von dem Cörper der ersten Art gF ab, so enthält das Ueberbleibsal gGHhf ebenfals zwey Drittel des Cörpers der ersten Art gF, weil fGHF ein Drittel desselben beträgt. Und es ist demnach der Cörper gGHhf dem Cörper AfBF gleich. Der Cörper gGHhf ist wieder eine Pyramide, wenn die Grundfläche GHF ein Dreyeck ist; in andern Fällen ist er aus Pyramiden zusammen gesetzet, oder hat mit einer Pyramide gar nichts gemeinschaftliches.

XI. Abschnitt. F. 332.

§. 92. Eben so ist es auch, wenn man an die halbe Kugel AFB die andere Helfte AfB setzet, und den Cylinder zugleich verlängert, und machet, daß die Höhe des Cylinders GghH dem Durchmesser der Kugel gleich werde. Es ist wieder die Kugel FAfB zweyen Dritteln des Cylinders GghH gleich; und wenn man auf eben die Grundfläche gh einen Kegel gFh beschreibet, dessen Höhe ebenfals dem Durchmesser der Kugel gleich ist, so wird dieser der Helfte der Kugel gleich, weil er einem Drittel des Cylinders GghH gleich ist, und die Kugel zwey Drittel dieses Cörpers beträget.

F. 333.

§. 93. Dieses ist eine vollkommen schöne Eigenschaft der Cörper der ersten, andern und dritten Art, und derjenigen, welche entstehen, indem man zween Cörper der dritten Art zusammen setzet. Wenn alle drey Arten dieser Cörper auf gleichen Grundflächen stehen, und gleiche Höhen haben, und man nennet den Cörper der zweyten Art 1, so wird der Cörper der dritten Art durch die Zahl 2, und der Cörper der ersten Art, durch die Zahl 3 ausgedrucket. Aus diesen Eigenschaften können wir alles übrige so von den Cörpern der dritten Art noch zu

XI. Abschnitt.

sagen ist, herleiten. Es wird aber bey einem jeden besonderen Satze leicht einzusehen seyn, ob er sich auch auf solche Cörper anwenden lasse, welche aus zweyen Cörpern der dritten Art zusammen gesetzet sind, wie eine Kugel aus zwo halben Kugeln: doch wollen wir, dem Leser die Mühe des Nachdenkens zu ersparen, dieses überall kurz erinnern.

Wie zween Cörper der dritten Art mit einander verglichen werden.

F. 334.

§. 94. Zween Cörper der dritten Art, welche gleiche Grundflächen ABC und abc, wie auch gleiche Höhen haben FC und fc, sind einander gleich, obgleich ihre Grundflächen einander nicht ähnlich sind. Denn wenn man auf diese Grundflächen die Cörper der ersten Art ABCFGH abcfgh setzet; so sind diese Cörper einander gleich, weil sie gleiche Grundflächen und Höhen haben. Also sind auch zwey Drittel des ersten ABCFGH gleich zweyen Dritteln des andern abcfgh; folgends, weil die Cörper der dritten Art zwey Drittel der Cörper der ersten Art betragen, so ist auch FABC = fabc. Und man siehet leicht, daß eben dieses auch richtig sey, wenn man zween Cörper der dritten Art, mit ihren Grundflächen zusammen gesetzt, weil die Verhältniß $\frac{2}{3}$ A : $\frac{2}{3}$ B allezeit der Verhältniß A : B gleich ist, es mag A und B bedeuten was man will; und folgends, wenn A = B, auch nothwendig zwey Drittel der A zweien Dritteln der Grösse B gleich seyn müssen.

§. 95. Wir können hiebey bemerken, daß, wenn die Höhen zweyer Cörper der dritten Art gleich seyn sollen FC = fc, auch die Linien AC, ac einander gleich seyn müssen: weil diese AC, ac, nach dem Begriffe der Cörper dieser Art, den Höhen FC, fc gleich sind XI, 76. Indessen kan ABC ein gleichschenklichtes Dreyeck seyn und abc der Ausschnitt eines Cirkels, oder ein Vieleck, dessen Ecken alle von C gleichweit entfernet sind, und so fort.

F. 335.

§. 96. Sind aber die Grundflächen zweyer Cörper der dritten Art der Grösse nach von einander verschieden und zugleich die Höhen; so verhält sich der Cörper FABC zu dem Cörper fabc, wie sich drey Helften des ersteren zu dreyen Helften des andern verhalten; das ist, wie der Cörper der ersten Art ABCFGH zu dem Cörper der ersten Art abcfgh. Nun ist die Verhältniß ABCFGH: abcfgh aus der Verhältniß der Grundflächen ABC : abc, und aus der Verhältniß der Höhen CF : cf zusammen gesetzet XI, 35. also geben eben diese Ver-

Verhältnisse, die Verhältniß nemlich der Grundflächen ABC : abc, und die Verhältniß der Höhen CF : cf, wenn man sie zusammen setzet, auch die Verhältniß der Cörper der dritten Art FABC : fabc.

§. 97. Da aber hier die Höhe FC allezeit der Seite BC gleich ist, so siehet man, daß hier noch ein oder anderer besonderer Satz anzubringen wäre, welcher die Vergleichung dieser Cörper etwas erleichterte. Wir wollen uns aber dabey nicht aufhalten, sondern nur den einzigen Fall betrachten, wenn AB und ab Bogen, und folgends die Grundflächen ABC, abc Ausschnitte aus Cirkeln sind. In diesem Falle ist die Verhältniß der Grundflächen aus der Verhältniß der Bogen AB : ab, und aus der Verhältniß der Halbmesser BC : bc zusammen gesetzet IX, 36. Wil man nun die Verhältniß der Cörper FABC : fabc haben, so muß man zu diesen zwo Verhältnissen noch die Verhältniß CF : cf, das ist, die Verhältniß der Halbmesser BC : bc, hinzusetzen, damit man nemlich die Verhältniß der Höhen mit der Verhältniß der Grundflächen zusammen setze. Also wird die Verhältniß der Cörper FABC : fabc in diesem Falle aus den drey Verhältnissen AB : ab, BC : bc und BC : bc zusammen gesetzet. Oder, weil die zwo letzteren Verhältnisse gleich sind, und also, wenn sie zusammen gesetzet werden, die Verhältniß des Quadrats aus BC zu dem Quadrate aus bc, kurz die Verhältniß $BC^q : bc^q$ geben IX, 69. so kan man auch sagen, daß in dem Falle, wenn ABC, abc Ausschnitte aus Cirkeln, und folgends FABC, fabc Ausschnitte aus halben Kugeln sind, die Verhältniß FABC : fabc aus der Verhältniß der Bogen AB : ab, und aus der Verhältniß der Quadrate ihrer Halbmesser $BC^q : bc^q$ zusammen gesetzet sey.

§. 98. Sind nun aber die Grundflächen zweyer Cörper der dritten Art einander ähnlich, so ist die Verhältniß der Cörper FABC : fabc aus der Verhältniß der Halbmesser, oder der Höhen BC : bc, oder FC : fc dreymal genommen, zusammen gesetzet. Denn die Verhältniß der ähnlichen Grundflächen ABC : abc bestehet aus der Verhältniß BC : bc zweymal genommen, weil diese Linien in den beiden Grundflächen auf einerley Art liegen IX, 80. Und wenn man zu dieser Verhältniß der Grundflächen noch die Verhältniß der Höhen FC : fc, welche der Verhältniß BC : bc gleich ist, hinzusetzet: so bekommet man allerdings eine Verhältniß, welche aus der Verhältniß BC : bc dreymal genommen, bestehet. Und diese ist die Verhältniß der Cörper

F. 336.

per

XI. Abschnitt. per FABC: fabc, weil jederzeit durch die Zusammensetzung der Verhältniß der Höhen mit der Verhältniß der Grundflächen die Verhältniß der Cörper FABC: fabc heraus gebracht wird. Auch dieses ist von Cörpern richtig, welche entstehen, wenn man die ähnlichen Cörper FABC, fabc verdoppelt, weil die Verhältniß nicht geändert wird, wenn man die Glieder derselben verdoppelt.

F. 337. §. 99. Wenn die Grundflächen Ausschnitte aus Cirkeln, und die Winkel derselben ACB, acb einander gleich sind, so sind die Ausschnitte ähnlich, und folgends stehen die Cörper unter denjenigen, von welchen der gegenwärtige Satz lautet. Es verhalten sich also dergleichen Ausschnitte aus Kugeln FABC, fabc, wie die Würfel der Halbmesser FC, fc. Denn die Verhältniß der Cörper FABC: fabc ist aus der Verhältniß FC: fc dreymal genommen zusammen gesetzet, und durch eben diese Zusammensetzung der Verhältniß FC: fc entstehet auch die Verhältniß des Würfels aus FC zu dem Würfel aus fc XI, 40. Wieder siehet man hier leicht, daß der Satz auch gelte; wenn man die Cörper FABC, fabc verdoppelt, indem man an die Grundfläche derselben andere Cörper ansetzet, welche ihnen gleich und ähnlich sind.

F. 338. §. 100. Es stehen unter diesem Satze wieder alle halbe Kugeln ABDF, abdf, denn was von einem jeden Ausschnitte eines Cirkels richtig ist, welchen man zur Grundfläche eines Cörpers der dritten Art angenommen hat, das muß auch richtig seyn, wenn die Grundflächen ganze Cirkel sind, in welchem Falle die Cörper halbe Kugeln werden. Oder wil man auf das vorige zurücke gehen, so sage man, die Verhältniß der Halbkugeln AFDB: afdb sey aus der Verhältniß der Grundflächen ABD: abd, und aus der Verhältniß der Höhen FC: fc zusammen gesetzet. Nun bestehet aber wieder die Verhältniß der Grundflächen aus der Verhältniß der Halbmesser AC: ac, oder FC: fc zweymal genommen IX, 82. und wenn man demnach zu der Verhältniß der Grundflächen FC×FC: fc×fc die Verhältniß der Höhen FC: fc hinzusetzet, so bekommet man allerdings eine Verhältniß, welche aus der Verhältniß FC: fc dreymal genommen bestehet.

§. 101. Man siehet vor sich, daß man in diesen Verhältnissen an die Stelle der Halbmesser FC, fc jederzeit die verdoppelten Halbmesser, oder die ganzen Durchmesser, AD, ad nehmen kön-

könne, weil dadurch die Verhältniß nicht geändert wird, wie auch daß eine ganze Kugel sich zu einer andern ganzen Kugel nicht anders verhalte, als die Helfte der ersten zu der Helfte der zwoten. Demnach ist auch die Verhältniß der ganzen Kugel, von welcher ABDF die Helfte ist, zu der Kugel, deren Helfte abdf ist, aus der Verhältniß der Halbmesser AC: ac, oder aus der Verhältniß der Durchmesser AD: ad dreymal genommen, zusammen gesetzet: und die erstere Kugel verhält sich zu der letzteren, wie der Würfel dessen Seite AC ist, zu dem Würfel, welchen man aus der Seite ac machen kan, oder auch wie der Würfel aus dem ganzen Durchmesser AD, zu dem Würfel aus dem ganzen Durchmesser ad.

Von den regulären Cörpern.

102. Dieses war dasjenige, so wir von der Vergleichung der Cörper, welche in den Anfangsgründen zu betrachten am nöthigsten sind, zu sagen hatten. Denn man kan aus den gewiesenen Gründen noch die Eigenschaften anderer Cörper herleiten, welche von denjenigen, die wir abgehandelt haben, verschieden sind, und unter diesen sind die so genannten regulären Cörper. Es scheinet uns aber die Betrachtung derselben von viel zu geringem Nutzen, als daß wir unsere Leser damit aufhalten solten. Wir wollen indessen erklären, welche Cörper regulär genennet werden, damit wenigstens niemand durch das Wort aufgehalten werde. Man nehme bey dieser Erklärung einen Würfel zum Exempel, denn dieser Cörper ist auch regulär, so wird man dieselbe desto leichter einsehen. Ein Würfel lässet sich in einen andern Würfel von eben der Grösse hinein legen, wie man ihn auch kehren mag, so daß er denselben beständig ganz voll füllet. Eben dieses müssen alle reguläre Cörper thun, sie müssen andere reguläre Cörper füllen können, wie ein Würfel den andern füllet, welche Lage man ihnen auch geben mag, wenn man nur die Ecken beständig in die Ecken passet, wie man dieses auch bey den Würfeln beobachten muß.

§. 103. Doch diese Erklärung ist nicht hinlänglich, sich solche Cörper recht deutlich vorzustellen, und man kan demnach bemerken, daß zu einem regulären Cörper nachfolgendes erfordert werde. Er muß erstlich überall in Figuren von einerley Art eingeschlossen seyn, als in Dreyecke oder in Vierecke, oder in Fünfecke, und es müssen nicht einige Seiten desselben Dreyecke, und die andern Vierecke oder Fünfecke seyn. Diese Seiten des Cörpers müssen zweytens alle regu-

XI. Abschnitt. lär und einander gleich seyn, das ist, sie müssen entweder gleiche und gleichseitige Dreyecke, oder gleiche gleichwinklichte und gleichseitige Vierecke, oder gleiche gleichwinklichte und gleichseitige Fünfecke seyn: und drittens müssen alle Ecken des Cörpers gleich viele Seiten haben, wie eine jede Ecke des Würfels drey Seiten hat, und entstehet indem Dreye der Quadrate, welche den Würfel einschliessen, mit den Spitzen ihrer Winkel in einem Puncte zusammen lauffen. Es ist übrigens nichts daran gelegen, ob eine jede dieser Ecken nur aus drey oder auch aus vier oder fünf Flächen bestehe.

§. 104. Man hat nicht mehr als fünf solcher Cörper. Der erste ist vierseitig, und seine Seiten sind Dreyecke. Der andere ist sechs seitig, und seine Seiten sind quadrate. Dieses ist eben der Würfel. Der dritte ist achtseitig und seine Seiten sind wieder Dreyecke. Der vierte ist zwölfseitig, und seine Seiten sind reguläre Fünfecke, und der fünfte hat zwanzig Seiten, welche Dreyecke sind. Wil man sich dieselben deutlich vorstellen, so kan man ihre Seiten aus Papier ausschneiden, und hernach zusammen leimen. Man findet dazu in den gemeinen Büchern eine weitläufftige Anweisung. Wir können uns dabey nicht aufhalten: Denn eigentlich ist es unschicklich, Dinge zu erklären, welche man nicht weiter betrachtet.

Von den Oberflächen der Cörper.

§. 105. Wir sind also nunmehro an der Betrachtung der gekrümmeten Oberflächen der Cörper der ersten, der zweyten und der dritten Art. Denn wir haben bereits X, 4. erinnert, daß die geraden Oberflächen der Cörper zu betrachten etwas überflüssiges wäre. Diese Betrachtung sol hauptsächlich dahin gehen, daß wir in Stand gesetzet werden, einzusehen, wie die gekrümmeten mit geraden Oberflächen zu vergleichen sind. So bald dieses bekannt seyn wird, werden wir auch die krummen Flächen eben wie die geraden mit einander vergleichen können, und dieses ist das Hauptsächliche, so man bey denselben suchet.

§. 106. Wie werden aber nicht alle gekrümmete Oberflächen der Cörper, welche wir betrachtet haben, auf diese Art abhandeln können. Einige derselben lassen sich nicht vermittelst der Grundsätze, auf welche man in den Anfangsgründen bauet, mit geradelinichten Flächen vergleichen. Sie erfordern die Känntniß noch anderer krummen Linien, als der blossen Cirkelkreise, und fallen also ausser die Gränzen derjenigen Linien, welche man in den Anfangsgründen brauchet. Dergleichen

gleichen sind die Oberflächen der schiefen Cylinder und Kegel, und es gehöret also bloß die Betrachtung der gekrümmeten Oberflächen der geraden Cylinder und Kegel, wie auch einiger Cörper der dritten Art, hieher, und unter diesen insonderheit die Oberfläche der Kugel selbst.

§. 107. Damit wir in diesen Beweisen etwas kürzer verfahren können, wollen wir anmerken, daß ein jeder Cirkel als ein Vieleck von unendlich kleinen Seiten betrachtet werden könne, in welchem die Spitzen der Winkel, so die Seiten einschliessen, alle gleich weit von dem Mittelpuncte entfernet sind. Wir haben dieses oben IX, 33, da wir insbesondere von dem Cirkel handelten, nicht zum Grunde legen mögen, weil doch immer dabey sich noch einige Schwierigkeit findet; und man glauben kan, daß, indem man dergleichen annimmet, man zwar sehr wenig, aber doch etwas fehle. Nach den Beweisen aber, die wir von dem Cirkel gegeben haben, fället die Undeutlichkeit, welche die Redensart verursachen möchte, und die daraus entspringende Furcht eines Fehlers, hoffentlich ganz weg. Man kan, wenn man eigentlich reden wil, einen Umkreiß, oder überhaupt eine Grösse, nicht in unendlich kleine Theile theilen. Wie klein man auch die Theile machen wil, so haben sie doch immer ihre bestimmete Grösse: und die Theile des Umkreises werden niemals gerade Linien, sondern bleiben immer krumm. Es wil aber auch die Redensart, wenn man saget, daß man einen Cirkel sich als ein Vieleck von unendlich kleinen Theilen vorstellen könne, dieses nicht sagen, daß jemals die Theile des krummen Umkreisses des Cirkels gerade Linien werden können; sondern bloß, daß, wenn man den Umkreiß immer weiter und weiter theilet, und die Sehnen dieser Theile ziehet, diese Sehnen immer dem Umkreisse näher kommen, und daß die Entfernung einer jeden derselben von dem Mittelpuncte, von dem Halbmesser des Cirkels, immer weniger verschieden werde: wie auch, daß, weil man niemals gezwungen wird, in der Theilung aufzuhören, sondern einen jeden noch so kleinen Bogen immer weiter und weiter theilen kan, man auch den Umkreiß eines in einem Cirkel beschriebenen Vieleckes, dem Umkreisse des Cirkels, und die Entfernung einer jeden Seite desselben von dem Mittelpuncte dem Halbmesser des Cirkels, so nahe bringen könne als man wil. Dieses wil man allein anzeigen, wenn man saget, daß der Cirkel durch die fortgesetzete Theilung seines Umkreisses endlich in ein Vieleck von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten verwandelt werde, welche alle von dem Mittelpuncte gleich weit entfernet sind; und daß man einen

nen jeden Cirkel als ein dergleichen Vieleck ansehen könne. Wir haben aber IX, 33 gesehen, daß eben daraus, so jedermann bey dem Cirkel zugeben muß, nemlich, daß die Theilchen des Umkreisses desselben immer weiter getheilet werden können, und dadurch geraden Linien immer näher und näher kommen, keine andere als solche Sätze geflossen sind; welche man auch würde heraus gebracht haben, wenn man sich den Cirkel als eine geradelinichte Figur, wie wir sie eben beschrieben haben, vorgestellet hätte: und es wird also auch in ähnlichen Fällen aus diesem Begriffe des Cirkels nichts anders fliessen können, als was durch Beweise, welche denjenigen ähnlich sind, vermittelst welcher wir einen Cirkel mit einem Dreyecke verglichen haben, gefolgert werden könte. Man kan also, wenn man den Cirkel ein Vieleck von unendlich kleinen Seiten nennet, dessen Ecken alle gleich weit von dem Mittelpuncte entfernet sind, dieses als eine Redensart annehmen, welche dasjenige alles, so in dem weitläuftigen Beweise enthalten ist, den wir bey der Cirkelmessung gegeben, kurz ins Gedächtniß bringet, weil in der That nicht anders als durch jenen Beweiß dargethan werden kan, daß man in der Anwendung nicht im geringsten fehle, wenn man sich den Cirkel als eine geradlinichte Figur von unendlich kleinen Seiten vorstellet.

Oberflächen der geraden Cylinder.

§. 108. Es sey nunmehro ABCD ein gerader Cylinder. Man ziehe in der Oberfläche desselben die gerade Linie AB: man mache derselben die ab gleich, und setze auf die äussersten Puncte dieser ab die Perpendicularlinien ad, bc von unbestimmeter Länge. Ferner nehme man in dem Umkreisse BC das Theilchen BE so klein, daß es von einer geraden Linie nicht zu unterscheiden ist, und mache $be = BE$. Wenn man nun auch durch BE, in der Oberfläche des Cylinders, die gerade Linie EF ziehet, welche der AB parallel seyn wird, und durch e die ef, parallel mit der ab: so ist AE von dem geradewinklichten Vierecke ae nicht zu unterscheiden, sondern AE ist der ae gleich und ähnlich. Fähret man nun fort, in dem Umkreisse BC ein Theilchen EG zu nehmen, so von einer geraden Linie nicht verschieden ist, machet wieder $eg = EG$, und ziehet die geraden Linien HG, hg, wie vorhero; so wird wieder $EH = eh$: und folgends ist die Summe der beiden rechtwinklichten Vierecke $AE + FG$, das ist, der Theil der Oberfläche der Walze AG, der Summe der geradewinklichten Vierecke $ae + fg$, das ist, dem Vierecke ag, gleich. Verfolget man aber diese Schlüsse

F. 339.

noch

noch ferner bis endlich bi, dem Bogen BI gleich wird: so wird man durch dieselbe dahin geleitet, daß man einsiehet, es sey das geradewinklichte Viereck abik dem Theile der Cylindrischen Oberfläche ABIK gleich. Man ist also im Stande, eine geradewinklichte Figur anzugeben, von welcher man zeigen kan, daß sie einem Theil der Oberfläche einer Walze gleich sey.

§. 109. Es ist nemlich diese der Cylindrischen Oberfläche ABIK gleiche Figur abik ein geradewinklichtes Viereck, dessen Höhe ab so groß ist, als die Höhe des Cylinders AB, und dessen Grundlinie bi dem Theile des Umkreises der Grundfläche BI gleich ist, welcher zwischen den geraden Linien AB, IK lieget, die die Cylindrische Oberflächen ABIK von beiden Seiten einschliessen. Man siehet leicht, daß hieraus folgen müsse, daß die ganze Cylindrische Oberfläche einem geradewinklichten Vierecke gleich sey, dessen Grundlinie dem ganzen Umkreise der Grundfläche BCB gleich, und dessen Höhe von der Höhe des Cylinders AB nicht verschieden ist.

Oberflächen der geraden Kegel.

§. 110. Auf eben die Art stellet man sich eine geradelinichte Figur vor, welche einem Theile der Oberfläche eines geraden Kegels ABC gleich ist. Man mache ab der Seite des Kegels AB gleich, und setze an dieselbe durch b die Perpendicularlinie bc von unbestimmeter Länge. Man nehme in dem Umkreise der Grundfläche des Kegels BD so klein, daß sie von einer geraden Linie nicht unterschieden werden kan, und dieser BD mache man die bd gleich. Man ziehe die geraden Linien AD in der Oberfläche des Kegels, wie ad in der Ebene, in welcher ab, bc liegen; so ist ABD ein geradelinichtes Dreyeck, dessen Höhe von der Länge der Seite des Kegels nicht verschieden ist. Denn eigentlich ist das Dreyeck BAD gleichschenklicht, weil AB = AD. Dieses verhält sich bey einem geraden Kegel jederzeit so; und demnach fället die Höhe dieses Dreyeckes in die Mitte zwischen AB und AD, und theilet BD in zwey gleiche Theile. Nun aber ist XI, 52 eine jede gerade Linie, die von A an BD, oder sonst an den Umkreis der Grundfläche kan gezogen werden, der Seite des Kegels, und folgends auch der ab gleich. Also haben die Dreyecke ABD, abd gleiche Höhen. Es ist aber auch die Grundlinie BD der Grundlinie bd gleich, und folgends ist auch das Dreyeck abd gleich dem Dreyecke ABD, IX, 14. Fähret man nun wieder in dieser Betrachtung weiter fort, und machet in Ge-

F. 340.

XI. Abschnitt. danken auch de = DE, denn würklich kan man DE nicht so klein nehmen, daß sie von einer geraden Linie nicht verschieden wäre, und ziehet sodann AE, ae; so siehet man, vermittelst eben der Schlüsse, daß die Dreyecke ADE, ade gleich seyn, weil so wohl ihre Grundlinien DE, de gleich sind, als auch ihre Höhen. Denn die Höhe des Dreyeckes ADE ist wieder die Seite des Kegels; und die Höhe des Dreyeckes ade ist die Perpendicularlinie ab, welche man gleich Anfangs der Seite des Kegels gleich gemachet hat. Und wenn durch die Wiederholung dieser Schlüsse endlich bf dem Bogen BF gleich wird, und man ziehet AF, af, so siehet man, daß das Dreyeck abf dem Theile der Conischen Oberfläche ABF gleich seyn müsse, weil ABD = abd, ADE = ade und so fort, und also die Summen dieser Theile ABF, abf nicht verschieden seyn können.

§. 111. Also ist ein jeder Theil einer Conischen Oberfläche ABF, welcher von zwoen Seiten derselben AB, AF, und einem Theile des Umkreises der Grundfläche BF beschlossen wird, der zwischen diesen zwo Seiten lieget, einem Dreyecke abf gleich, dessen Höhe ab der Seite des Kegels, und dessen Grundfläche bf dem gedachten Bogen BF gleich ist. Dieses ist jederzeit richtig, es mag der Bogen BF groß oder klein seyn: also muß es auch statt haben, wenn man an statt des BF den ganzen Umkreis der Grundfläche des Kegels nimmet. In diesem Falle aber bekommet man auch die ganze Oberfläche des Kegels: und demnach ist die ganze Oberfläche eines geraden Kegels einem Dreyecke gleich, dessen Höhe der Seite des Kegels, und dessen Grundlinie dem Umkreise der Grundfläche desselben, gleich ist.

§. 112. Hat man nun auf die Art dem Theile der Conischen Oberfläche ABF das Dreyeck abf gleich gemachet, aber auch den Kegel ABC mit einer Fläche, die der Grundfläche BC parallel lieget, geschnitten, und durch diesen Schnitt, wie nothwendig geschehen muß, einen Cirkel DE hervor gebracht, dessen Bogen DG zwischen den zwo Seiten des Kegels AB und AF lieget: so kan man ohne grosse Weitläuftigkeit eine geradlinichte und ebene Figur schaffen, welche der gekrümmeten Figur DBFG gleich ist, die von den beiden Cirkelbogen DG und BF, und von den geraden Linien DB und GF in der Oberfläche des Kegels beschlossen wird. Man mache nur in dem bereits verfertigten Dreyecke abf die ad der AD gleich, und ziehe dg mit der bf parallel, so ist das Viereck dbfg der Figur DBFG gleich.

F. 341.

§. 113.

§. 113. Man siehet, daß, wenn man dieses erweisen sol, nichts zu zeigen sey, als daß das Dreyeck adg der gekrümmeten Figur ADG gleich sey. Denn man hat vorhero abf der ABF gleich gemachet. Ist nun auch adg = ADG, und man ziehet gleiches von gleichem ab, so bleibet allerdings abf — adg = ABF — ADG; das ist, wie man aus der Figur siehet, DBFG = dbfg. Wiederum, wenn man beweisen sol, daß adg der ADG gleich sey: so hat man nur zu zeigen, daß dg dem Bogen DG gleich sey. Denn wenn die gerade Linie dg dem Bogen DG gleich ist, so folget allerdings XI, 110, daß auch das Dreyeck adg der gekrümmeten Oberfläche ADG gleich sey, weil man auch ad der AD gleich gemachet hat. Dieses aber, daß dg = DG, siehet man ein, wenn man in der Grundfläche des Kegels BC an dem Mittelpuncte H die geraden Linien BH und FH ziehet, welche mit der Axe des Kegels AH die Dreyecke ABH, AHF einschliessen werden. Diese Dreyecke ABH, AHF schneiden die Fläche des Cirkels DEG in den geraden Linien DI und IG, deren erstere DI der BH, und die zwote IG der HF parallel lieget, und also ist auch der Winkel DIG dem Winkel BHF gleich, X, 61. Weil aber das Punct I, in welchem die Axe AH den Cirkel DEG durchsticht, der Mittelpunct dieses Cirkels ist, wie aus dem Beweise folget, vermittelst welchen wir gezeiget, daß der Schnitt eines Kegels, welcher seiner Grundfläche parallel lieget, ein Cirkel sey, XI, 54: so ist DIG ein Ausschnitt des Cirkels DGE, gleich wie BHF ein Ausschnitt des Cirkels BFC ist, welcher die Grundfläche abgiebet, und diese Ausschnitte DIG, BHF sind einander ähnlich, VII, 52: folgends hat die Proportion BH : DI = BF : DG ihre Richtigkeit, VII, 53. Nun aber ist auch BH : DI = AB : AD, und wenn man also die letzteren dieser Verhältnisse an statt der ersteren in der vorigen Proportion setzet, so hat man AB : AD = BF : DG. Nun ist auch in dem Dreyecke abf, ab : ad = bf : dg, VII, 12, und es ist ab = AB, ad = AD, bf = BF, das ist, die drey ersteren Glieder der Proportionen, die wir eben gezeiget haben, sind einander gleich: also können auch die vierten Glieder derselben nicht verschieden seyn, sondern man hat auch dg = DG, welches zu erweisen war.

§. 114. Es ist dieser Beweiß fast etwas zu weitläuftig gerathen. Wir hätten kurz sagen können ABFH sey eine Art eines Cörpers der zwoten Art, dessen Grundfläche der Ausschnitt BHF ist: und also müsse die Figur DIG, welche durch den Schnitt zum Vorschein kommet, der mit der Grundfläche parallel geführet wird, dieser Grundfläche

XI. Abschnitt. fläche BHF ähnlich, und folgends ebenfals der Ausschnitt eines Cirkels seyn. Denn dieses ist die allgemeine Eigenschaft aller Cörper der zwoten Art, XI, 49. Man mag nun aber den Beweiß auf diese oder jene Art geführet haben, so siehet man klar, daß der Theil der gekrümmeten Oberfläche eines geraden Kegels DBFG einem Vierecke dbfg gleich sey, dessen zwo entgegen gesetzete Seiten bf, dg parallel liegen, und deren erstere bf so groß ist als der Bogen BF, und die zwote dg so groß als der Bogen DG. Die Entfernung aber der Seite dg von der ihr entgegen gesetzeten bf, das ist, die Seite db ist der geraden Linie DB gleich, welche in der Oberfläche des Kegels, zwischen den Bogen DG und BF, kan gezogen werden. Dieses ist wiederum von allen dergleichen Oberflächen solcher Kegel, an welchen man aber einen Theil ADGE abgenommen hat, richtig. Gehet aber eine dergleichen Oberfläche zwischen den Umkreisen der Cirkel DEG, BFC rings herum, von DB, zum Exempel bis wieder an DB; so muß man an statt der dg eine gerade Linie setzen, welche dem ganzen Umkreisse DGED gleich ist, und an statt der bf eine andere, welche so groß ist als der Umkreis BFCB; das übrige alles bleibet, wie gewiesen worden ist.

§. 115. Es ist leicht das Viereck dbfg in ein geradwinklichtes Viereck zu verwandeln, und also ein geradwinklichtes Viereck zu schaffen, welches einem Theile der Conischen Oberfläche von der Art, welche wir betrachten, gleich sey. Ja man kan dieses unmittelbar, und zwar mit noch grösserer Leichtigkeit thun, als wir das Viereck dbfg zu verzeichnen gewiesen haben. Man theile db in h in zwey gleiche Theile, und ziehe hi den bf und dg parallel, bis an die af; so ist das geradwinklichte Viereck, welches man aus db und hi zusammen setzen kan, dem Vierecke dbfg gleich: Wenn nemlich, wie wir angenommen haben, der Winkel bey b gerade ist. Man machet dieses Viereck, wenn man durch i die kl der db parallel ziehet, und dg bis an diese Seite in k verlängert. Denn daß dieses Viereck dblk dem Vierecke dbfg gleich sey, siehet man daraus leicht, weil die Dreyecke gki, ilf gleich sind. Es ist in diesen Dreyecken $ki = dh = hb = il$, die Winkel derselben bey i sind gleich, und die Winkel bey k und l sind gerade. Also haben diese Dreyecke gki, ilf zween gleiche Winkel, und eine Seite des einen ist einer Seite des andern gleich. Nun aber entstehet das Viereck dblk aus dem Vierecke dbfg, wenn man von diesem das Dreyeck ilf abschneidet, und an dessen Stelle das Dreyeck gik anstücket. Da also dasjenige, so man weggenommen, demjeni-

F. 342.

jenigen gleich ist, so man an dessen Stelle angesetzet, so ist allerdings das Viereck dblk dem Vierecke dbfg gleich.

§. 116. Um nun aber dieses geradwinklichte Viereck bk, welches dem Theile BG der Conischen Oberfläche gleich ist, auf einmal zu machen, oder die gerade Linie hi, welche der Grundlinie dieses Viereckes bl gleich ist, auf einmal zu finden, theile man nur DB in zwey gleiche Theile mit H, und ziehe durch H in der Oberfläche des Kegels zwischen DB und GF den Cirkelbogen HI; oder stelle sich vor, daß durch H der Kegel mit der Grundfläche BC parallel geschnitten worden sey, und daß durch diesen Schnitt der Bogen HI entstanden: so ist dieser Bogen HI der geraden Linie hi gleich. Und dieses siehet man aus dem so erwiesen worden, gar leicht ein. Denn gleichwie daraus, daß bf = BF, ab = AB, und ad = AD, hat können geschlossen werden, daß auch dg dem Bogen DG gleich sey: XI, 113. also wird man auch, wenn man das übrige behält, so gesetzet worden, und über dieses zum Grunde setzet, daß ah der AH gleich sey, auf eben die Weise folgern können, es müsse hi dem Bogen HI gleich seyn. Nun aber ist db = DB in h in zwey gleiche Theile geschnitten, und DB ist in H eben so getheilet: es ist demnach dh = DH. Weil aber auch ad = AD, so ist ad + dh = AD + DH, das ist ah = AH; folgends ist an der Gleichheit der Linien HI, hi keinesweges zu zweifeln.

§. 117. Ist aber der Theil der Oberfläche des Kegels DGFB einem geradwinklichten Vierecke gleich, dessen Grundlinie dem Bogen HI, und dessen Höhe der geraden Linie DB gleich ist, so muß auch die ganze gekrümmete Oberfläche, die zwischen den Umkreisen der Cirkel DGED und BFCB enthalten ist, einem geradwinklichten Vierecke gleich seyn, welches ebenfals zur Höhe die DB hat, und auf einer geraden Linie stehet, welche dem ganzen Umkreise des Cirkels, von welchem der Bogen HI einen Theil abgiebet, gleich ist, welcher Cirkel nemlich entstehet, wenn man den Kegel durch das Punct H, welches von D und B gleich weit entfernet ist, mit der Grundfläche desselben parallel schneidet, und dessen Fläche folgends von der Fläche DGE eben so weit entfernet ist, als von der Fläche BFC.

§. 118. Hieraus nun lässet sich ein Theil der Oberfläche eines abgekürzeten Kegels, dergleichen wir bisher betrachtet haben, oder auch die ganze Oberfläche eines abgekürzeten Kegels, mit der Oberfläche eines Cylinders vergleichen; und zwar ist man im Stande zwo gerade

XI. Abschnitt. F. 349.

Linien zu schaffen, welche sich gegen einander, wie diese Oberflächen, verhalten: unter den Umständen nemlich, die wir gleich angeben werden. Es sey ABC der Ausschnitt eines Cirkels, und auf demselben stehe der gerade Cörper der ersten Art ABCDEF, welcher ein Theil eines Cylinders seyn wird. Man beschreibe in der Ebene ABC um den Mittelpunct C mit einer beliebigen Oefnung des Cirkels, den Bogen GH zwischen ACB, und mit einem kleineren Halbmesser beschreibe man um D innerhalb EDF den Bogen IK. Wenn man nun auch IG, KH ziehet, so siehet man, daß der Cörper DCHGIK ein Theil eines abgekürzeten Kegels seyn werde, wenn man nur auch die Oberfläche IKHG sich also gebogen vorstellet, wie die Oberfläche eines Kegels gebogen seyn muß. Die Oberfläche nun dieses Cörpers IGHK wollen wir mit der Cylindrischen Oberfläche ABFE vergleichen. Man theile zu dem Ende DC in L in zwey gleiche Theile, und ziehe die Ebene LMN mit der Grundfläche ABC parallel, welche die Cylindrische Oberfläche in dem Bogen MN und die Conische in dem Bogen OP schneiden wird. Man ziehe auch KQ der DL oder FM parallel, und setze auf KH in der Fläche BCDF die PR perpendicular, welche die DC in R erreiche.

§. 119. Diese Fläche LMN wird auch die gerade Linien KH und FB in zwey gleiche Theile theilen; X, 62. und da also der Bogen OP durch P, die Mitte der Seite KH gehet, so wird die Conische Oberfläche IGHK einem geradewinklichten Vierecke gleich seyn, dessen Seiten sind der Bogen OP, oder eine gerade Linie, die demselben gleich ist, und KH. XI, 116. Nun ist die Cylindrische Oberfläche EB ebenfals einem geradewinklichten Vierecke gleich, dessen Seiten sind AB = NM und FB, XI, 108. und die Verhältniß jeder Vierecke von dieser Art ist aus den Verhältnissen ihrer Seiten zusammen gesetzet. IX, 47. Demnach kommet die Verhältniß der IGHK zu der EABF, wenn man die Verhältniß KH : FB, der Verhältniß OP : MN zusetzet. An die Stelle der ersten dieser Verhältnisse KH : FB kan man die Verhältniß der Helften dieser Linien KP : FM nehmen, oder auch KP : KQ, weil KQ = FM. Was aber die Verhältniß OP : NM anlanget, so ist dieselbe der Verhältniß der Halbmesser PL : ML gleich, weil die Ausschnitte MLN, PLO gleichwinklicht sind; VII, 53. folgends wird auch die Verhältniß IGHK : EABF aus den zwo Verhältnissen KP : KQ und PL : ML zusammen gesetzet. Da nun aber der Winkel KPR gerade ist, so ist LPR die Ergänzung des Winkels KPL zu einem

nem geraden Winkel. Und weil das Dreyeck PKQ bey Q ebenfals geradewinklicht ist, so ersetzet auch PKQ dasjenige, was dem Winkel LPK an einem geraden Winkel fehlet: denn die zween spitzige Winkel eines geradewinklichten Dreyeckes geben allezeit einen geraden Winkel, wenn man sie zusammen setzet. Demnach ist der Winkel LPR dem Winkel PKQ gleich, und also sind die rechtwinklichten Dreyecke PLR, PKQ einander ähnlich, VII, 23. die Verhältniß der Seiten PK:KQ ist der Verhältniß PR:PL gleich, und man kan die letztere dieser Verhältnisse an statt der ersteren in der Zusammensetzung gebrauchen. Thut man aber dieses, in dem Falle welchen wir vor uns haben, so findet man, daß die Verhältniß der Oberflächen IGHK:EABF, welche aus den Verhältnissen KP:KQ und PL:ML zusammen gesetzet ist, auch aus den Verhältnissen PR:PL, und PL:ML zusammen gesetzet sey. Da aber in diesen Verhältnissen PL einmal als das zwote, und das andere mal als das erste Glied vorkommet: so ist die Verhältniß PR×PL:PL×ML mit der Verhältniß PR:ML einerley, VIII, 40. und also auch IGHK:EABF = PR:ML, oder PR:BC.

XI. Abschnitt.

§. 120. Ist nun also PR der BC gleich, so ist auch die Conische Oberfläche IGHK der Cylindrischen EABF gleich. Und man kan also, nachdem man PR gezogen hat, gar leicht eine Cylindrische Oberfläche machen, welche so groß sey als die Conische IGHK, weil man allezeit die CB der PR gleich nehmen, und so dann das übrige ausmachen kan wie die Zeichnung weiset. Man siehet leicht, daß dieses auch richtig sey, wenn man vor die Grundflächen keine Ausschnitte von Cirkeln, sondern halbe oder ganze Cirkel annimmet. Ja weil nichts daran gelegen ist, wie groß man die obere Fläche des abgekürzten Kegels IDK annehme, so muß auch eben der Beweiß sich auf den Fall erstrecken, wenn IDK gar keine Grösse hat, und also von dem Kegel nichts abgeschnitten worden ist, sondern derselbe ganz geblieben. Es ist aber nicht nöthig, daß wir uns hiebey aufhalten, weil die Oberflächen der Kegel bereits betrachtet worden sind, und wir nur in dasjenige zurück fallen würden, so wir schon abgehandelt, wenn wir diesen Sätzen weiter nachhängen wolten.

Oberflächen der Kugeln.

§. 121. Wir wollen also weiter gehen, und uns nach und nach der letzten Betrachtung nähern, die wir hier zu machen haben, welche

XI. Abschnitt. die Oberfläche der Kugel und der Theile derselben zum Inhalte hat. Man setze die Theile verschiedener abgekürzten Kegel ABCDEF, F. 344. DEFGHI, IGHK, dergleichen wir bishero betrachtet haben, und deren Grundflächen alle einander ähnlich sind, dergestalt auf einander, daß die Axen derselben die gerade Linie CK geben, und die geraden Linien BF, FG, GK einen Theil eines regulären Vieleckes BFGK ausmachen, dessen Mittelpunct C ist. Es wird die Perpendicularlinie, welche, wie LC, auf der Mitte einer dieser Seiten stehet, nach den Mittelpunct C gehen, V, 23. und alle dergleichen Perpendicularlinien werden einander gleich seyn. V, 34. Man setze auf die Grundfläche ABC auch den Cörper der ersten Art ABCKMN, und verlängere die Grundflächen der abgekürzeten Kegel, bis sie die gekrümmete Oberfläche ABNM in OP, QR schneiden: so wird sich die Conische Oberfläche ABFE zu der Cylindrischen ABRQ verhalten, wie LC zur BC, und die Conische Oberfläche EFGI wird zu der Cylindrischen QRPO eben die Verhältniß LC:BC haben, weil die Perpendicularlinie auf die Mitte der FG, die bis in C reichet, der LC gleich ist: und aus eben der Ursach wird auch die Conische Oberfläche IGK sich zu der Cylindrischen MNPO verhalten wie LC:BC.

§. 122. Betrachtet man diese Proportionen:

ABFE : ABRQ = LC : BC
EFGI : QRPO = LC : BC
IGK : OPNM = LC : BC etwas genauer, so siehet man, daß man auch jede zwey oder drey oder mehrere der ersteren Glieder zusammen setzen könne, ohne die Verhältniß zu verändern, weil die Verhältniß jeder solcher Theile der Verhältniß LC:BC gleich ist. VI, 102. Es ist nemlich, wenn man die ersteren Glieder der zwo ersteren Proportionen, wie sie unter einander stehen, zusammen setzet: AF+FI:AR+RO=LC:BC, und wenn man die ersteren Glieder aller Proportionen addiret, so wird: AF+FI+IGK:AR+RO+ON =LC:BC, und dieses beständig. Woraus man siehet, daß auch ein jedes Theil der gekrümmeten Oberfläche ABK sich zu einem jeden Theile der gekrümmeten Oberfläche ABNM verhalte, wie sich LC zur BC verhält, wenn diese Theile zwischen zwoen der Flächen MKN, OHP, QDR und so fort, liegen, man mag diese zwo Flächen übrigens annehmen wie man wil. Als, der Theil der einen Oberfläche KIEFGK lieget mit dem Theile der andern MQRN zwischen den zwoen

zwoen Flächen MKN und QDR. Also verhält sich HIEFGK zu MQRN, wie LC zur BC.

XI. Abschnitt.

§. 123. Alles dieses ist wieder richtig, es mag der Bogen AB so groß seyn als man wil, und er kan also auch ein ganzer Cirkelkreis seyn, in welchem Falle man an die Stelle des Cörpers ABCKMN einen Cylinder bekommet, und an statt der ABCDEF, und so weiter, abgekürzete Kegel. Wir haben diese Cörper in der 345 Zeichnung vorgestellet. ABDE ist der Cylinder, und ABF der aus abgekürzeten Kegeln dergestalt zusammen gesetzete Cörper, daß die Seiten derselben die Helfte des Umkreises eines regulären Vieleckes AFB ausmachen. Die ebene Fläche GH, welche zween dieser Kegel von einander absondert, schneidet die Oberfläche des Cylinders bey IK: Und es verhält sich die Oberfläche GFH zur Oberfläche EIKD wie CL zur CA. Eben so verhält sich auch AGHB zur AIKB, und die ganze Oberfläche AFB zur ganzen Oberfläche EABD.

F. 345.

§. 124. Weil CL, die Entfernung einer Seite des Vieleckes von dem Mittelpuncte C, immer kleiner ist als BC, die Entfernung der Spitze eines Winkels desselben, oder der Halbmesser des Cirkels, in welchem das Vieleck kan beschrieben werden: so ist auch die Oberfläche KAB kleiner als die Oberfläche ABNM, und eben so ist es mit den Theilen dieser Oberflächen beschaffen, welche sich ebenfals wie LC: BC verhalten. Und zwar ist die Oberfläche KAB desto kleiner als ABNM, je weniger Seiten BFGK hat. Denn je kleiner die Zahl der Seiten eines regulären Vieleckes ist, und je grösser also diese Seiten sind, je weniger sind dieselben von dem Mittelpuncte entfernet. V, 37. Und es wird also LC in Ansehung der BC desto kleiner, je weniger dieser Seiten in BFGK sind. Im Gegentheile wächset die LC, wenn die Seiten an der Zahl mehrere werden, und kommet der BC nach und nach ziemlich nahe, wenn AFGK sehr viele Seiten bekommet. In diesem Falle muß also auch die Oberfläche KAB der Oberfläche MABN gar nahe kommen. Sind derer Seiten in BFGK gar sehr viele, so ist LC kaum mehr von dem Halbmesser BC zu unterscheiden, und demnach auch die Oberfläche KAB ohne merklichen Fehler so groß, als die Oberfläche MABN.

F. 344.

§. 125. Vollkommen gleich aber wird die Oberfläche KAB der Cylindrischen Oberfläche MABN nicht eher, als bis LC der BC gleich wird, welches geschiehet, wenn der Seiten in BFGK unendlich viele

 wer-

XI. Abschnitt. worden, das ist, wenn BFGK nicht ein Theil des Umkreises einer geradelinichten Figur ist, sondern der vierte Theil eines Cirkels, wie dieses in der 346 Zeichnung vorgestellet wird. In diesem Falle ist KABC ein Theil einer Kugel, dergleichen wir unter den Cörpern der dritten Art betrachtet haben. Wenn man nun auch hier auf ACB den Ausschnitt eines Cylinders ABCKMN setzet, dessen Höhe dem Radius der Grundfläche gleich ist, und ziehet eine Fläche QRD nach Belieben den Grundflächen ABC, MNK parallel, welche die Oberfläche KAB in EF, und die Oberfläche MABN in QR, schneidet: so sind die gekrümmeten Oberflächen KEF, und MQRN einander vollkommen gleich, und EABF ist gleich der QABR, die ganze KAB aber der ganzen Cylindrisch-gekrümmeten Oberfläche MABN.

F. 346.

§. 126. Man siehet wieder, daß dieses ebenfals von einer halben Kugel AFB richtig seyn müsse, auf deren Grundfläche AB der Cylinder ABDE stehet, dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel FC gleich ist. Auch hier ist der Theil der Oberfläche der Kugel GFH, der Oberfläche des Cylinders EIKD gleich, man mag die Fläche IK der Grundfläche AB parallel geleget haben, durch welches Punct der EA man wil, und der Theil der Oberfläche der Kugel AGHB ist so groß, als die Cylindrische Oberfläche AIKB; demnach ist auch die Oberfläche der halben Kugel AFB der ganzen Cylindrischen Oberfläche EABD gleich. Und weil überhaupt jede Oberfläche eines geraden Cylinders einem geradewinklichten Vierecke gleich ist, dessen Grundlinie dem Umkreise der Grundfläche des Cylinders gleich ist, und welches mit dem Cylinder einerley Höhe hat: XI, 108. so ist auch ein jeder Theil der Oberfläche einer halben Kugel GFH einem rechtwinklichten Vierecke gleich, dessen Grundlinie dem Umkreise der Grundfläche der halben Kugel AB, und dessen Höhe der Höhe FL des abgeschnittenen Theiles der Kugel, gleich ist, von dessen Oberfläche die Rede ist. Eben dieses ist auch von der Oberfläche des Theils AGHB richtig. Sie ist einem geradewinklichten Vierecke gleich, dessen Grundlinie wieder dem Umkreise AB gleich ist, und die Höhe der CL.

F. 347.

§. 127. Man schliesset hieraus leicht, daß auch die ganze Oberfläche einer Kugel FGCH der Oberfläche des Cylinders EABD gleich sey, dessen Höhe EA so wohl als der Durchmesser seiner Grundfläche AB dem Durchmesser der Kugel gleich ist. Und daß eine jede Fläche IK, welche der Grundfläche AB des Cylinders parallel ist, in welchem man eine Kugel gesetzet hat, die Oberfläche der Kugel in zwey Theile GFH,

F. 348.

GFH, HCG theile, deren ersterer der Oberfläche des Cylinders EIKD, und der zwente der Oberfläche des Cylinders IABK gleich ist: und was dergleichen kleine Sätze mehr sind.

XI. Abschnitt.

§. 128. Wil man nun ein geradewinklichtes Viereck schaffen, welches der Oberfläche des Cylinders EABD gleich sey; so muß man zur Grundlinie desselben eine gerade Linie nehmen, welche dem Umkreise des Cirkels ED oder AB gleich ist, und welches zur Höhe die Höhe des Cylinders EA hat. Da nun aber der Cirkel AB einem geradewinklichten Vierecke gleich ist, dessen Grundlinie so groß ist als der Umkreis des Cirkels AB, und dessen Höhe dem vierten Theile des Durchmessers eben des Cirkels AB gleich ist: IX, 36. so siehet man, daß das geradewinklichte Viereck, welches der ganzen Oberfläche der Kugel FGCH gleich ist, viermal so groß sey als das Viereck, welches so groß ist als der Cirkel AB. Hieraus aber folget, daß auch die Oberfläche der Kugel viermal so groß sey als der Cirkel AB, dessen Durchmesser dem Durchmesser der Kugel gleich ist.

§. 129. Wir schliessen hieraus ferner, daß die Oberflächen zwoer Kugeln sich gegen einander allezeit so, wie die Quadrate ihrer Durchmesser, verhalten. Denn die Cirkel, deren Durchmesser den Durchmessern der Kugeln gleich sind, verhalten sich gegen einander wie diese Quadrate der Durchmesser. Und wenn man einen jeden dieser Cirkel viermal so groß machet als er war, so wird dadurch die Verhältniß nicht geändert. VI, 104. Es werden aber durch diese Vergrösserung die Cirkel den Oberflächen der Kugeln gleich, welche eben die Durchmesser haben.

§. 130. Es entstehet ein Cirkel von der Grösse des AB durch einen jeden Durchschnitt der Kugel, vermittelst einer ebenen Fläche, welche durch den Mittelpunct der Kugel gehet, und ein jeder solcher Cirkel theilet die Kugel in zwo Helften. Wir müssen dieses nicht allein zur völligen Ergänzung des vorhergehenden bemerken: sondern wir haben es auch wegen eines ferneren Nutzens zu betrachten, welcher einige Känntniß der Linien, die in der Oberfläche der Kugel können gezogen werden, und der Figuren, welche zum Vorscheine kommen, wenn man eine Kugel auf verschiedene Art schneidet, erfordern. Das gesagete wird dadurch, wenn wir werden bewiesen haben, daß ein jeder Schnitt der Kugel, dessen Ebene durch den Mittelpunct

telpunct derselben gehet, einen Cirkel, der dem AB in allen Stücken gleich ist, zum Vorschein bringe, vollständig gemacht, indem daraus folget, daß kein Cirkel, welcher durch den Mittelpunct der Kugel gehet, vor einen andern solchen Cirkel einigen Vorzug habe, sondern daß, was wir in Ansehung der Grösse der Kugel und ihrer Oberfläche bewiesen haben, allezeit richtig sey, man mag die Kugel geschnitten haben, wie man wil.

§. 131. Der Satz selbst aber, daß alle Schnitte, in deren Flächen der Mittelpunct der Kugel befindlich ist, Cirkel zum Vorscheine bringen, die einander und dem Cirkel AB gleich sind, und die Kugel in zwey gleiche Theile theilen, kan auch als an sich bekannt angesehen werden; weil da die Oberfläche der Kugel von allen Seiten auf einerley Art gekrümmet ist, und alle Puncte der Oberfläche derselben von dem Mittelpuncte gleich weit abstehen, man sich nicht vorstellen kan, wie zween Schnitte, die in einer Kugel vollkommen auf einerley Art geschehen, von verschiedener Grösse oder nicht Cirkelrund seyn, oder die Kugel anders, als in zween gleiche Theile theilen solten. Es geschehen aber alle Schnitte, die durch den Mittelpunct gehen, vollkommen auf einerley Art. Indessen ist es auch nicht schwer einen recht bündigen Beweiß hievon zu geben. Wir verspahren denselben in die folgende Betrachtung.



Zwölfter Abschnitt.

Von den Kugelschnitten.

Die Figur dieser Schnitte.

§. 1.

Man stelle sich vor, daß die Kugel ABCD, deren Mittelpunct E ist, durch AGCH dergestalt geschnitten sey, daß der Mittelpunct der Kugel E in die Ebene dieses Schnittes AG=CH falle: so siehet man leicht, daß eben dieses Punct E auch von allen Puncten des Umkreises AGCH gleich weit entfernet seyn werde. Denn da dieser Mittelpunct E von allen Puncten der Oberfläche der Kugel gleich weit entfernet ist, so muß es nothwendig auch von allen Puncten des Umkreises AGCH gleich weit abstehen, weil dieselbe nothwendig in die Oberfläche der Kugel fallen. Es ist also AGCH ein Cirkel, und sein Mittelpunct fället in E, den Mittelpunct der Kugel. Schneidet man nun eben die Kugel auch mit der Fläche BGDH, so ist von dieser Figur eben das zu sagen, was bey der vorigen angemerket worden ist. Es ist also BGDH ebenfals ein Cirkel, welcher dem vorigen gleich seyn muß, weil sein Radius ebenfals zugleich der Radius der Kugel ist, und der Mittelpunct dieses Cirkels fället wieder in E. Wir gehen jetzo nicht weiter. Daß ein jeder dieser Cirkel die Kugel in zwo Helften theile, wird aus den Sätzen erhellen, die wir wegen ihres besonderen Nutzens aus dem gegenwärtigen schliessen müssen.

F. 349.

§. 2. Die Flächen der Cirkel AGCH und BGDH schneiden einander nothwendig innerhalb der Kugel; denn der Mittelpunct E lieget in einer jeden dieser Flächen, XII, 1. welches nicht seyn könnte, wenn sie einander nicht innerhalb der Kugel schnitten: also müssen die Umkreise derselben einander ebenfals schneiden, weil sie beyde in der Oberfläche der Kugel liegen. Man verknüpfe die Puncte H und G, in welchen die Umkreise einander schneiden, vermittelst der geraden Linie HG. Weil nun diese gerade Linie durch die beyden Puncte H, G gehet, welche die Flächen der Cirkel AGCH, BGDH gemeinschaftlich haben, so schneiden diese Flächen einander in der Linie HG, und alle übrigen

XII. Abschnitt. Puncte, welche die beyden Flächen gemeinschaftlich haben, fallen in diese Linie. X, 11. Nun ist der Mittelpunct E den beyden Cirkeln gemeinschaftlich: es fället also E in die gerade Linie HG, oder HG gehet durch E, den Mittelpunct des Cirkels AGCH, welcher zugleich der Mittelpunct des Cirkels BGDH ist. Also ist GH ein Durchmesser so wohl des einen als auch des andern dieser Cirkel, und HAG, HBG sind halbe Cirkel. Zween Cirkel also, der Flächen, die durch den Mittelpunct einer Kugel gehen, theilen einander in zwo gleiche Helften: die Bogen HAG, HBG, GCH, GDH aber sind Helften ihrer Umkreise.

F. 350. §. 3. Man schneide die Kugel ABCD, deren Mittelpunct E ist, nochmals mit einer Ebene AGCH, die durch den Mittelpunct E gehet, und ziehe durch E die gerade Linie BD auf die Fläche des Cirkels AGCH perpendicular. Durch diese Linie BD, lege man eine andere Fläche wie man wil, welche die Kugel ebenfals schneiden, und durch diesen Schnitt einen Cirkel DG=BH zum Vorschein bringen wird, welcher durch den Mittelpunct E gehet. Denn da die ganze DB in der Fläche des Schnittes DGBH lieget, und E in der DB befindlich ist, so muß allerdings auch E in der Fläche des Cirkels DGBH liegen. Es wird demnach dieser Cirkel von dem vorigen AGCH in zwey gleiche Theile getheilet, und der Bogen GDH ist die eine Helfte seines Umkreises, GBH aber die andere. Weil aber auch DE mit der GH rechte Winkel machet, indem sie auf der Ebene AGCH perpendicular stehet, X, 30. so sind die Bogen GD, DH, BG, BH Quadranten. Und hieraus siehet man, wenn man sich des Begrifes erinnert, welchen wir XI, 80. von der halben Kugel gegeben, daß AGDHC so wohl als AGBHC halbe Kugeln, und folgends einander gleich sind. Denn was von dem Cirkel DGBH gezeiget worden, ist von allen Cirkeln richtig, deren Flächen durch DB gehen, weil wir den Beweis weder auf diesen oder jenen eingeschränket haben, noch einschränken können.

§. 4. Hieraus nun schliessen wir weiter, daß, man mag eine Kugel mit einer ebenen Fläche schneiden wie und wo man wil, die Figur des Schnittes jederzeit ein Cirkel seyn werde. Denn man schneide die Kugel ABCD, deren Mittelpunct E ist, vermittelst der ebenen Fläche FG: so kan man eben die Kugel auch durch den Mittelpunct E mit der Ebene FG parallel schneiden, und ADC wird dadurch eine halbe Kugel, deren Grundfläche die AC ist. Nun haben wir XI, 80. gezeiget, daß nicht nur in einer halben Kugel, sondern auch in einem jeden

F. 351.

Ebe-

Cörper der dritten Art, der Schnitt, welcher der Grundfläche parallel laufet, der Grundfläche ähnlich sey. Also ist FG der Figur AC ähnlich, und es kan also FG keine andere als die Figur eines Cirkels haben, weil AC ein Cirkel ist.

XII. Abschnitt.

§. 5. Es erhellet aber auch aus eben dem Beweise, XI, 79. auf welchen wir uns hier gründen, daß die gerade Linie DB, welche auf die Ebene des Cirkels AC perpendicular ist, und durch dessen Mittelpunct E gehet, auch durch H, den Mittelpunct des Cirkels FG gehen müsse, und daß dieses auch von einem jeden anderen Cirkel IK richtig sey, welcher entstanden, indem eben die Kugel ABCD parallel mit der Ebene AC oder FG geschnitten worden ist. Eben die DB nemlich gehet auch durch L den Mittelpunct dieses Cirkels IK. Aber eben die DB ist auch auf die Flächen FG und IK perpendicular, weil dieselbe der Fläche AC parallel liegen, auf welcher DB perpendicular stehet. X, 53.

§. 6. Schneidet man nun die Kugel durch diese Linie DB, welche nemlich durch den Mittelpunct derselben E gehet, auf die Flächen der Parallelcirkel AC, FG, IK perpendicular, und in welcher folgends die Mittelpuncte dieser Cirkel H und L anzutreffen sind; und bringet durch diesen Schnitt den Cirkel zum Vorscheine, von welchem DMNB eine Helfte vorstellet, nachdem man eben die Kugel bereits vorher vermittelst des Cirkels ABCD geschnitten, welcher durch eben die Linie DB gehet: so werden so wohl DENCD als auch BENCB Cörper der dritten Art, und es sind demnach die Schnitte derselben GHM und CEN einander ähnlich, wie auch CEN und KLO. Also haben auch die Bogen MG und NC gegen ihre Umkreise einerley Verhältniß, oder es ist MG : GMFG = NC : CNAC. Eben dieses ist auch von den Bogen NC und OK richtig, und demnach verhält sich auch der Bogen MG zu seinem ganzen Umkreise, wie sich der Bogen OK zu seinem ganzen Umkreise verhält.

§. 7. Und da wir oben X, 40. gewiesen haben, daß ein jedes Punct einer geraden Linie, welche wie DB auf der Ebene eines Cirkels perpendicular stehet, und durch den Mittelpunct desselben hindurch gehet, von allen Puncten des Umkreises desselben Cirkels gleich weit entfernet sey: so muß auch ein jedes Punct der geraden Linie DB, und folgends auch dasjenige, so in der Oberfläche der Kugel lieget : D, von allen Puncten des Umkreises FG gleich weit abstehen : oder, die geraden Linien, welche man in dem inneren der Kugel von D bis an den

XII. Abschnitt. Umkreis des Cirkels FG ziehen kan, müssen alle gleich seyn. Eben dieses ist auch von dem Puncte B zu sagen, so ebenfals in der Oberfläche der Kugel lieget, und aus eben dem Grunde sind auch die Puncte D, B von allen Puncten eines jeden der Umkreise AC, IK gleich weit entfernet, deren Flächen der Fläche FG parallel liegen. XII. 5.

§. 8. Man kan demnach auch den Umkreis des Cirkels FG in der Oberfläche der Kugel beschreiben, wenn man den einen Fuß des Cirkelinstrumentes in D einsetzet, die Spitze des andern aber in F bringet, und so dann eben so verfähret, wie man verfahren muß, wenn man den Umkreis eines Cirkels in einer Ebene beschreiben wil. Eben diesen Cirkel kan man auch aus dem Puncte B beschreiben, wenn man die gerade Linie, die man sich zwischen B und F vorstellen kan, eben so herum führet, daß nemlich das eine Ende derselben immer in B bleibe, das andere aber niemals ausser der Oberfläche der Kugel falle. Und aus eben den Puncten D und B können auch die Umkreise der Cirkel AC, IK auf gleiche Weise beschrieben werden.

Pole der Kugelschnitte. Axe der Kugel.

§. 9. Wegen dieser Eigenschaft werden die Puncte D, B der Oberfläche der Kugel, welche von allen Puncten des Umkreises des Cirkels FG gleich weit entfernet sind, die Pole dieses Cirkels genennet. Und wenn wir dieses Wort gebrauchen wollen, so können wir die bereits erwiesenen Sätze dergestalt ausdrucken: Die Pole eines Cirkels FG sind die Puncte D, B, in welchen die gerade Linie DB, die durch H den Mittelpunct des Cirkels FG, auf die Fläche desselben perpendicular gezogen ist, die Oberfläche der Kugel durchsticht. Und alle Cirkel einer Kugel FG, AC, IK deren Flächen einander parallel liegen, haben eben die Pole D, B: oder, die Pole solcher Cirkel sind nicht verschieden.

§. 10. Es kan aber der Cirkel FG in der Oberfläche der Kugel ABCD, ausser den zween Polen D und B, nicht noch mehre andere haben. Dieses siehet man daraus, weil wenn das Punct D von allen Puncten des Umkreises des Cirkels FG gleich weit entfernet ist, und man nimmet in der Oberfläche der Kugel ein anderes Punct, zwischen dem D und dem Umkreise, wo man wil, man dasselbe nothwendig auf der einen Seite dem Umkreise näher bringen muß, als D auf eben derselben Seite dem Umkreise lieget, wodurch man es im Gegentheile auf der andern Seite von dem Umkreise weiter entfernet, als D von demselben abstehet. Also kan kein Punct der Oberfläche der Kugel, so

zwischen

zwischen D und dem Umkreise FG lieget, von allen Puncten desselben gleich weit entfernet seyn. Auf eben die Art kan man auch von den Puncten schliessen, die zwischen B und eben dem Umkreise FG liegen, und es bleiben also D und B die einzigen Pole dieses Umkreises. Wir haben nicht nöthig erachtet einen weitläuftigeren Beweiß hiervon zu geben, weil alles aus demjenigen, so wir von dem Cirkel gewiesen haben V, 35. überflüssig klar ist.

§. 11. Und hieraus schliesset man so gleich, daß wenn man von einem Pole D eines Cirkels FG bis an den anderen Pol desselben B die gerade Linie DB ziehet, diese durch den Mittelpunct des Cirkels H gehen, und auf die Fläche desselben perpendicular fallen werde. Denn wäre dieses nicht, so könte man durch den Mittelpunct H eine andere gerade Linie auf den Cirkel FG perpendicular ziehen, welche in der Oberfläche der Kugel die Pole dieses Cirkels bezeichnen würde, XII, 9. und diese letztere Pole könten mit den vorigen D und B nicht zusammen fallen, weil sonst die bereits gezogene DB die Perpendicularlinie durch den Mittelpunct H wäre, welches demjenigen widerspricht, so man angenommen hat. Demnach hätte der Cirkel FG in der Oberfläche der Kugel, ausser den beyden D und B, noch irgendwo andere Pole, welches nicht seyn kan.

§. 12. Ist nun die Fläche des Cirkels AC, welcher durch den Mittelpunct der Kugel E gehet, und dessen Mittelpunct folgends ebenfals E ist, dem vorigen FG parallel: so sind die Puncte D und B auch die Pole dieses Cirkels AC, und BD gehet also durch den Mittelpunct desselben E, das ist, XII, 1. durch den Mittelpunct der Kugel. Und weil man sich einen Cirkel wie AC vorstellen kan, man mag den Cirkel FG genommen haben, wie man wil, so folget, daß eine jede Linie BD, welche zwischen den zween Polen B, D eines Cirkels der Kugel lieget, durch den Mittelpunct der Kugel gehe, und einen Durchmesser derselben abgebe.

§. 13. Eben so ist es auch mit den beyden Cirkeln FG, IK, welche einander in der Kugel ABCD parallel liegen, und folgends XII, 9. einerley Pole D und B haben. Die gerade Linie DB, welche diese Pole verknüpfet, gehet durch den Mittelpunct des einen H, und auch durch den Mittelpunct des andern L, und stehet auf den beyden Cirkeln perpendicular. Man kan zwischen den Puncten H, L keine gerade Linie ziehen, welche von der bereits gezogenen HL verschieden wäre, und wil man von H nach L eine gerade Linie ziehen, so fället sie mit der bereits

 gezo-

XII. Abschnitt.

gezogenen HL zusammen, sie gehet also, wenn man sie verlängeret, durch die Pole B und D, und fället auf die Flächen der Cirkel FG und IK perpendicular. Setzet man an die Stelle des Cirkels IK den Cirkel AC, dessen Mittelpunct E in den Mittelpunct der Kugel fället: so siehet man aus eben dem Satze, daß wenn man von dem Mittelpuncte der Kugel E nach H den Mittelpunct eines nach Belieben angenommenen Cirkels derselben eine gerade Linie EH ziehet, und dieselbe in D und B verlängert, diese Linie ebenfals auf FG perpendicular fallen, und daß D und B die Pole des Cirkels FG seyn werden.

§. 14. Wir könten noch mehrere dergleichen Sätze machen, welche wir aber, alle unnöthige Weitläuftigkeit zu vermeiden, zusamt denjenigen, die wir eben gewiesen, in eine allgemeine Betrachtung verfassen und anmerken wollen, daß die einzige Linie DB alle diese Eigenschaften zusammen habe, daß sie 1) durch den Pol D, und 2) durch den Pol B, wie auch 3) durch den Mittelpunct der Kugel E, und 4) durch den Mittelpunct H des Cirkels FG, wie auch 5) durch den Mittelpunct L des Cirkels IK gehe, und 6) auf die Parallelcirkel FG, AC, IK perpendicular stehe, und daß diese Linie DB durch jede zwo dieser Eigenschaften bestimmet werde, so nemlich, daß wenn man eine Linie nennet, welche zwo der angezeigeten sechs Eigenschaften hat, keine andere als die einzige Linie DB darunter verstanden werden kan. Es folget daraus überhaupt, daß eine Linie, welche zwo der eben erzehleten Eigenschaften hat, die übrigen alle habe, und daß zum Exempel die Linie, welche aus dem Mittelpuncte der Kugel E, auf die Fläche des Cirkels FG perpendicular fället, durch den Mittelpunct desselben H, wie auch, wenn man sie beyderseits verlängeret, durch die Pole desselben B und D, und durch L, den Mittelpunct, des Cirkels IK, welcher dem vorigen AC parallel lieget, hindurch gehe. Auf eben die Art kan man sich die übrigen Sätze leicht vorstellen, welche in dieser allgemeinen Betrachtung liegen.

§. 15. Der Durchmesser der Kugel DB, welcher auf die Art bestimmet wird, wird auch die Axe der Kugel genennet, so oft man ihn auf die Cirkel FG, AC, IK beziehet, deren Pole er mit einander verknüpfet. Man nennet ihn auch öfters die Axe dieser Cirkel.

§. 16. Wir können nun weiter schliessen, daß keine Cirkel einer Kugel, als diejenigen deren Flächen durch den Mittelpunct der Kugel gehen, einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben können: Oder, daß

F. 352.

daß wenn man eine Kugel ABCD, deren Mittelpunct E ist, zweymal schneidet, und dadurch die Cirkel AC und BD zum Vorschein bringet, deren einer nicht durch den Mittelpunct E gehet, es mag nun der andere durch diesen Mittelpunct gehen oder nicht, sie unmöglich ein gemeinschaftliches Mittelpunct haben können. Denn sollen sie ein gemeinschaftliches Mittelpunct haben, so muß demjenigen, so gesetzet worden ist zu Folge, dasselbe von dem Mittelpuncte der Kugel E verschieden seyn. Denn wenn zween Cirkel ein gemeinschaftliches Mittelpunct haben, welches mit dem Mittelpuncte der Kugel zusammen fället, so gehen beide Cirkel durch den Mittelpunct der Kugel. Wir reden aber von solchen Cirkeln, welche nicht durch den Mittelpunct der Kugel gehen. Man setze also, es sey H der gemeinschaftliche Mittelpunct der beiden Cirkel AC und BD, und ziehe von dem Mittelpuncte der Kugel E an H die gerade Linie EH. Es fliesset aus demjenigen, so eben gezeiget worden ist, daß diese EH auf die Fläche des Cirkels BD perpendicular seyn werde, weil sie durch den Mittelpunct der Kugel E, und durch den Mittelpunct des Cirkels H gehet XII, 14. Da aber eben dieser H auch der Mittelpunct des Cirkels AC ist, so stehet eben die EH auch auf der Fläche des Cirkels AC perpendicular. Das ist, die einzige gerade Linie EH ist auf die zwo Flächen BD und AC perpendicular, welche einander schneiden. Dieses ist nicht möglich X, 37. also kan weder H noch einiges anderes Punct der gemeinschaftliche Mittelpunct der Cirkel AC, BD seyn; und diese Cirkel haben also keinen gemeinschaftlichen Mittelpunct.

§. 17. Demnach können auch zween solche Cirkel, derer Flächen nicht beide durch den Mittelpunct der Kugel gehen, einander nicht in gleiche Theile theilen. Dieses ist so zu verstehen: Es ist nicht möglich, daß die beiden Cirkel AC und BD, deren Flächen nicht beide durch den Mittelpunct der Kugel E gehen, einander vermittelst der geraden Linie GF so theilen solten, daß so wohl GAF als auch GBF halbe Cirkel wären. Beides zugleich kan ohnmöglich seyn: denn daß GBF allein ein halber Cirkel sey, wenn GAF grösser oder kleiner ist, als ein halber Cirkel, ist gar wohl möglich; und wir werden so gleich einen Umstand angeben, bey welchem dieses allezeit zutrift. Daß aber bey der gesetzten Bedingung nicht GAF und GBF zugleich halbe Cirkel seyn können, erhellet daraus, weil, wenn sie es wären, GF ihr gemeinschaftlicher Durchmesser seyn müste V, 11. Wäre dieses, so müsten sie auch beide nur einen Mittelpunct haben. Wir haben aber eben gesehen, daß

XII. Abschnitt.

daß zween Cirkel, welche nicht beide durch den Mittelpunct der Kugel gehen, auch ohnmöglich einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben können.

§. 18. Können also solche Cirkel, welche nicht beide durch den Mittelpunct gehen, einander nicht in halbe Cirkel theilen, so folget, daß wenn man zween Cirkel einer Kugel hat, welche einander würklich in vier halbe Cirkel theilen; die Flächen derselben nothwendig durch den Mittelpunct der Kugel gehen müssen. Dieses ist der einzige Umstand, bey welchem diese Theilung statt findet. Ist also die Theilung würklich geschehen, so ist kein Zweifel, daß auch dieser Umstand zugegen sey. Man siehet übrigens vor sich, daß, was von der Theilung der Cirkel gesaget wird, auch von der Theilung der Umkreise derselben richtig sey, weil allezeit der Cirkel und dessen Umkreis zugleich getheilet wird, und eine dieser Theilungen ohne die andere nicht geschehen kan.

F. 351.

§. 19. Da aber ein solcher Cirkel, dessen Fläche nicht durch den Mittelpunct der Kugel gehet, von verschiedenen Cirkeln der Kugel in zween gleiche Theile getheilet werden kan; ohne nemlich, daß er diesen hinwiederum dergestalt theile: so erfolget diese Theilung in gleiche Theile jederzeit gewiß, wenn der theilende Cirkel durch die Axe desjenigen gehet, welchen er theilet. Wil man sich dieses ohne Weitläuftigkeit vorstellen, so hat man nur zu betrachten, daß in der Kugel ABCD, deren Mittelpunct in E fället, der Cirkel FMG durch einen jeden Cirkel in zwey gleiche Theile werde getheilet werden, dessen Fläche durch den Mittelpunct desselben H gehet, weil in dem Falle die gerade Linie, in welcher die Flächen der Cirkel einander schneiden, nothwendig ein Durchmesser des Cirkels FMG wird. Nun gehet ein jeder Cirkel, welcher durch die Axe DB gehet, auch durch den Mittelpunct H. Denn die Axe gehet nothwendig durch diesen Mittelpunct XII, 14.

§. 20. Man siehet leicht, daß man diesen Satz wieder auf so verschiedene Arten ausdrücken könne, als viele der Umstände sind, welche die Axe bestimmen. Wir wollen uns wieder hiebey nicht aufhalten, insonderheit, da das meiste, was hier zu sagen wäre, bloß eine Wiederholung des vorigen ist, und nur bemerken, daß ein jeder Cirkel, welcher wie DNP durch die Axe des Cirkels FMG gehet, nothwendig 1) durch den Pol dieses Cirkels D und 2) durch den andern Pol desselben B, wie auch 3) durch den Mittelpunct der Kugel E,

4)

4) durch H, den Mittelpunct des Cirkels FMG, wie auch 5) durch den Mittelpunct eines jeden andern Cirkels der Kugel JOK, welcher dem FMG parallel lieget, hindurch gehe, und 6) auf die Flächen der Cirkel FMG, ANC und JOK perpendicular sey; wobey nicht aus der Acht zu lassen ist, was wir schon erinnert haben, daß eine jede ebene Fläche, welche einen Cirkel durch seinen Mittelpunct schneidet, denselben in zwey gleiche Theile theile. Weil aber, wie wir XII, 14. gesehen, die Lage der Axe durch jede zwo dieser erzehleten Bedingungen bestimmet wird, so wird auch die Lage des Cirkels, welcher durch die Axe gehet, durch eben diese Bedingungen in so ferne bestimmet, daß ein Cirkel gewiß durch die Axe gehet, welcher zum Exempel durch den Pol D und durch den Pol B, oder durch den Pol D und durch den Mittelpunct E gehet, oder welcher durch den Mittelpunct der Kugel E gehet, und auf die Fläche FMG oder ANC perpendicular fället, oder welcher andere zwo der sechs erzehleten Eigenschaften hat. Und man muß demnach wieder schliessen, daß ein jeder Cirkel, welcher zwo der erzehleten Eigenschaften hat, die übrigen dieser Eigenschaften alle haben werde.

XII. Abschnitt.

§. 21. Und wenn demnach auf einen Cirkel der Kugel FMG zween andere Cirkel derselben DNP und DCA perpendicular stehen, welche zugleich durch den Mittelpunct desselben H, oder durch den Mittelpunct der Kugel E gehen; so kreutzen ihre Umkreise einander in D und B, den Polen des Cirkels FMG. Denn sie gehen beide durch die Axe DB, und schneiden also einander in dieser Linie.

§. 22. Ist aber die Fläche des Cirkels DNP auf der Fläche des Cirkels ANC perpendicular, welcher durch den Mittelpunct der Kugel E gehet, und gehet überdieses der Cirkel DNP auch durch den Mittelpunct des Cirkels ANC, das ist, durch den Mittelpunct der Kugel E: so gehet nicht nur der Cirkel DNP durch die Pole D und B des Cirkels ANC; sondern, weil hinwiederum der Cirkel ANC auf dem Cirkel DNP gerade stehet, und durch dessen Mittelpunct gehet, so gehet auch der Cirkel ANC durch die Pole des Cirkels DNP. XII, 20.

Kugel-Schnitte, die einander schief schneiden, oder berühren.

§. 23. Hat man eine Kugel ADCB zweymal geschnitten, und dadurch die zween Cirkel AD und BC zum Vorscheine gebracht, welche von dem Mittelpuncte der Kugel gleichweit entfernet sind, so sind diese Cirkel einander gleich. Haben sie aber ungleiche Entfernungen von dem

F. 353.

XII. Abschnitt.

dem Mittelpuncte, so ist allezeit derjenige kleiner, welcher von dem Mittelpuncte der Kugel E weiter abstehet. Denn man ziehe von diesem Mittelpuncte der Kugel an den Mittelpunct F des Cirkels AD die gerade Linie EF, welche XII, 14. auf die Fläche dieses Cirkels perpendicular fallen, und also die Entfernung des Punctes E von der Fläche dieses Cirkels anzeigen wird; und ziehe den Radius des Cirkels FH, dessen äusserstes Punct H in der Oberfläche der Kugel liegen wird, weil der ganze Umkreis des Cirkels AD in dieser Oberfläche der Kugel lieget. Von H ziehe man an den Mittelpunct E den Radius der Kugel HE; so wird das Dreyeck HFE bey F rechtwinklicht, und es ist demnach das Quadrat der grösten Seite desselben HE gleich der Summe der Quadrate der übrigen Seiten HF und FE IX, 66. oder kurz, $HE^q = HF^q + FE^q$. Machet man nun eben dergleichen auch bey dem andern Cirkel BC, und hänget erstlich den Mittelpunct der Kugel mit dem Mittelpuncte des Cirkels vermittelst der geraden Linie EG zusammen, welche wieder auf die Fläche des Cirkels perpendicular seyn, und folgends die Entfernung derselben von dem Mittelpuncte der Kugel E anzeigen wird, und ziehet GB den Halbmesser des Cirkels und EB den Halbmesser der Kugel, so ist wieder $EB^q = EG^q + GB^q$. Da nun aber $HE = EB$, und folgends $HE^q = EB^q$, so ist auch $HF^q + FE^q = GB^q + EG^q$. Ist nun $FE = EG$, und folgends auch $FE^q = EG^q$, so ist auch nothwendig $HF^q = GB^q$. Denn wenn dieses nicht wäre, so könten die Summen dieser Quadrate ohnmöglich gleich seyn. Folgends ist auch $HF = GB$. das ist, wenn die Entfernungen der Cirkel von dem Mittelpuncte der Kugel gleich sind, so sind auch ihre Halbmesser gleich, und also auch die Cirkel selbst. Ist aber EF kleiner als EG, so ist auch $EF^q < EG^q$, folgends muß im Gegentheile das Quadrat von HF grösser seyn als das Quadrat von GB, weil sonst durch die Zusammensetzung dieser Quadrate mit den vorigen, wieder keine gleichen Summen kommen könten. Aus $HF^q > GB^q$ aber folget $HF > GB$, woraus man siehet, daß der Cirkel AD, wenn er von dem Mittelpuncte der Kugel E weniger entfernet ist als der Cirkel BC, grösser sey als dieser Cirkel BC.

§. 24. Demnach sind unter allen Cirkeln, welche durch den Schnitt einer Kugel zum Vorscheine gebracht werden können, diejenigen die allergrössesten, welche durch den Mittelpunct der Kugel gehen. Und man kan einen Cirkel, welcher durch den Mittelpunct der Kugel gehet, durch die Benennung des grössesten oder eines der

grös-

grössesten Cirkel der Kugel, von allen übrigen Cirkeln derselben unterscheiden. Dieses pfleget gemeiniglich zu geschehen, und man nennet einen solchen Cirkel, dessen Fläche durch den Mittelpunct der Kugel gehet, gemeiniglich nicht anders als einen der grösseren Cirkel der Kugel. Wir haben uns aber dieser Benennung mit Fleiß bisher enthalten, weil wir erachtet, daß die Gründe der Beweise leichter beyfallen werden, wenn wir, indem wir von solchen Cirkeln zu reden hatten, anzeigeten, daß sie durch den Mittelpunct der Kugel gehen. Man wird nunmehr die gegebene Sätze auch unter dieser Benennung leicht verstehen. Denn inskünftige werden wir uns derselben bedienen.

XII. Abschnitt.

§. 25. Es sey nunmehro die Kugel ABCD, deren Mittelpunct wieder mit E bezeichnet ist, vermittelst einer Ebene geschnitten, welche nicht durch den Mittelpunct E gehet, und es sey durch diesen Schnitt der Cirkel AFC entstanden, dessen Mittelpunct G ist. Man schneide die Kugel auch vermittelst einer Fläche durch ihren Mittelpunct E, und bringe durch diesen Schnitt einen der grösten Cirkel derselben zum Vorschein, welcher auch den kleineren Cirkel AFC theile, aber auf demselben nicht gerade, sondern schief stehe. Dieser Cirkel sey HFJK, und er schneide den Cirkel AFC in der geraden Linie KF. Man mache noch einen der grösten Cirkel der Kugel auf die Linie KF, oder den Theil derselben FL, perpendicular, und dieser sey ABCD. Weil nun FL hinwiederum auf der Ebene des Cirkels ABCD perpendicular stehet, und diese LF in der Fläche des Cirkels AFC so wohl, als auch in der Fläche des Cirkels HFJ lieget; so sind die beiden eben genannten Cirkel AFC und HFJ, auf den Cirkel ABCD perpendicular X, 47. Und der Cirkel ABCD, welcher dergestalt auf dem Cirkel AFC perpendicular stehet, und durch den Mittelpunct der Kugel E gehet, theilet diesen Cirkel in zwo Helften AFC, AKC XII, 20. die gerade Linie AC aber, in welcher der Cirkel ABCD den AFCK schneidet, gehet durch dessen Mittelpunct G. Eben dieses ist auch von dem Cirkel HFJK zu sagen. Der Cirkel ABCD theilet auch diesen in zwo gleiche Helften, und die gerade Linie HJ vermittelst welcher diese Theilung geschiehet, gehet durch den Mittelpunct dieses Cirkels E, welcher zugleich der Mittelpunct der Kugel ist XII, 2. Das Punct L ist nothwendig von dem Mittelpuncte G verschieden, so lange der Cirkel AFC nicht durch den Mittelpunct der Kugel gehet. Denn wenn L mit G zusammen fiele, oder welches eben das ist, wenn der Cirkel HFJK durch den Mittelpunct G des Cirkels AFC gienge, so wäre

F. 354.

XII. Abschnitt.

derselbe auf dem Cirkel AFCK perpendicular, XII, 20. und nicht schief, wie gesetzet wird. Man siehet auch leicht, daß bey den gesetzeten Bedingungen eben das Punct L auch von dem Mittelpuncte der Kugel E entfernet seyn müsse, weil gesetzet wird, daß der Cirkel AFC nicht durch dieses Punct E hindurch gehen sol. Da nun eben dieses E auch der Mittelpunct ist des Cirkels HFIK, so ist KF eine Sehne so wohl des Cirkels AFCK als auch des Cirkels HFIK, welche kleiner ist als einer der Durchmesser dieser Cirkel, und diese Sehne ist auf die Durchmesser AC, IH der eben genannten Cirkel perpendicular, weil diese Durchmesser beyde in der Fläche des Cirkels ABCD liegen, auf welche Fläche FL perpendicular ist.

§. 26. Da nun ein jeder Durchmesser eines Cirkels, welcher auf einer Sehne desselben perpendicular stehet, wenn er verlängert wird, auch den Bogen dieser Sehne in zwey gleiche Theile theilet: V, 19. so muß so wohl der Durchmesser AC den Bogen FCK in zwey gleiche Theile FC und CK, theilen; als auch der Durchmesser IEH bey dem Bogen FHK eine eben dergleichen Theilung verrichten, FH nemlich muß ebenfals der HK gleich seyn. Man lasse nicht aus der Acht, daß das Punct C in den Durchschnitt der Cirkel ABCD und AFCK, und H in den Durchschnitt der Cirkel IFHK und ABCD, falle.

§. 27. Setzet man nun, daß das übrige alles bleibe, wie wir es beschrieben haben, und entfernet bloß in den Gedanken den Cirkel AC von dem Mittelpuncte E gegen seinen Pol D, ohne ihn jedoch auf diese oder jene Seite zu neigen, das ist, man entfernet ihn dergestalt von E daß die Axe desselben ihre Lage in der Kugel unverrückt behalte: so wird nothwendig KF immer kleiner und kleiner, welches man daraus siehet, weil diese KF sich bey dieser Bewegung immer weiter und weiter von E, dem Mittelpuncte des Cirkels IFH, entfernet, dessen Sehne sie ist. Demnach wird auch der Bogen dieser Sehne KHF immer kleiner und kleiner, und zugleich nimmet auch der Bogen KCF ab, und zwar der letztere desto mehr, weil bey dieser Entfernung des Cirkels AFCK von dem Mittelpuncte der Kugel E, zugleich der Cirkel selbst abnimmet. XII, 23. Es bleiben aber deswegen doch die Bogen CK, CF, wie auch HK, HF, einander immer gleich, weil in den Umständen, unter welchen wir diese Gleichheit erwiesen haben, keine Veränderung vorgehet. Zu gleicher Zeit nähert sich auch das Punct C, wie auch das Punct L beständig dem Puncte H, und man siehet also, daß bey fortgesetzeter Entfernung des Cirkels AFC

von

von dem Mittelpuncte E gegen den Pol D, die Puncte K, F, L und C sich dem Puncte H beständig nähern. XII. Abschnitt.

§. 28. Entfernet man nun den Cirkel AFC von E, so weit, daß das Punct L mit dem Puncte H zusammen falle, so fallen auch die Puncte C, K und F mit eben dem Puncte H zusammen, und die Cirkel AH, und IH haben also das Punct H dergestalt gemeinschaftlich, daß sie einander in diesem Puncte nicht schneiden. Man kan demnach in eben dem Verstande, in welchem man saget, daß eine gerade Linie einen Cirkel berühre, auch sagen, daß der Cirkel AH in diesem Falle, welchen die 355 Zeichnung vorstellet, den Cirkel IH in H berühre. Die Linie KF, in welcher die Cirkel einander vorhero geschnitten hatten, ist verschwunden, weil es ohnmöglich ist, daß die Sehne des Cirkels IH, die auf EH perpendicular stehet, durch das Punct des Umkreises H gehen solte. Wohl aber schneiden die zwo Flächen der Cirkel AH und IH einander in einer geraden Linie KF, welche, wie die Sehne KF, auf die Fläche des Cirkels ABHD, und also so wohl auf den Durchmesser AH, als auch auf den Durchmesser IH perpendicular ist. Denn die Flächen dieser Cirkel AH und IH sind noch auf die Fläche des Cirkels ABCD perpendicular, weil in ihrer Lage nichts geändert worden ist, und der gemeinschaftliche Schnitt derselben KF ist demnach auf eben die Fläche ABHD, X, 49. und also auf die zwo gerade Linien AH und IH perpendicular, welche in dieser Fläche liegen. Es berühret demnach diese FK so wohl den Cirkel AH als auch den Cirkel IH in dem Puncte H. V, 45. F. 355.

§. 29. Wäre demnach der Umkreis eines der grösten Cirkel IH in dieser Oberfläche beschrieben, und man wolte in eben der Oberfläche einen andern Cirkel AH beschreiben, welcher den vorigen in einem gegebenen Puncte H berührete; so müste man nur erstlich durch das gegebene Punct H einen anderen Cirkel der Kugel ABHD beschreiben, dessen Fläche ebenfals durch den Mittelpunct der Kugel E ginge, und welcher auf dem vorigen perpendicular stünde, so würde ein jeder Cirkel AH, dessen Umkreis durch H gehet, und dessen Fläche auf der Fläche des Cirkels ABHD perpendicular stehet, das ist, dessen Pole in den Umkreis ABHD fallen, XII, 20. den Cirkel HI in H berühren. Denn daraus, daß die beyden Cirkel IH und AH auf dem Cirkel ABHD perpendicular stehen, und daß ihre Umkreise durch das Punct H des Cirkels ABHD gehen, haben wir erweisen können, daß die Cirkel AH und IH einander in H berühren; und es kan bey-

XII. Abschnitt. diesen Umständen allezeit eben das geschlossen werden. Man siehet hieraus, daß unendlich viele Cirkel sind, welche den Cirkel IH in dem Puncte H berühren können, weil unendlich viele Cirkel auf die Fläche des Cirkels IH perpendicular gesetzet werden können, welche zugleich durch H gehen.

§. 30. Es schneidet der Cirkel ABHD den Umkreis des Cirkels IH ausser dem H noch einmal in I, und dieses Punct I ist in dem Durchmesser IH, in welchem die Cirkel AB, HD und IH einander schneiden, dem vorigen H entgegen gesetzet. Man kan demnach nach der gegebenen Anweisung auch durch das Punct I unendlich viele Cirkel ziehen, welche den Cirkel IH berühren, aber nur einer derselben ist dem AH parallel. Wir setzen, daß dieses der Cirkel IM sey. Man siehet leicht, daß ausser demselben kein anderer Cirkel in der Kugel ABHD seyn könne, welcher diese beyde Eigenschaften zugleich hätte, daß er nemlich so wohl dem Cirkel AH parallel läge, als auch den Cirkel IH berührete. Denn alle Cirkel der Kugel zwischen AH und IM, welche dem Cirkel AH parallel liegen, schneiden den Cirkel IH: und alle Cirkel der Kugel zwischen AH und dem Pole desselben D, oder zwischen IM und dem andern Pole B, haben mit dem Cirkel IH gar keine Gemeinschaft. Es können also einen jeden Cirkel der Kugel IH zween Parallelcirkel eben der Kugel AH und IM berühren, aber nicht mehrere.

§. 31. Und zwar sind diese Parallelcirkel AH und IM, welche beyde den grösten Cirkel der Kugel IH berühren, einander gleich. Denn weil sie parallel sind, so haben sie eine gemeinschaftliche Axe DB, welche auf die Cirkel perpendicular fället, XII, 14. und es sind also EG, EN die Entfernungen dieser Cirkel von dem Mittelpuncte der Kugel E. Wenn man sich nun vorstellet, daß auch durch E eine ebene Fläche gehe, welche den beyden AH, IM parallel läuft, so siehet man, X, 62. daß HE : EI = GE : EN. Da nun also HE = EI, so ist auch GE = EN, und die Cirkel AH, IM haben gleiche Entfernungen von dem Mittelpuncte der Kugel: sie sind demnach einander gleich. XII, 23.

§. 32. Diese zween einander gleiche Cirkel AH, IM also werden von dem grossen Cirkel IH nicht geschnitten, wohl aber alle diejenige, die zwischen denselben ihren Flächen parallel liegen. Wir haben diese letzteren Cirkel noch zu betrachten, und dabey insonderheit auf die Verhältniß ihrer Theile gegen die ganzen Cirkel zu sehen. Die 356 Figur, sol eben das vorstellen, so die 354 vorgestellet hat: nur haben

F. 356.

haben wir hier, die Zeichnung desto weniger zu verwirren, an statt der ganzen nur halbe Cirkel genommen. Es sol nemlich ABCD eine halbe Kugel vorstellen, in welcher die halben Cirkel AFC, IFH auf der Fläche des Cirkels ABCD, welcher zugleich die Grundfläche der halben Kugel abgiebet, perpendicular stehen. Die Pole des Cirkels AFC sind wieder mit D und B bezeichnet, und DB ist also die Axe der Kugel, welche zu dem halben Cirkel AFC gehöret. Wir setzen, daß der halbe Cirkel AFC nicht durch den Mittelpunct der Kugel E gehe, sondern daß ein anderer halber Cirkel NMO durch diesen Mittelpunct geleget sey, welcher zugleich dem vorigen AFC parallel ist. Schneiden nun die beyden halben Cirkel IFH und AFC einander in LF, so lege man an die Axe DB noch einen andern Cirkel der Kugel, welcher zugleich durch das Punct F gehe. Von diesem Cirkel wird in der Zeichnung nur der vierte Theil DFPE vorgestellet, welcher nemlich von der Axe DE an sich bis an den Cirkel NPO erstrecket. Man siehet daraus, daß dieser Theil DFP ein Quadrante sey, weil DE auf die Fläche NPO perpendicular, und folgends der Winkel DEP gerade ist. Es wird dadurch der Ausschnitt, welchen der Theil dieses Cirkels DPE von dem halben Cirkel AFC abschneidet, nemlich CGF dem Ausschnitte OEP ähnlich. Denn man kan DEPO als einen Cörper der dritten Art betrachten. XI, 77. Also verhält sich der Bogen FC zu dem halben Umkreise AC wie sich der Bogen PO zu dem halben Umkreise NO verhält. VII, 57. Dieses alles ist ohne Schwierigkeit einzusehen, aber man siehet auch mit eben der Leichtigkeit, daß, indem man den Cirkel AFC nach und nach gegen NPO herunter rücket, das Punct F, in welchem er den Umkreis des halben Cirkels HFI schneidet, immer nach M zu fortrücken werde: Und daß demnach, wenn der Cirkel DFP immer durch dieses Punct F gehen sol, der Winkel OEP, welchen die Fläche DEP mit der Fläche DEO einschliesset, immer grösser und grösser werden müsse. Es wird demnach auch der Bogen OP immer grösser, und bekommet gegen den halben Umkreis eine desto grössere Verhältniß, je mehr sich der halbe Cirkel AFC dem halben Cirkel NMO nähert: also muß auch die Verhältniß des Bogens FC zu dem halben Umkreise AFC bey dieser Näherung beständig wachsen.

§. 33. Dieses Wachsthum gehet immer fort, bis endlich der halbe Cirkel AFC mit dem halben Cirkel NMO zusammen fället. Ist dieses geschehen, so ist auch F in M gefallen: und, weil die beyden hal-

halben Cirkel NMO und IMH auf dem Cirkel ABCD perpendicular stehen, so sind die Bogen NM, MO eben so wohl als IM, MH einander gleich, XII, 21. folgends ist MO so wohl als MH der vierte Theil des Umkreises seines Cirkels, welches man auch daraus siehet, weil die gerade Linie ME, in welcher die Flächen IMH, NMO, die beyde auf die Fläche ABCD perpendicular sind, einander schneiden, auch selbst auf diese Fläche perpendicular ist, X, 49. und also mit den Linien EH, EO die geraden Winkel MEH, MEO einschliesset. CF ist also immer kleiner als ein Quadrant, so lange AFC noch über dem NMO lieget.

§. 34. Entfernet sich aber der bewegete Cirkel auf der andern Seite von NMO, und kommet endlich in afc, und man hat durch das Punct f, in welchem dessen Umkreis nunmehro von dem halben Cirkel IMH geschnitten wird, und durch die Axe DB den Theil eines der grösten Cirkel der Kugel Bfp geleget, so ist der Bogen cf grösser als der vierte Theil seines Umkreises. Denn es ist hier wieder die Verhältniß fc : afc der Verhältniß Op : NPO gleich. Op aber ist unstreitig grösser als der Quadrant MO. Demnach ist im Gegentheile der Bogen af kleiner als ein Quadrant.

§. 35. Wenn der halbe Cirkel AFC von dem Mittelpuncte der Kugel E auf der einen Seite so weit abstehet, als der halbe Cirkel afc auf der anderen, so sind die Halbmesser dieser halben Cirkel GF und gf einander gleich, wie wir XII, 23. gesehen haben. Und weil in den geradewinklichten Dreyecken LGE und Egl ausser den geraden Winkeln bey G und g, auch die Wechselswinkel bey E, nemlich LEG und lEg gleich sind, die gleichen Entfernungen aber der Cirkel von dem Mittelpuncte E, die Seiten dieser Dreyecke EG und Eg abgeben, so sind in diesen Dreyecken auch die Seiten GL und gl gleich. Die Dreyecke GFL und gfl haben bey L und l ebenfals gerade Winkel; und weil also, wie wir gesehen, auch zwo Seiten des einen GF, GL, zween Seiten des andern gf, gl gleich sind, so sind auch ihre Winkel FGL, fgl einander gleich, IV, 258. und folgends ist auch der Bogen FC gleich dem Bogen fa. V, 7. Es werden demnach die gleichen halben Cirkel AFC, afc von dem halben Cirkel HMI, in F und f gleich getheilet, aber die einander gleichen Theile liegen nach verschiedenen Seiten in Ansehung der theilenden Fläche HMI. Der Bogen FC lieget in unserer Zeichnung der Fläche HMI zur rechten, und der demselben gleiche Bogen af lieget im Gegentheile der

Fläche HMI zur linken. Man siehet leicht, daß hieraus folge, daß der Bogen af mit dem Bogen AF, wie auch fc mit dem FC halbe Cirkelkreise geben.

XII. Abschnitt.

§. 36. Alle diese Betrachtungen sind in der Astronomie von gar grossem Nutzen, und wir können aus der Ursache diese Abhandlung noch nicht abbrechen. Wir müssen noch die Dreyecke betrachten, welche drey Bogen dreyer der grösten Cirkel der Kugel in der Oberfläche derselben mit einander einschliessen. Es werden vermittelst dieser Dreyecke sehr viele und wichtige Aufgaben der erwehnten Wissenschaft aufgelöset, und es ist also unumgänglich nothwendig, wenn man in derselben etwas thun wil, daß man sich die Eigenschaften dieser Dreyecke bekannt mache.

Maaß des Winkels, welchen zween der grösten Cirkel einer Kugel einschliessen.

§. 37. Wenn in der Oberfläche der Kugel ABCD zween der grösten Cirkel derselben ABCD und DFBG sich in der geraden Linie DB schneiden, die nothwendig durch den Mittelpunct der Kugel E gehet, und man nimmet D vor den Pol eines dritten Cirkels AFCG an, welchen man dergestalt leget, daß seine Fläche ebenfals durch den Mittelpunct der Kugel E gehe, und die vorigen in GEF, AEC schneide; wodurch die Bogen DF und DC und alle übrigen, deren Flächen durch DB gehen, Quadranten werden: so ist der Bogen FC das Maaß des Winkels, welchen die beyden Flächen DEC, DEF mit einander einschliessen. Denn der Winkel FEC ist demjenigen gleich, welchen die Flächen DEF, DEC mit einander machen, X, 42. weil EF und EC auf die DE perpendicular sind, indem diese DE perpendicular auf der Ebene AFCG stehet: und den Winkel FEC misset der Bogen CF. Wie sich nemlich dieser Bogen CF zu einem Quadranten des grösten Cirkels der Kugel verhält, so verhält sich der Winkel CEF zu einem geraden Winkel. Und auf die Art wird das Maaß eines Winkels CEF, welchen die Flächen zweyer der grösten Cirkel der Kugel mit einander machen, allezeit gefunden.

F. 357.

§. 38. Aus eben dem Grunde siehet man, daß der Bogen AF das Maaß sey des Winkels AEF, welchen die Flächen DEA, DEF einschliessen, und daß der Bogen AG den Winkel AEG messe, welcher der Neigung der Fläche AED auf GED, gleich ist, und so fort. Die Winkel, FEC, AEG sind einander gleich, weil GF, AC gera-

 de

XII. Abschnitt.

de Linien sind, die einander in E schneiden: X, 11. folgends ist auch der Winkel, welchen die Fläche FED mit der Fläche DEC machet, dem entgegen gesetzeten Winkel gleich, welchen eben diese Flächen, wenn man dieselben fortsetzet, oder ihre Theile DEG und DEA, mit einander einschliessen. Und auf eben die Art schliessen wir, daß die Winkel, welche die Fläche DEF mit der Fläche ADC machet, zusammen genommen zween geraden Winkeln gleich seyn, weil die Winkel FEC, FEA zusammen zween gerade Winkel machen, deren ersterer der Neigung der DEF auf DEC gleich ist, da der andere AEF die Neigung eben der Fläche DEF gegen die DEA misset. Wir hätten diese Sätze bereits oben bemerken können, da wir von den Lagen der Flächen handelten, doch sie sind an sich leicht, und wer die Geduld gehabt, sich das vorhergehende alles bekant zu machen, wird diese Kleinigkeiten leicht selbst übersehen.

§. 39. Es ist aber, was wir eben gesaget, daß der Bogen FC, welcher aus dem Pol D beschrieben worden, und der von diesem Puncte D um die Quadranten DC, DF entfernet ist, das Maaß des Winkels sey, welchen die Flächen DEF, DEC mit einander machen, nicht so zu verstehen, als ob man die Neigung dieser Flächen nicht anders messen könte. Alle gerade Linien, welche in den Flächen DEF, DEC auf den Schnitt DE perpendicular gezogen werden, und in einem Puncte dieser Linie DE zusammen laufen, schliessen einen Winkel ein, welcher dem Winkel FEC, und der Neigung der Fläche DEF gegen die Fläche DEC, gleich ist. X, 44. Und ein jeder Bogen, welcher um den Pol D in der Oberfläche der Kugel, zwischen den halben Cirkeln DFB, DCB beschrieben wird, misset einen dieser Winkel, durch seine Verhältniß gegen den Quadranten, halben, oder ganzen Cirkelkreis. XI, 77. Es sind unter diesen Perpendicularlinien, auch diejenige gerade Linien, deren eine KM den Cirkel DFBG und die andere HI den Cirkel ABCD in dem Puncte D berühret. Denn die Berührungslinie KM fället nothwendig in die Ebene, in welcher der Cirkel DFBG lieget, und ist auf den Durchmesser desselben DB perpendicular. V, 47. Und eben dergleichen ist auch von der HI in Ansehung des Cirkels ABCD zu sagen. Also ist der Winkel IDM dem Winkel CEF gleich. Indessen ist die Art, welche wir zuerst angegeben, das Maaß eines solchen Winkels zu finden, in den meisten Fällen die bequemeste.

Soll-

Solide Ecken.

§. 40. Nunmehro können wir uns zur Betrachtung der Dreyecke wenden, deren wir erwehnet haben: Es kommet bey denselben das meiste auf den Begrif an, welchen man sich davon machet. Denselben nun so deutlich zu geben als nur möglich ist, wollen wir recht von forne anfangen. Wenn man drey oder mehrere Winkel ABC, CBD, DBE und EBA dergestalt zusammen setzet, daß ihre Spitzen B zusammen laufen, und die Seiten AB des Winkels ABC mit der Seite AB des Winkels ABE, zusammen falle, und so rings herum; die Flächen der Winkel ABC, CBD, DBE, und EBA aber alle sich gegen einander neigen; so entstehet dasjenige, was man eine Ecke, oder auch, damit man sie desto besser von einem gemeinen Winkel unterscheide, welche zwo gerade Linien, oder zwo ebene Flächen, mit einander machen, eine solide Ecke zu nennen pfleget. Wir haben aber diesen Zusatz im Teutschen nicht nöthig, weil die Benennung einer Ecke dieselbe genugsam von einem Winkel unterscheidet. *F. 358.*

§. 41. Man hat bey dergleichen Ecken die Linien AC, CD, DE, EA mit welchen wir die Winkel ABC, CBD, DBE, EBA geschlossen haben, in keine Betrachtung zu ziehen, weil diese in der Ecke selbst nichts ändern. Wir haben sie bloß deswegen gezeichnet, damit alles desto besser in die Augen fallen möchte, und wir werden es aus der Ursache auch künftig thun. Wir werden aber auch an statt der geraden Linien uns der Cirkelbogen bedienen, welche aus dem Puncte B, zwischen AB, CB, oder zwischen CB, DB und so ferner, können beschrieben werden, und also eine Ecke aus Ausschnitten eines Cirkels zusammen setzen. Man siehet leicht, daß auch dieses der Deutlichkeit halber könne angenommen werden, und in der Sache selbst nichts ändere.

§. 42. Die Winkel, ABC, CBD aber auf deren Grösse alles ankommet, und welche nicht verändert werden können, ohne daß zugleich die Ecke verändert wird, heissen die Seiten der Ecke. Es können derselben so viele seyn, als man wil, nur nicht weniger als drey, und man hat also dreyseitige, vierseitige, fünfseitige Ecken, und so fort. Ob zwar übrigens die Ecke so gleich verändert wird, wenn man in der Grösse ihrer Seiten etwas ändert; so folget doch nicht, daß alle Ecken gleich sind, die gleiche Seiten haben: wie man leicht siehet.

§. 43. Auch siehet man ohne Schwierigkeit, daß in einer jeden Ecke, sie mag so viele Seiten haben als man wil, die Summe aller

XII. Abschnitt.

Seiten ausser einer, grösser seyn müsse als diese letztere Seite. Denn gleichwie die gerade Linie, die zwischen zweyen gegebenen Puncten lieget, kürzer ist, als eine jede andere krumme oder gebrochene Linie, die man von einem dieser Puncte an das andere ziehen kan: also ist auch die Ebene ABE, welche zwischen den geraden Linien AB und BE lieget, von einer dieser Linien an die andere weniger ausgedehnet, als die gebrochene Ebene, welche aus ABC, CBD, und DBE zusammen gesetzet ist. Und wenn man die Winkel ABC und ABD, CBE dergestalt angenommen hat, daß zween derselben ABD+CBE kleiner sind als der dritte ABC: so kan man aus denselben keine Ecke verfertigen, weil, wenn man die Winkel ABD und CBE gegen einander neiget, damit, wenn es möglich wäre, die Linie BD die BE erreichen möge, BD endlich in Bd fället, und den Winkel ABd dem Winkel ABD gleich machet, und BE in Be zu liegen kommet, wen BCe=BCE. Da denn, weil ABd+CBe kleiner ist als ABC, die Linien Bd, Be einander nicht erreichen, oder wenigstens erst in der Fläche ABC zusammen fallen, wenn ABD+CBE so groß ist als ABC, indem nunmehro der Winkel dBe verschwindet. In beyden dieser Fällen entstehet also keine Ecke: und sol demnach eine Ecke werden, so muß nothwendig ABD+CBE grösser seyn als ABC. Man siehet leicht, daß eben dieses auch von solchen Ecken richtig sey, welche mehr als drey Seiten haben.

F. 359.

§. 44. Noch eine andere Einschränkung bey den Seiten der solchen Ecken ist, daß dieselbe zusammen weniger betragen, als vier gerade Winkel; oder daß, wenn man die Seiten solcher Ecken mit Bogen geschlossen hat, welche aus der Spitze derselben B mit einerley Radius beschrieben worden sind, diese Bogen zusammen weniger, als den Umkreis eines Cirkels, ausmachen. Dieses könten wir aus dem Satze herleiten, welchen wir eben als bekant angenommen haben: es lässet sich aber dasselbe auch vor sich eben so leicht einsehen, als dieser Satz: und wir achten nicht nöthig, es zu beweisen. Man siehet leicht, daß wenn man in einer Ebene um einen beliebig angenommenen Mittelpunct B einen Cirkel beschreibet, und von diesem Mittelpuncte die Halbmesser BA, BC, BD, BE nach Belieben ziehet, man ohnmöglich die Ausschnitte ABC, CBD, DBE und EBA werde gegen einander neigen, und dadurch eine Ecke zuwege bringen können. Dieses aber müste seyn, wenn alle Seiten einer Ecke vier gerade Winkel, oder, wenn man sie als Ausschnitte gleicher Cirkel ansiehet, einen ganzen Cirkel ausmachen.

F. 360.

machen könten. Noch vielweniger also können alle Seiten einer Ecke mehr betragen, als vier gerade Winkel.

XII. Abschnitt.

§. 45. Wenn man diese zween Sätze zusammen nimmet, so kan man daraus schliessen, daß keine Seite einer Ecke, so viele deren auch seyn mögen, so groß seyn könne, als zween gerade Winkel. Denn wäre eine Seite so groß als zween gerade Winkel, so müsten die übrigen zusammen grösser seyn als zween gerade Winkel, nach dem ersteren Satz; XII, 43. wäre aber dieses, so betrügen die Seiten alle zusammen mehr als vier gerade Winkel, welches wider den letzteren dieser Sätze XII, 44. streitet.

Sphärische Dreyecke.

§. 46. Dieses sind allgemeine Eigenschaften aller solchen Ecken, es mögen dieselben so viele Seiten haben als man wil. Wir haben aber hier nicht nöthig andere Ecken zu betrachten als die einfachesten unter allen, welche nemlich nur drey Seiten haben. Denn daß der Seiten nicht weniger seyn können als drey, ist gar leicht einzusehen. Eine dergleichen Ecke wird in der 361 Zeichnung vorgestellet, da die Winkel, welche die Ecke einschliessen, und ihre Seiten abgeben, sind ABC, CBD und DBA, welche wir mit den Bogen AC, CD, DA geschlossen haben, die mit einerley Oefnung des Cirkels um B in den Flächen der Winkel beschrieben worden sind. Dergleichen Ecken werden wir dreyseitige Ecken nennen.

F. 361.

§. 47. Eine dreyseitige Ecke hat drey Winkel, welche die Seiten derselben mit einander machen. Der erste ist die Neigung der Seite CBA gegen die Seite DBA, welche sie in der geraden Linie BA schneidet. Der zweyte ist die Neigung der Seite CBD gegen die Seite ABD, mit welcher sie in der geraden Linie DB zusammen laufet, und der dritte ist die Neigung der Seiten ABC, DBC, welche in BC zusammen laufen, gegen einander. Wir werden diese Winkel öfters mit drey Buchstaben bezeichnen, wie sonst gewöhnlich ist, und die Neigung der Seite ABC gegen ABD nennen CAD. Man muß sich also hüten, daß man dabey sich keinen andern Begrif beyfallen lasse, als denjenigen, welchen wir eben zu geben bemühet gewesen sind.

§. 48. Eine dreyseitige Ecke, die vollkommen so aussiehet als diejenige, so die gegenwärtige Zeichnung vorstellet, in welcher nemlich die Seiten mit Cirkelbogen geschlossen sind, kan allezeit entstehen, wenn man eine Kugel vermittelst dreyer grossen Cirkel derselben schneidet. Es stelle in der Kugel ABCD selbst ABCD einen dergleichen Cirkel vor.

F. 362.

XII. Abschnitt. Der andere sey BGDF, so den vorigen in dem Durchmesser BD schneidet, welchen folgends diese Cirkel gemeinschaftlich haben. Wir setzen nicht, daß die Fläche dieses Cirkels BGDF auf die Fläche des Cirkels ABCD perpendicular sey, damit wir die Begriffe nicht ohne Noth einschränken. Denn es können zwar einer dieser Cirkel auf den andern perpendicular stehen; es ist aber dieses nicht nothwendig. Endlich sey der dritte Cirkel AFCG, welcher den ersten in AC schneidet, und den zweyten in FG, welches also die gemeinschaftlichen Durchmesser dieses Cirkels und der zween vorigen sind: so ist nunmehro DEFC eine dreyseitige Ecke, dergleichen wir erkläret haben. Ihre Seiten sind DEF, DEC, und FEC, und ihre Winkel, die Neigungen dieser Flächen gegen einander.

§. 49. Aus dieser Ursache pfleget man die dreyseitigen Ecken auch **sphärische Dreyecke** zu nennen. Zwar stellet man sich dieselbigen etwas anders vor, indem man sie so nennet. Ein sphärisches Dreyeck ist eigentlich ein Theil der Oberfläche einer Kugel, DFC, welcher in drey Bogen dreyer der grösten Cirkel der Kugel, DF, DC, FC eingeschlossen ist: und diese Bogen heissen die Seiten des sphärischen Dreyeckes. Die Winkel aber desselben sind die Winkel, welche diese Bogen bey F, D, C mit einander machen. Das ist, der Winkel bey F ist derjenige, welchen die zwo geraden Linien mit einander machen, deren eine den Bogen FD und die andere den Bogen FC in F berühret. Eben so ist es mit den übrigen.

§. 50. Es ist aber dieser Winkel bey F, wie wir XII, 39. gesehen haben, der Neigung der Seite DEF gegen die Seite CEF gleich, weil die Berühungslinien, die wir uns vorstellen, beyde auf den Halbmesser EF perpendicular stehen, und die eine in der Fläche der Seite DEF, die andere aber in der Fläche der Seite CEF lieget. Also ist der Winkel, des sphärischen Dreyeckes DFC von dem Winkel DFC der dreyseitigen Ecke DEFC nicht verschieden. Aus eben der Betrachtung erhellet, daß der Winkel DCF des sphärischen Dreyeckes mit dem Winkel DCF der dreyseitigen Ecke DEFC vollkommen überein komme: wie auch der Winkel FDC des sphärischen Dreyeckes, mit dem Winkel FDC der dreyseitigen Ecke. Was aber die Seiten des sphärischen Dreyeckes anlanget, so sind diese Bogen, und die Seiten einer dreyseitigen Ecke Winkel. Als, der Bogen DF ist eine Seite des sphärischen Dreyeckes DFC, und der Winkel DEF ist eine Seite der dreyseitigen Ecke DEFC. Und weil ein Bogen kein Winkel ist, so kan man in der That nicht sagen, daß

daß die Seiten eines sphärischen Dreyeckes, und die Seiten einer drey- seitigen Ecke, eigentlich einerley seyn können. Allein es wird auch der Winkel DEF durch den Bogen DF gegeben, und der Bogen wird hinwiederum durch den Winkel bekant. Suchet man den Bogen DF, so darf man nur den Winkel DEF suchen: so hat man den Bogen, weil dieser allezeit zwischen den Seiten des gegebenen Winkels DEF, mit einer Oefnung die dem Halbmesser der Kugel gleich ist, leicht kan beschrieben werden: und wenn man den Bogen DF oder seine Verhältniß zu einem Quadranten hat, so erlanget man eben so leicht den Winkel DEF. Wegen dieser genauen Verknüpfung des Winkels DEF, welcher eine Seite in der dreyseitigen Ecke DEFC abgiebet, mit der Seite DF des sphärischen Dreyeckes DFC, und weil es in der Anwendung auf eins hinaus kommet, ob man das eine oder das andere dieser zwey Dinge hat, oder suchet: kan man die Seite DF des Dreyeckes mit der Seite DEF der dreyseitigen Ecke vor einerley halten. Ja es wird in der Anwendung der Unterschied destomehr aufgehoben, weil man so wohl die Seite DF durch ihre Verhältniß gegen einen oder vier Quadranten, als auch den Winkel DEF durch seine Verhältniß gegen einen oder vier rechte Winkel auszudrücken pfleget, welche zwo Verhältnisse allezeit gleich sind. VII, 64.

XII. Abschnitt.

§. 51. Es wird demnach alles, was von den Seiten und Winkeln der dreyseitigen Ecken wird gezeiget werden, auf die sphärischen Dreyecke anzuwenden seyn. Wir geben aber deswegen die Beweise lieber von den dreyseitigen Ecken, als von den sphärischen Dreyecken, weil jene durch die Figuren sich deutlicher ausdrucken lassen; und die meisten Beweise, so von denselben hier zu geben sind, aus demjenigen, so wir von der Neigung der Flächen gegen einander gewiesen haben, gar leicht fliessen: da, wenn man sich die sphärischen Dreyecke, so wie wir sie erkläret haben, vorstellet, man öfters in etwas weitläuftigere Beweise verfället, und überhaupt die Einbildungskraft stark angegriffen wird. Wir werden so gar das Wort eines sphärischen Dreyecks künftig selten gebrauchen, und uns meistentheils an die Benennung einer dreyseitigen Ecke halten.

§. 52. Wir merken aber noch an, ehe wir die gegenwärtige Figur verlassen, daß, wenn dreye der grösten Cirkel einer Kugel ABCD, FBGD, AFCG einander schneiden, in der That acht dreyseitige Ecken zum Vorschein kommen, deren erste die DEFC ist, welche wir bishero gebrauchet haben, und die zwote DEFA. Diese hat die Sei-

te

XII. Abschnitt.

te DEF mit der vorigen gemeinschaftlich: Die Seite DEA aber ergänzet die Seite der erstern DEC zu zween geraden Winkeln, und AEF ergänzet die Seite FEC ebenfals zu zween geraden Winkeln. Der Winkel DAF ist mit dem Winkel DCF einerley: der Winkel DFA aber ergänzet den Winkel DFC zu zween geraden Winkeln, und eben das thut der Winkel ADF in Ansehung des Winkels FDC. XII, 38. Die dritte dieser dreyseitigen Ecken AEFB, beziehet sich auf AEFD vollkommen so, wie sich diese AEFD auf die erste DEFC beziehet. Und überhaupt ist von jeden zwo Ecken, welche, wie die betrachteten DEFC, DEFA neben einander auf einer Fläche AFC stehen, dasjenige richtig, so von diesen zwo Ecken gewiesen worden ist; sonst haben wir von denselben nichts besonderes zu bemerken.

§. 53. Nur müssen wir noch die dreyseitige Ecke AEGB mit der DEFC, die wir am ersten betrachtet haben, vergleichen. Es sind in diesen zwoen Ecken alle Seiten und Winkel gleich, welche einander entgegen stehen. Die Seite nemlich DEF ist gleich der Seite BEG, weil sie entstanden sind; indem die zwo geraden Linien BD, FG einander in E geschnitten. Aus eben dem Grunde ist auch die Seite AEG der Seite FEC gleich; denn die Durchmesser AC, FG sind ebenfals gerade Linien, die einander in E schneiden: und mit den Seiten AEB, DEC hat es eben die Bewandniß. Was aber die Winkel dieser zwo einander bey dem Mittelpuncte E entgegen gesetzten Ecken anlanget, so entstehen die Winkel derselben AGB und DFC, indem die zwo Flächen AFCG und BG = DF einander in der Linie FG schneiden, sie sind einander entgegen gesetzet, und demnach einander gleich. XII, 38. Eben so ist es auch mit den Winkeln ABG und CDF. Auch diese liegen zwischen den Flächen ABCD und BFDG, welche einander in BD schneiden, und sind einander entgegen gesetzet. Sie sind demnach ebenfals gleich. Und endlich liegen GAB und DCF zwischen den Flächen AFCG und ABCD, die einander in AC schneiden, wieder nach entgegen gesetzeten Seiten, und sind demnach ebenfals gleich. Demnach haben die zwo dreyseitigen Ecken AEGB und CEFD gleiche Seiten und gleiche Winkel: und zwar sind diejenigen Winkel derselben gleich, welche zwischen den gleichen Seiten enthalten sind, und diejenigen Seiten, welche zwischen den gleichen Winkeln liegen. Man siehet leicht, daß dieses von jeden zwo andern, der acht dreyseitigen Ecken der Kugel, welche einander gänzlich entgegen gesetzet seyn, gelten müsse.

XII. Abschnitt.

§. 54. Diese Anmerkung wird uns dienen, die Art, wie die dreyseitigen Ecken aus ihren Seiten und Winkeln zusammen gesetzet werden können, durch Betrachtungen heraus zu bringen, welcher diejenige ganz ähnlich sind, auf welche wir die ersten Beweise der gemeinen Dreyecke gründeten, indem wir sie nemlich in Gedanken in einander passen; welches sonst nicht möglich wäre. Denn es können nicht alle dreyseitige Ecken zusammen fallen, und in einander passen, welche gleiche Seiten und gleiche Winkel haben. Es fallen nemlich diese Ecken zusammen, und passen in einander, wenn man eine derselben dergestalt in die andere bringen kan, daß die Winkel, welche die Seiten derselben abgeben, zusammen fallen, welches erforderet, daß ein jeder Winkel der einen Ecke in die Fläche zu liegen komme, in welcher der Winkel der anderen Ecke lieget, so jenem gleich ist. Denn wenn dieses geschiehet, so passen auch die Winkel der dreyseitigen Ecken nothwendig in einander, und es wird aus den zwo Ecken nur eine einzige. Es seyn aber ABCD, abcd zwo dreyseitige Ecken, in welchen die Seiten und Winkel gleich sind, welche wir mit einerley Buchstaben bezeichnet haben, ABC nemlich = abc, und CBD = cbd, wie auch A = a und D = d, ferner ABD = abd, und C = c: so werden dieselbe nicht in einander passen, man mag sie kehren wie man wil, und doch sind dergleichen dreyseitige Ecken gleich zu nennen, und werden auch würklich so genant, weil in der einen nichts ist, so in der andern nicht in eben der Grösse vorkäme. Denn die verschiedene Lage, welche die Seiten CBA, CBD und cba, cbd, wie auch die Winkel A, D und a, d gegen einander haben, kan in der Grösse der dreyseitigen Ecken selbst nichts ändern. Und da also gleiche dreyseitige Ecken seyn können, welche nicht in einander passen; so kan man nicht alles, so von der Gleichheit derselben zu erweisen ist, unmittelbar auf den ersten und augenscheinlichsten Grund der Gleichheit bringen, dessen wir erwehnet haben. Nimmet man aber so oft es nöthig ist, diejenige Ecke zu Hülfe, welche einer gegebenen dreyseitigen Ecke gänzlich entgegen gesetzet ist, so hat es hernach mit der Anwendung dieses Kennzeichens ganz keine Schwierigkeit.

F. 363.

§. 55. Diese Anwendung aber noch mehr zu erleichtern, nehme man nochmals zwo dergleichen Ecken, welche einander an ihren Spitzen E entgegen gesetzet sind, als AEGB und DEFC vor sich, welche in der 364 Figur besonders gezeichnet, und mit eben den Buchstaben bemerket sind; und stelle sich vor, daß man die Ecke AEGB um die

F. 362.

F. 364.

XII. Abschnitt.

Spitze derselben E dergestalt herum drehe, daß die Seite AEG beständig in der Ebene AFCG fortgehe, in welcher sie lieget, bis sie endlich auf die ihr gleiche Seite CEF fället: so fället die dreyseitige Ecke AEGB nunmehro in CEFd, und der Winkel CFd derselben ist dem Winkel AGB, und folgends dem Winkel CFD gleich: der Winkel d ist gleich dem Winkel D, und FCd dem FCD. Ferner aber ist auch die Seite FEd der Seite FED, und die Seite CEd der Seite CED gleich. Die dreyseitige Ecken nun, welche mit der FEdC zusammen passen, sind der FEDC gleich, ob sie zwar in diese nicht passen, weil die erstere dieser Ecken der letzteren gleich ist.

Gründe der Gleichheit zweyer dreyseitigen Ecken.

F. 365.

§. 56. Man nehme nunmehro die zwo Seiten CBA, DBA nach Belieben; aber doch eine jede derselben kleiner als einen halben Cirkel: denn wir haben XII, 45 gesehen, daß eine jede Seite einer Ecke kleiner seyn müsse, als zween rechte Winkel, und setze sie unter einem beliebigen Winkel CAD zusammen: so siehet man sogleich, daß, wenn man an dieselbe die dritte Seite CBD legen, und dadurch die dreyseitige Ecke ABCD ausmachen wil, dieses auf nicht mehr als auf einerley Art werde geschehen können: weil durch die drey Puncte CBD sich nicht mehr als eine ebene Fläche legen lässet, X, 15. Und daraus schliesset man sogleich, daß alle dergleichen Ecken, die aus den Seiten ABC, ABD, welche mit einander einen Winkel von der Grösse des Winkels CAD machen, zusammen gesetzet werden können, einander gleich seyn müssen: falls ihre Seiten eben so liegen, wie in der dreyseitigen Ecke, welche wir vor uns haben, so nehmlich, daß AC über die AD, und der Winkel A, welchen man angenommen, in Ansehung der Seite CD, deren Grösse aus demselben bestimmet wird, zur Linken falle. Denn jede zwo dreyseitige Ecken, welche auf die Art zusammen gesetzet werden, müssen nothwendig in einander passen, wie man leicht siehet. Nemlich die Seiten CBD sind in allen solchen Dreyecken von einerley Grösse, wie auch die Winkel C und die Winkel D, welche von gleichen Seiten eingeschlossen werden.

§. 57. Es kan aber auch der Winkel CAD anders an die Seite ABD gesetzet werden, so nemlich, daß die gegebene Seite ABC unter die ABD zu liegen komme, indem sie in ABC fället. Daß nun in diesem Falle dennoch die dreyseitige Ecke ABDc, welche man ausmachen kan, indem man an die Seiten ABD und ABc die dritte Sei-

te DBc anleget, der dreyseitigen Ecke ABDC; und also die Seite cBD der Seite CBD, der Winkel c dem Winkel C, und der Winkel ADc dem Winkel ADC gleich sey, erhellet, wenn man sich vorstellet, daß man diejenige dreyseitige Ecke, welche der ABCD bey der Spitze B entgegen gesetzet ist, an die AD dergestalt setzet, wie in der 364 Zeichnung GEBA an der FEDC stehet. Es muß in dieser Lage der Winkel der der CBAD entgegen gesetzeten dreyseitigen Ecke, welcher den CAD gleich ist, in den Winkel DAc passen, und die Seite desselben, welche der ABC gleich ist, auf die ABc fallen, XII, 55. Und weil auch die Seite ABD der verzeichneten dreyseitigen Ecke ABDc mit der Seite ABD, der der ABCD entgegen gesetzeten dreyseitigen Ecke zusammen fället; durch die Linien DB und cB aber nicht mehr als eine ebene Fläche geleget werden kan: so siehet man, daß die Seiten und Winkel der dreyseitigen Ecke ABDc überhaupt mit den Seiten und Winkeln, die der ABCD entgegen gesetzeten Ecke zusammen fallen, und daß folgends die Seiten und Winkel dieser Ecke, welche eben so, wie die Seiten und Ecken in ABDc liegen, diesen Seiten und Winkeln der Ecke ABDc gleich seyn. Also sind eben die Seiten und Winkel in ABDc auch den Seiten in ABDC gleich, ob sie zwar in verkehrter Ordnung liegen, XII, 55.

XII. Abschnitt.

§. 58. Das erste also, wodurch eine dreyseitige Ecke mit ihren übrigen Seiten und Winkeln bestimmet wird, sind zwo Seiten, und der Winkel, welchen sie einschliessen; und hieraus können wir eben dergleichen Schlüsse ziehen, als wir bey den gemeinen Dreyecken aus dem, dem gegenwärtigen vollkommen ähnlichen Satze IV, 112 gezogen haben. Wir sehen ohne Weitläuftigkeit hieraus, daß, wenn man setzet, daß in der dreyseitigen Ecke ABDC die Seiten ABC und ABD einander gleich sind: auch die Winkel, welche an den gleichen Seiten liegen, gleich seyn müssen, C nemlich = CDA. Denn wenn man an die Seite ABD die dreyseitige Ecke ABDc anbringet, welche der ABDC bey B entgegen gesetzet war: so ist Ac = AC = AD, und der Winkel C ist dem Winkel c gleich. Weil aber auch der Winkel DAc dem Winkel DAC gleich ist, so kan man die Ecke ABCD um die AB dergestalt wenden, daß ABD in ABc, und AC in AD falle: und wenn dieses geschiehet, so fället auch CBD mit der Seite cBD zusammen. Da nun also der Winkel c dem Winkel C gleich ist, und nunmehro der Winkel ADC mit dem Winkel c zusammen fället, und

 ihm folgends nothwendig gleich ist; so muß eben dieser Winkel ADC auch dem Winkel C gleich seyn, welches wir erweisen solten.

§. 59. Sind demnach in einer dreyseitigen Ecke alle Seiten gleich, so sind nothwendig auch alle Winkel gleich: weil jederzeit diejenigen Winkel gleich seyn müssen, welche an den gleichen Seiten liegen.

§. 60. Wir können diesen Satz verkehren, und zwar so, daß wir zeigen, daß aus einer Seite und aus zween Winkeln, die an derselben Seite liegen, nicht verschiedene dreyseitige Ecken können zusammen gesetzet werden: sondern daß in zwoen dreyseitigen Ecken, in deren einer eine Seite vorkommet, welche einer Seite der anderen Ecke gleich ist, und an welcher Winkel liegen, die denjenigen Winkeln gleich sind, zwischen welchen die erwehnete Seite in der anderen Ecke lieget: auch die übrigen Winkel gleich sind: wie auch die Seiten, die in den zwoen Ecken zwischen den gleichen Winkeln liegen. Und der Beweiß hievon ist gar leicht. Denn wenn man in der dreyseitigen Ecke ABCD die Seite ABD lässet wie sie ist, und behält auch den Winkel CAD: verändert aber die Seite ABC, und machet sie in Gedanken grösser oder kleiner als sie die Figur vorstellet; so wird dadurch nothwendig auch der Winkel ADC grösser oder kleiner. Gehet also in dem Winkel ADC keine Veränderung vor, so kan auch in der Seite ABC keine Veränderung vorgehen. Und demnach sind in allen dreyseitigen Ecken, welche aus der Seite ABD, und aus den Winkeln CAD, ADC zusammen gesetzet sind, auch die Seiten ABC gleich, die dem Winkel ADC entgegen stehen. Hieraus aber folget, vermittelst des Satzes, welchen wir eben erwiesen haben, XII, 58, daß auch die übrigen Seiten solcher Dreyecke, und die übrigen Winkel gleich seyn müssen. Wolte man die Winkel in verkehreter Ordnung an die gegebene Seite ABD setzen, den Winkel CAD, nemlich an BD, und den Winkel CDA an AB: so würde die dreyseitige Ecke zwar nicht mit der ABCD, wohl aber mit der ABcD zusammen passen, und also dennoch der ABCD gleich seyn, weil die ABcD ihr gleich ist. Dieses erhellet aus dem Beweise, welchen wir gegeben haben, gar deutlich.

§. 61. Und wenn man dieser Sache etwas weiter nachdenket, so findet man, daß daraus folge, daß auch die Seiten ABC und CBD einer dreyseitigen Ecke gleich seyn müssen, wenn die Winkel CAD und CDA gleich sind, an welchen diese Seiten liegen. Denn in diesem

sem Falle kan die Ecke ABCD in die Ecke ABcD dergestalt gepasset werden, daß der Winkel CDA in den Winkel DAc, und CAD in ADc fället. Und da die Seite AC der Ac allezeit gleich ist, daraus aber, weil auch CBD auf die cBA passet, zugleich erhellet, daß auch CBD der cBA gleich sey; so ist zu schliessen, daß auch die Seiten CBA, CBD einander selbst gleich seyn.

§. 62. Hierinnen also stimmen die dreyseitigen Ecken wieder mit den gemeinen Dreyecken überein; und es ist also nothwendig, daß hieraus wieder eben dergleichen Sätze folgen, als wir bey den Dreyecken bereits gehabt: und daß auch in dreyseitigen Ecken immer der Winkel grösser seyn müsse, als ein anderer Winkel eben der Ecke, welcher der grösseren Seite entgegen stehet, IV, 240. Denn man setze, daß in der dreyseitigen Ecke ABCD der Winkel CDA grösser sey, als der Winkel CAD, und lege an die gerade Linie BD die Seite DBE dergestalt, daß der Winkel EDA dem Winkel CAD gleich werde: so ist die Seite EBA der Seite EBD gleich, XII, 61. Man setze zu diesen beiden Seiten den Winkel EBC, so wird auch ABE + EBC = EBD + EBC, das ist, ABC = EBD + EBC. Nun aber ist EBD + EBC grösser als CBD, weil in einer jeden dreyseitigen Ecke die Summe zwoer Seiten grösser ist als die dritte, XII, 43: demnach ist auch ABC grösser als CBD. Es ist aber die Seite ABC dem grösseren Winkel CDA und CBD dem kleineren CAD entgegen gesetzet.

F. 366.

§. 63. Dieses war die erste Zusammensetzung der dreyseitigen Ecken. Man kan sie, zweytens, auch aus ihren drey Seiten verfertigen, wenn man dieselbe gehörig an einander bringet. Wir haben gleich Anfangs gezeiget, wie die Seiten beschaffen seyn müssen, aus welchen diese Zusammensetzung möglich ist. Jede zwo derselben müssen grösser seyn als die dritte; eine jede ins besondere muß kleiner seyn als ein halber Cirkel, und alle dreye zusammen, müssen kleiner seyn als ein ganzer Cirkel.

§. 64. Wir übergehen die Art und Weise, wie diese Zusammensetzung zu verrichten ist, weil man sich dieselbe leicht vorstellen kan, und bemerken nur den Satz, daß bey allen dreyseitigen Ecken, welche aus gleichen Seiten zusammen gesetzet sind, so nemlich, daß einer jeden Seite der einen Ecke eine Seite der andern gleich sey: auch die Winkel gleich seyn werden, welche in den beiden Ecken zwischen den gleichen Seiten liegen. Denn man stelle sich vor, daß auf die Seite ABD

F. 367.

XII. Abschnitt.

zwo dreyseitige Ecken ABDC und ABDc gesetzet seyen, in welchen die Seiten ABC und ABc, wie auch DBC und DBc einander gleich seyn, und lege durch BC und Bc die ebene Fläche CBc: so bekommt man dadurch zwo andere dreyseitige Ecken ABCc und DBCc, deren jede zwo gleiche Seiten hat, ABC nemlich = ABc, und DBC = DBc. Folgends sind die Winkel derselben, welche an den gleichen Seiten liegen, einander gleich, ACc = AcC, wie auch DCc = DcC, XII, 58. Setzet man nun diese Winkel zusammen, so wird auch ACc + DCc = AcC + DcC, das ist, ACD = AcD. Also werden in den zwo dreyseitigen Ecken ABCD und ABcD die Winkel ACD, AcD von gleichen Seiten ABC = ABc und DBC = DBc, eingeschlossen; es sind demnach XII, 58 ausser diesem Winkel auch die Winkel CAD und cAD, wie auch CDA und cDA, einander gleich.

§. 65. In dem Falle, welchen wir betrachtet haben, liegen die Seiten der Ecken in verkehrter Ordnung, das ist, wenn man die Ecke ABcD dergestalt auf ABD setzen wolte, daß c an die Seite dieser Fläche zu liegen käme, an welcher C lieget, so müste DBc an AB liegen, und ABc an DB. Bey dieser Ordnung also der Seiten hat der Satz seine Richtigkeit. Man kan aber auch vermittelst derselben einsehen, daß auf die Seite ABD aus den Seiten ABC, DBC keine dreyseitige Ecke gesetzet werden könne, welche von der ABCD verschieden wäre, wenn man die Seite ABC an AB und nicht an BD setzet, an welche BD hingegen die andere Seite DBC gesetzet werden muß, und diese Seiten dergestalt kehret, daß sie, wie die Seiten ABC, DBC über, und nicht unter der Fläche ABD zusammen stossen. Denn wenn man sich auf AD eine gleichseitige Ecke vorstellet, deren Seite an AB der ABC gleich sey, und die Seite an BD der BDC; behält aber das Dreyeck ABDc, wie wir es vorher verfertiget und betrachtet haben, so kan man allezeit durch den Beweiß, welchen wir eben geführet, heraus bringen, daß der Winkel bey A der eingebildeten dreyseitigen Ecke, dem Winkel DAc gleich seyn müsse. Da nun der Winkel DAc dem Winkel DAC gleich ist, so muß auch der eingebildete Winkel bey A dem Winkel DAC gleich seyn. Es kan also die Seite CBA bey den gesetzeten Bedingungen keine andere Lage haben als die, welche die Zeichnung vorstellet. Und eben dieses ist auch von der Seite DBC auf eben die Art einzusehen. Demnach sind auch die Winkel solcher dreyseitigen Ecken gleich, welche aus gleichen Seiten in einerley Ordnung zusammen gesetzet sind.

§. 66.

§. 66. Die dritte Art eine dreyseitige Ecke zusammen zu setzen ist, wenn man zwo Seiten derselben annimmet, und einen Winkel, welcher zwischen diesen zwo Seiten nicht enthalten ist. Aus diesen Dingen aber lassen sich öfters verschiedene Dreyecke verfertigen; und man kan also nicht sagen, daß jede zwo dreyseitige Ecken, in welchen zwo Seiten gleich sind, und ein Winkel, auch nothwendig einander selbst gleich seyn müssen. Wir müssen die Umstände, unter welchen aus zwo gegebenen Seiten einer dreyseitigen Ecke, und aus einem Winkel derselben, welcher nicht zwischen den gegebenen Seiten lieget, zwar solche Ecken von verschiedenen Seiten zusammen gesetzet werden können, etwas genauer betrachten.

XII. Abschnitt.

§. 67. Es sey aus der Seite ABD, aus der Seite CBA und aus dem Winkel D, die dreyseitige Ecke ABCD zusammen gesetzet. Man lege durch AB die Ebene ABE dergestalt, daß sie auf der Seite CBD, welche man bis an d vergrössert hat, perpendicular stehe. Man mache sodann den Winkel EBc dem Winkel EBC gleich, und lege durch AB, Bc die ebene Fläche ABc: so wird die Seite ABc der Seite ABC gleich, und die dreyseitige Ecke ABcD eben so wohl als die vorige ABCD aus dem Winkel D, aus der Seite ABD, und aus der Seite ABc, welche der ABC gleich ist, zusammen gesetzet seyn. Denn in den zwo dreyseitigen Ecken ABCE und ABcE sind die Winkel AEC und AEc gerade, und folgends einander gleich; und die Seiten cBE, CBE hat man einander ebenfals gleich gemacht; die Seite ABE aber ist diesen beiden Ecken gemeinschaftlich: demnach sind auch die übrigen Seiten ABC und ABc gleich, XII, 58. Es sind demnach, unter den Umständen des Satzes, allezeit zwo dreyseitige Ecken möglich, so oft die Art die eine derselben aus der andern zu verfertigen, welche eben gezeiget worden ist, sich anwenden lässet. Man siehet leicht, daß dieses öfters geschehen könne, wenn das Punct C von dem Punct E verschieden ist, und also die Seite ABC nicht selbst auf der Seite DBC perpendicular stehet. Es wäre aber zu weitläuftig, die Umstände genau aus einander zu setzen, bey welchen diese Zusammensetzung zweyer dreyseitigen Ecken angehet, und bey welchen sie nicht statt hat.

F. 368.

§. 68. Das einzige merken wir an, daß, wenn aus dem Winkel D, aus der Seite ABD, und aus der Seite ABC = ABc die zwo dreyseitigen Ecken ABDC, ABDc zusammen gesetzet sind, in der dreyseitigen Ecke ABCc die Winkel ACc und AcC gleich seyn werden.

XII. Abschnitt.

den. Dieses erhellet so wohl aus dem gegebenen Beweise, als auch daraus, weil die Seiten dieser Ecke ABC und ABc einander gleich sind, XII, 58. Nun aber ist der Winkel ACc die Ergänzung des Winkels ACD zu zwoen geraden Winkeln, XII, 38; also ergänzet auch der Winkel AcD den Winkel ACD zu zween geraden Winkeln. Und es machen also bey zwo dreyseitigen Ecken ABCD, ABcD, welche aus dem Winkel D und den zwo Seiten ABD und ABC = ABc zusammen gesetzet worden sind, die Winkel C, c, welche Anfangs nicht gegeben waren, und welche nicht zwischen den gegebenen Seiten liegen, wenn man sie zusammen setzet, jederzeit zween gerade Winkel.

§. 69. Aus eben der Figur siehet man auch sogleich, daß aus zween Winkeln einer dreyseitigen Ecke, und aus einer Seite derselben, welche aber nicht zwischen den gegebenen Winkeln lieget, öfters zwey dreyseitige Ecken zusammen gesetzet werden können; und daß also nicht alle dergleichen Ecken nothwendig gleich sind, welche aus zween Winkeln zusammen gesetzet sind, und aus einer Seite, welche nicht zwischen diesen Winkeln lieget. Denn die dreyseitigen Ecken ABCD und ABcd sind würklich dergestalt zusammen gesetzet. Weil der Winkel ECA dem Winkel EcA gleich ist, so sind auch die Ergänzungen dieser Winkel DCA und dcA gleich. Da nun aber dieses der Winkel d dem Winkel D gleich ist; so haben diese dreyseitige Ecken würklich zween gleiche Winkel, und über dieses ist die Seite des einen cBA der Seite des andern CBA gleich. Dennoch sind weder die übrigen Winkel cAd und CAD, noch die Seiten dBA, DBA einander nothwendig gleich; wie man leicht siehet.

§. 70. Doch machen die zwo Seiten dieser Ecken dBA und ABD mit einander allezeit zween gerade Winkel aus; und diese Seiten sind diejenigen, welche in den zwo dreyseitigen Ecken ABCD und ABcd nicht zwischen den Winkeln liegen, welche einander gleich sind. Denn von den Seiten dBc und DBC, die zwischen diesen gegebenen Winkeln d, c und D, C liegen, ist nichts dergleichen zu sagen.

§. 71. Es ist noch eine Art übrig, eine dreyseitige Ecke zusammen zu setzen, wenn nemlich die drey Winkel derselben gegeben oder angenommen sind. Wir werden die dahin gehörige Sätze zu zeigen keine grosse Weitläuftigkeit brauchen; und es wird sich alles sogleich aus dem vorigen herleiten lassen, wenn wir nur eine besondere Eigenschaft der dreyseitigen Ecken werden erwiesen haben, welche diese ist: Es lässet sich

F. 369.

sich zu einer jeden dreyseitigen Ecke ABCD eine andere abcd beschreiben, deren Seiten abc, cbd, dba die Ergänzungen der Winkel C D und A der vorigen zu zweyen geraden Winkeln sind, und deren Winkel a, c, d hinwiederum die Seiten ABC, CBD, und ABD zu zweyen geraden Winkeln ergänzen. Nemlich die Seite abc ergänzet den Winkel C zu zweyen geraden Winkeln, die Seite abd den Winkel A, und die Seite cbd den Winkel D. Hingegen ergänzet die Seite ABC den Winkel a, die Seite CBD den Winkel c, und die Seite ABD den Winkel d, ebenfals zu zweyen geraden Winkeln.

XII. Abschnitt. F. 369.

§. 72. Man kan die Ecke abcd, welche auf die gegebene ABCD sich dergestalt beziehet, sich nachfolgender massen deutlich vorstellen. Man nehme innerhalb der gegebenen Ecke ABCD das Punct b nach Belieben, und lasse aus demselben auf jede Seite der ABCD eine Perpendicularlinie fallen. Es sey nemlich bE auf ABC perpendicular, bF auf CBD, und bG auf ABD. Man verlängere diese Perpendicularlinien nach Belieben in a, c, d, und beschreibe grösserer Deutlichkeit halben, um den Mittelpunct b, die Bogen ac, ad, cd: so hat die dreyseitige Ecke abcd deren Seiten die Ausschnitte abc, cbd, und abd sind, die erzehlten Eigenschaften.

§. 73. Denn wenn die Fläche abc die Fläche ABC in EJ schneidet, und die Fläche CBD in JF, und wenn EH, HG die Linien sind, in welchen die Flächen ABC und ABD von der abd geschnitten werden, und GK, KJ diejenigen, in welchen die Fläche abc die beiden ABD und CBD geschnitten, und man stellet sich den Cörper JEbFKBHG vor, welcher von den sechs Flächen eingeschlossen wird, die zugleich die Seiten der zwo dreyseitigen Ecken ABCD, abcd abgeben: so siehet man nach einer kleinen Betrachtung, welche sich auf die gewiesene Zusammensetzung gründet, daß bE auf EJ und EH perpendicular sey. Denn diese bE ist auf die Fläche EHBJ perpendicular. Und aus eben der Ursache sind die Winkel bGH, bGK, wie auch bFK, bFJ gerade X, 30. Demnach ist der Winkel JEH derjenige, welchen die Fläche bEJ mit der Fläche bEH machet X, 42. und folgends dem Winkel a gleich, und der Winkel HGK ist aus eben den Gründen dem Winkel d, wie auch JFK dem Winkel c gleich. Weil aber auch daraus, daß die Fläche abc auf den beiden Flächen ABC und CBD perpendicular stehet, hinwiederum fliesset, daß diese Flächen ABC und CBD beide auf die abc perpendicular sind; und dieselbe

XII. Abschnitt. einander in CB schneiden, so ist auch diese CB auf die Fläche abc X, 49. und folgends auf JE und JF perpendicular, und die Winkel BJE, BJF sind gerade. Aus eben den Gründen folget auch, daß die Winkel BHE, BHG, wie auch BKG, BKF gerade seyn. Also ist wieder der Winkel EJF der Neigung der Fläche BJE gegen BJF, das ist, dem Winkel C der dreyseitigen Ecke ABCD, gleich, und der Winkel EHG dem Winkel A, wie auch GKF dem Winkel D.

§. 74. Nun sind in einem jeden Vierecke alle vier Winkel allezeit vier geraden Winkeln gleich IV, 235. und wenn also zween derselben selbst gerade sind, so machen die zween übrigen ebenfals zween gerade Winkel mit einander. Diese Umstände aber treffen bey den Vierecken ein, welche den Cörper EJFbG = KBH einschliessen. In dem Vierecke EbFJ sind die Winkel JEb und JFb beide gerade; in dem Vierecke JEHB sind die zween Winkel EJB, EHB ebenfals gerade, und so ist es bey allen Seiten dieses Cörpers. Es müssen demnach auch die übrigen Winkel dieser Vierecke eine Summe geben, welche zween geraden Winkeln gleich sey. Also ist der Winkel EbF oder abc die Ergänzung des Winkels EJF = C, zu zween geraden Winkeln. Eben so ergänzet EbG oder abd den Winkel EHG = A und FbG = cbd ergänzet den Winkel D. Das ist, die Seiten der Ecke abcd ergänzen die Winkel der Ecke ABCD zu zween geraden Winkeln. Ferner ergänzet auch in dem Vierecke JBHE der Winkel HBJ oder ABC den Winkel HEJ = a zu zween geraden Winkeln; HBK oder ABD ergänzet den Winkel HGK = d, und KBJ oder DBC ergänzet den Winkel JFK = c. Folgends ein jeder Winkel des Dreyeckes abcd eine Seite des Dreyeckes ABCD, und eine jede Seite des Dreyeckes abcd einen Winkel des Dreyecks ABCD zu zween geraden Winkeln.

§. 75. Dieser Satz ist an sich artig und von Nutzen: Gegenwärtig können wir aus demselben vors erste die Gränzen einsehen, welche die Summe aller Winkel in einer dreyseitigen Ecke niemals überschreiten kan. Wenn wir wieder einen geraden Winkel mit R bezeichnen, so ist $A + abd = 2R$, und folgends $A = 2R - abd$ vermöge des gegenwärtigen Satzes, und D ist $= 2R - dbc$, wie auch $C = 2R - abc$. Setzet man diese Winkel beiderseits zusammen, so wird $A + D + C = 6R - abd - dbc - abc$. Dieses bestimmet die Summe aller Winkel einer dreyseitigen Ecke, aus den Seiten einer andern, und man siehet daraus erstlich, daß diese Summe der Winkel

kel A + C + D niemals so groß seyn könne, daß sie sechs gerade Winkel ausmachte. Denn man mag sich die Seiten abd, dbc, abc auch noch so klein vorstellen, so müssen sie doch einige Grösse haben, und weil man dieselbe von sechs geraden Winkeln abziehen muß, damit die Summe A + C + D übrig bleibe, so kan diese Summe niemals völlig zu sechs geraden Winkeln steigen. Indessen kan diese Summe doch sechs geraden Winkeln gar nahe kommen, weil die Seiten der Ecke abcd gar sehr klein seyn können. Zweytens schliessen wir aus eben der Berechnung, daß die Summe der Winkel A, B, C allezeit grösser seyn müsse als zween gerade Winkel. Denn diese Summe A + C + D wird desto kleiner, je grösser die Seiten der Ecke abcd werden, welche man von sechs geraden Winkeln abziehen muß, wenn man die Summe berechnen wil. Nun kan die Summe der Seiten abd, dbc, abc niemals so groß werden, daß sie vier gerade Winkel betrage, sondern sie ist allezeit kleiner XII, 44. Also ist dasjenige, so man von 6 R abziehen muß, damit A + C + D übrig bleibe, allezeit weniger als 4 R, folgends bleibet vor A + C + D allezeit mehr als 2 R übrig. Die Summe aller Winkel einer dreyseitigen Ecke beträget demnach niemals mehr als sechs gerade Winkel, und niemals weniger als zwey. Und diese Summen können in zwo solchen Ecken niemals um ganze vier gerade Winkel von einander verschieden seyn.

§. 76. Sonst können wir nunmehro dasjenige gar leicht zeigen, warum wir diesen Satz insonderheit erwiesen haben, daß nemlich aus drey gegebenen Winkeln nicht mehr als einerley dreyseitige Ecke zusammen gesetzet werden können. Wenn die Ecken A, C, D, der dreyseitigen Ecke ABCD bestimmet sind, so können die Seiten der dreyseitigen Ecke abcd nicht verändert werden, weil die Seite abd den Winkel A zu zween rechten Winkeln ergänzet, und dbc den Winkel D, wie auch abc den Winkel C. Es sind demnach die Seiten dieser Ecke abcd von bestimmeter Grösse. Also sind auch die Winkel eben dieser Ecke a, c und d von bestimmeter Grösse, denn wir haben XII, 64. gesehen, daß so bald die Seiten einer solchen Ecke gegeben sind, auch die Winkel derselben gegeben werden, und daß sich in denselben nichts verändern lasse, so lang die Seiten nicht verändert werden. Sind nun aber die Winkel a, c, d von bestimmter Grösse, so sind auch ihre Ergänzungen zu zween geraden Winkeln ebenfals bestimmet. Diese Ergänzungen aber sind die Seiten der Ecke ABCD, die Seite ABC nemlich ist die Ergänzung des Winkels a, die Seite CBD die Ergän-

XII. Abschnitt.

zung des Winkels c, und ABD ergänzet den Winkel d. Also werden diese Seiten ebenfals durch die Anfangs angenommenen Winkel A, D, C bestimmet, und so lange diese Winkel nicht verschieden sind, so sind auch diese Seiten nicht verschieden. Das ist, es lassen sich nicht zwo dreyseitige Ecken verfertigen, welche einerley Winkel hätten, und deren Seiten verschieden wären.

Besondere Eigenschaften der geradewinklichten dreyseitigen Ecken.

§. 77. Es werden im übrigen die dreyseitige Ecken in geradewinklichte und schiefwinklichte getheilet. Eine geradewinklichte dreyseitige Ecke ist diejenige, welche einen geraden Winkel hat; die übrigen Winkel mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, das ist, sie mögen gerade, spitzige oder stumpfe seyn. Schiefwinklicht aber ist eine dreyseitige Ecke, wenn sie gar keinen geraden, sondern lauter spitzige oder stumpfe Winkel hat. Wir müssen bey beiden noch etwas betrachten, ehe wir diese Abhandlung beschliessen.

F. 370. 371.

§. 78. Wil man eine dreyseitige Ecke verfertigen die geradewinklicht sey, so setze man auf eine beliebige Fläche rMR eine andere rNR perpendicular; so ist der Winkel R oder r gerade. Sodann ziehe man in der Fläche rMR die Linie CM nach Belieben, und lege an CM eine andere Fläche NCM, ebenfals nach Belieben, welche die rNR in CN schneide: so erhält man zugleich zwo dreyseitige und geradewinklichte Ecken NCMR und NCMr. Wir haben hier wieder vor die Seiten derselben Ausschnitte von gleichen Cirkeln genommen, deren Mittelpunct C ist. Es bekommen alle diese Seiten besondere Namen.

§. 79. Eine der zwo Seiten, welche den geraden Winkel R einschliessen, heisset die Grundseite. Man kan diese nach Belieben wehlen, ist sie aber einmal angenommen; so heisset die andere dieser zwo Seiten die Perpendicularseite, und diejenige, welche dem geraden Winkel entgegen gesetzet ist, wird die Hypotenuse genannt; wir finden im Teutschen kein recht bequemes Wort sie auszudrücken; vielleicht könte man sie die Gegenseite nennen, weil sie dem geraden Winkel entgegen stehet. Man kan also in der Ecke NCMR die Seite RCM vor die Grundseite annehmen. In dem Falle ist NCR die perpendicularseite, und NCM die Hypotenuse. Eben so ist es auch in der nebenstehenden dreyseitigen Ecke NCMr. Nimmet man in derselben

selben die Seite rCM vor die Grundseite an, so ist rCN die perpendicularseite, und eben die NCM ist die Hypotenuse.

XII. Abschnitt.

§. 80. Man setze an CM die Fläche ACM perpendicular auf auf rMR: wodurch die Winkel AMR und AMr gerade werden. Alles übrige bleibet, wie es XII, 78. angenommen worden ist. Weil nun also die Fläche rNR auf der rMR perpendicular stehet, welche die ACM in AC schneidet, so stehet X, 49. auch AC auf der rMR perpendicular, und die Winkel ACr, ACR, ACM sind alle gerade. Stellet man sich nun die rechtwinklichte dreyseitige Ecke ACMR vor, so siehet man, daß so bald der Winkel an der Grundfläche AMR gerade wird, auch die Perpendicularseite ACR, welche derselben nothwendig entgegen stehet, ein gerader Winkel werde. Man stelle sich nunmehro vor, daß man die Seite NCM dergestalt an CM gesetzet habe, daß der Winkel an der Grundseite NMR kleiner geworden, als der gerade AMR: so siehet man so gleich, daß dadurch auch die Perpendicularseite NCR kleiner werden müsse, als der gerade Winkel ACR, weil die Fläche NCM ohnmöglich von ACM nach R geneiget werden kan, ohne daß zugleich die gerade Linie CN in der Perpendicularfläche sich der CR nähere. Wir können also schliessen, daß wenn der Winkel NMR an der Grundseite RCM spitzig ist, auch nothwendig die Perpendicularseite NCR spitzig seyn müsse. Und wenn man zugleich die nebenstehende dreyseitige Ecke NCMr betrachtet, in welcher der Winkel an der Grundseite NMr stumpf ist, so siehet man so gleich, daß dieses nicht seyn könne, wenn nicht auch die ihm entgegen stehende Perpendicularseite NCr stumpf ist.

F. 372. 373.

§. 81. Man siehet leicht, daß man auf eben die Art von der Perpendicularseite NCR auf den Winkel NMR schliessen könne, welcher ihr entgegen stehet. Ist diese Seite NCR spitzig, so kan der Winkel NMR ohnmöglich gerade seyn, sonst wäre auch die Seite ein gerader Winkel: es kan auch der Winkel NMR nicht stumpf seyn, sonst wäre auch die Seite NCR stumpf. Und wenn also die Seite NCR spitzig ist, so ist auch der Winkel NMR spitzig. Ist aber im Gegentheil die Perpendicularseite stumpf wie NCr, so kan der ihr entgegen gesetzete Winkel NMr nicht spitzig seyn, sonst wäre auch die Seite spitzig; auch kan er nicht gerade seyn, weil sonst auch die Seite gerade seyn müste. Es ist also dieser Winkel NMr in diesem Fall nothwendig stumpf. Und auf eben die Art siehet man, daß der Winkel AMR gerade seyn müsse, wenn die Seite ACR gerade ist.

XII. Abschnitt.

§. 82. Was von der Perpendicularseite und dem ihr entgegen gesetzeten Winkel gezeiget worden, ist ohne Anstand auf die Grundseite, und den Winkel, welcher derselben entgegen stehet, anzuwenden. Denn diese zwo Seiten sind bloß dem Nahmen nach, sonst aber gar nicht von einander verschieden. XII, 79. Wenn man sich nun erinnert, daß man drey Arten von Winkeln habe, spitzige, gerade und stumpfe, und daß alle spitzige Winkel von einer Art sind, wie auch alle gerade und alle stumpfe, so kan man alle diese Sätze sich kurz unter diesen Worten merken. In einer jeden geradewinklichten dreyseitigen Ecke, ist eine jede der zwo Seiten, die den geraden Winkel einschliessen von der Art des Winkels, welcher ihr entgegen stehet.

§. 83. Sind also die zwo Seiten einer geradewinklichten, dreyseitigen Ecke, welche den geraden Winkel einschliessen, die Grundseite nemlich und die Perpendicularseite, von einerley Art, wie in der 372 Zeichnung, so sind auch die Winkel der Ecke, welche ihnen entgegen stehen, von einerley Art: sind aber diese Seiten von verschiedener Art, wie in der 373 Figur, so sind auch die ihnen entgegen stehende Winkel von verschiedener Art.

§. 84. Was aber die Hypotenuse einer geradewinklichten dreyseitigen Ecke anlanget, so ist dieselbe allezeit ein gerader Winkel, wenn einer von den Winkeln der Ecke, welche an der Hypotenuse liegen, gerade ist, das ist, XII, 80. wenn eine von den übrigen Seiten ein gerader Winkel ist. Sonst aber ist die Hypotenuse spitzig, wenn die beyden Winkel, welche an derselben liegen, von einerley Art sind, das ist, wenn die beyden Seiten, welche den rechten Winkel einschliessen, von einerley Art sind. Und die Hypotenuse ist stumpf, wenn einer der Winkel, die an derselben liegen, spitzig ist, und der andere stumpf, oder wenn eine der Seiten die den rechten Winkel einschliessen, spitzig ist, und die andere stumpf. Dieses alles wird aus den nachfolgenden Betrachtungen erhellen.

F. 374. §. 85. Man stelle sich wieder vor, daß die Fläche RAr auf der RBr perpendicular stehe, und daß man in dieser Fläche RBr die gerade Linie CM auf Rr schief gezogen, so daß der Winkel RCM spitzig ist, und der Winkel MCr stumpf. Man ziehe auf diese Linie CM die Linie BCD perpendicular, und setze an diese Linie die Ebene BAD ebenfals auf

RBr

RBr perpendicular: so wird CM auf diese Ebene BAD perpendicular seyn, X, 46. und ein jeder Winkel, welchen CM mit einer der geraden Linie einschliesset, die in der Ebene BAD durch C gezogen werden können, wird gerade seyn. Es schneidet aber diese Ebene BAD die andere RAr, welche ebenfals auf der RBr gerade stehet, in der Linie AC, und diese Linie ist demnach ebenfals auf die Fläche RBr perpendicular. X, 49. Leget man nun nach dieser Vorbereitung durch die beyden Linien CA und CM eine Fläche ACM, und machet also die rechtwinklichten dreyseitigen Ecken ACMR und ACMr vollkommen, so siehet man so gleich, daß die Hypotenuse dieser Dreyecke ACM ein gerader Winkel seyn werde. Es stehet aber in diesem Falle die Hypotenuse ACM auf der Grundfläche perpendicular, X, 47. und machet also mit derselben bey M gerade Winkel.

§. 86. Neiget man aber die Hypotenuse gegen R dergestalt, daß der Winkel NMR spitzig wird, wodurch zugleich die Perpendicularseite NCR spitzig werden muß; XII. 80. und stellet sich vor, daß man die Ebene, in welcher die Hypotenuse lieget, fortgeführet, bis sie die Fläche BAD in EC geschnitten: so ist der Winkel ECM gerade, weil CM auf der Fläche BAD perpendicular stehet, und folgends die Hypotenuse NCM selbst spitzig. Es ist aber diese Hypotenuse den beyden geradewinklichten Ecken NCMR und NCMr gemeinschaftlich. In der ersten ist so wohl die Grundseite MCR als auch die Perpendicularseite NCR spitzig: und bey der darneben stehenden Ecke ist so wohl die Grundseite MCr als auch die Perpendicularseite NCr stumpf. Man muß demnach sagen, daß die Hypotenuse einer geradewinklichten dreyseitigen Ecke spitzig sey, wenn die übrigen Seiten entweder beyde spitzig oder beyde stumpf sind. Und weil die Seiten, welche den geraden Winkel einschliessen, nicht beyde spitzig oder stumpf seyn können, wenn nicht auch die Winkel an der Hypotenuse beyde spitzig oder stumpf sind, XII, 83. so drücket man eben dieses aus, wenn man saget, die Hypotenuse sey spitzig, wenn die Winkel, welche an derselben liegen, beyde spitzig, oder beyde stumpf sind.

F. 375.

§. 87. Und wenn im Gegentheile die Hypotenuse auf die andere Seite dergestalt geneiget wird, daß der Winkel NMR, und folgends auch die ihm entgegen gesetzete Perpendicularseite NCR stumpf werden, indem die Seite MCR spitzig bleibet: so ist wieder der Winkel MCE gerade: und da die Hypotenuse NCM über die EC bis an

F. 376.

NC

XII. Abschnitt.

NC gehet; so ist dieselbe ein stumpfer Winkel. Man siehet also, daß, wenn in einer geradewinklichten dreyseitigen Ecke NCMR, die eine der Seiten, die den rechten Winkel R einschliessen, wie MCR spitzig und die andere NCR stumpf ist, die Hypotenuse NCM stumpf sey. Eben dieses siehet man auch bey der Ecke NCMr; die Seite NCr ist spitzig und die Seite MCr ist stumpf. Die Hypotenuse aber ist hier wieder NCM und folgends stumpf.

§. 88. Auch in diesem Satze kan man an statt der eben gedachten Seiten die Winkel nennen, welche an der Hypotenuse liegen, und sagen, daß die Hypotenuse ein stumpfer Winkel sey, wenn dieser Winkel M und N einer spitzig, und der andere stumpf ist, wie man aus dem vorigen XII, 83. leicht siehet.

§. 89. Es lassen sich aber auch diese Sätze verkehren, und man kan schliessen, daß einer der Winkel an der Hypotenuse N, M einer dreyseitigen Ecke gerade sey, wenn die Hypotenuse gerade ist, und daß einer der Winkel an der Hypotenuse spitzig sey und der andere stumpf, wenn die Hypotenuse stumpf ist, wie auch, daß wenn die Hypotenuse spitzig ist, die beyden Winkel an derselben entweder spitzig oder stumpf seyn. Denn wenn die Hypotenuse stumpf ist, so können nicht die beyden Winkel an derselben spitzig oder stumpf seyn, weil sonst die Hypotenuse spitzig seyn müste: auch kan unter denselben kein gerader Winkel seyn, weil sonst auch die Hypotenuse ein gerader Winkel seyn müste. Es bleibet also allein übrig, daß einer dieser Winkel spitzig und der andere stumpf ist. Ist aber die Hypotenuse spitzig, so kan wieder an derselben kein gerader Winkel liegen, weil sonst die Hypotenuse gerade seyn müste, auch nicht ein spitziger und ein stumpfer, weil sonst die Hypotenuse stumpf seyn müste, und es bleibet also allein übrig, daß die Winkel an der Hypotenuse entweder beyde spitzig oder beyde stumpf seyn. Auf eben die Art schliesset man auch das dritte.

§. 90. Und man kan hier wieder an die Stelle der Winkel die Seiten nennen, welche ihnen entgegen stehen, und sagen, daß wenn in einer geradewinklichten dreyseitigen Ecke die Hypotenuse gerade ist, so sey auch eine der Seiten, welche den geraden Winkel der Ecke einschliessen, gerade; und wenn die Hypotenuse spitzig ist, so seyen diese Seiten entweder beyde spitzig oder beyde stumpf; und wenn die Hypotenuse stumpf ist, so sey eine von diesen Seiten spitzig, und die andere

re stumpf. Und so viel zur Zeit von den geradewinklichten Ecken ins- besondere. Der Nutze von diesen allen, wird sich inskünftige zeigen. XII. Abschnitt.

Wie die schiefwinklichten dreyseitigen Ecken aus zwoen geradewinklichten entstehen.

§. 91. Was nun aber diejenige dreyseitige Ecken anlanget, welche keinen geraden Winkel haben, und welche man dannenhero schiefwinklicht nennet, so pfleget man dieselbe in der Anwendung sich so vorzustellen, als ob sie aus zwo geradewinklichten dreyseitigen Ecken, deren Perpendicularseiten gleich sind, entstanden wären, indem man diese Ecken entweder an einander geschoben, oder die kleinere derselben von der grösseren weggenommen hat. Es sey NCMm eine dergleichen schiefwinklichte Ecke. Man stelle sich vor, daß durch die Spitze des Winkels N, oder welches auf eines hinaus kommet, durch die gerade Linie NC eine Ebene NCR perpendicular auf die entgegen gesetzte Seite MCm gefallen, welche man weiter fortführen muß, so oft es nöthig ist bis sie diese Perpendicularfläche in CR schneidet: so entstehet die schiefwinklichte Ecke der 377 Zeichnung durch die Zusammensetzung der beyden geradewinklichten Ecken NCRM und NCRm; die schiefwinklichte Ecke der 378 Zeichnung hingegen bleibet übrig, wenn man von der grösseren geradelinichten Ecke NCRM die kleinern NCRm wegnimmet. Es ist noch zu zeigen, in welchem Falle das erstere, und in welchem Falle das zweyte statt finde. F. 377. 378.

§. 92. Man siehet leicht, daß die Ecke NCMm durch die Zusammensetzung der zwo geradewinklichten Ecken NCRM und NCRm entstehe, wenn die Perpendicularfläche NCR die Seite MCm erreichet, ohne daß man nöthig hat, dieselbe zu erweitern: in welchem Falle der Winkel MNm die Summe ist der beyden Winkel MNR und mNR, und die Seite MCm die Summe der beyden Seiten MCR und RCm. Sol aber dieses seyn, so ist nicht möglich, daß ein Winkel M und m spitzig und der andere stumpf sey. Denn, ist in der geradewinklichten Ecke NCRM der Winkel M spitzig, so ist auch die ihm entgegen gesetzete Seite NCR spitzig. XII, 80. Wäre nun zugleich der andere Winkel m stumpf, so wäre eben die Seite NCR auch stumpf, weil sie in der geradewinklichten Ecke NCRm dem Winkel m entgegen stehet. Dieses aber ist widersinnisch, und

Kkkk es

XII. Abschnitt. es folget also daß NCR selbst in die Seite MCm fället, wenn die Winkel M und m entweder beyde spitzig oder beyde stumpf seyn.

§. 93. Ist aber im Gegentheile in der 378 Zeichnung, da die Perpendicularseite NCR nicht in die Seite MCm der dreyseitigen Ecke NCMm fället, sondern man diese verlängern muß, damit dieses geschehe, und da also MNm durch den Abzug des Winkels mNR von dem Winkel MNR, entstehet, und die Seite MCm übrig bleibet, wenn man von MCR die Seite mCR wegnimmet: ist, sage ich, in diesem Falle der Winkel M spitzig, so ist auch die Perpendicularseite NCR spitzig. Wäre nun auch der Winkel NmM spitzig, so wäre seine Ergänzung NmR stumpf, und also wäre auch NCR stumpf, XII, 80. welches nicht möglich ist. Es ist demnach bey der gesetzeten Bedingung nicht möglich, daß die beyden Winkel M und MmN spitzig seyn solten. Und eben so siehet man auch, daß sie nicht beyde stumpf seyn können. Denn ist M stumpf, so ist auch NCR stumpf. Wäre nun auch MmN stumpf, so wäre die Ergänzung dieses Winkels zu zween geraden, nemlich NmR spitzig, und also wäre auch NCR spitzig, welches dem vorigen widerspricht. Es muß demnach in diesem Falle einer der Winkel M und MmN spitzig, und der andere stumpf seyn.



Drey-

Dreyzehender Abschnitt.

Gründe der Berechnung ausgedehnter Grössen.

Einleitung.

§. 1.

Wir haben bisher die vornehmsten Eigenschaften der ausgedehnten Grössen betrachtet, und sind bemühet gewesen zu zeigen, wie die Geometrische Aufgaben aufgelöset werden, welche bey den Figuren vorkommen, falls sie die Kräfte der gemeinen Geometrie nicht übersteigen, und keine andere Linien, als die geraden und die Umkreise der Cirkel, erfordern; wie auch keine andere Theilung der Winkel als diejenige, welche wir zu verrichten gelehret haben, da nemlich ein Winkel in zwey gleiche Theile getheilet wird. Ausser diesen aber sind noch solche Aufgaben ausgeschlossen, welche sich auf die Verhältniß des Umkreises eines Cirkels zu seinem Durchmesser gründen, als welche anzugeben ebenfals in der Gewalt der gemeinen Geometrie nicht ist. Wie wir gesehen haben, so wird zur Auflösung dieser Aufgaben weder die Rechenkunst, noch sonst einige andere Wissenschaft erfordert: sondern die blosse Geometrie ist dazu hinlänglich.

§. 2. Doch haben wir bereits hin und her erinnert, daß der Gebrauch geschickter Instrumente in der Ausübung uns öfters eine grosse Erleichterung geben könne; und von der Rechenkunst ist eben das zu sagen, wenn man dieselbe gebrauchen wil, Geometrische Aufgaben aufzulösen. Es geschiehet dieses öfters mit gar grosser Bequemlichkeit: ja man kan vermittelst der Rechenkunst zuweilen auch solche Aufgaben auflösen, welche in der Gewalt der blossen Geometrie nicht sind, als zum Beyspiel, diejenige, welche sich auf die Verhältniß des Umkreises eines Cirkels zu seinem Durchmesser gründen, oder, welche eine beliebige Theilung eines Winkels erfordern. Es ist unser Zweck hier nicht, daß wir den Gebrauch der Instrumente weisen, und derselbe ist auch vor sich etwas leichtes und von demjenigen, welcher die Geometrie gründlich durchgegangen, ohne Schwierigkeit einzusehen. Aber

XII. Abschnitt.

die Auflösungen der Geometrischen Aufgaben, vermittelst der Rechenkunst, müssen, wegen ihres ungemeinen Nutzens in der Anwendung dieser Wissenschaft, allerdings gezeiget werden, und hiezu haben wir die folgenden Abtheilungen gewidmet.

§. 3. Es sind zwar diese Auflösungen selten vollkommen richtig, so nemlich, daß man bey denselben, wie bey den Geometrischen darthun könte, daß sie gar nicht fehlen. Ja man siehet meistentheils, daß sie würklich fehlen, und man kan dieses erweisen. Allein man ist auch im Stande, diese Fehler zu vermindern, so weit man wil, oder wenigstens so weit, daß unsere Sinnen keinesweges hinreichen, einigen Fehler zu bemerken. Und dieses ist bey einer jeden Anwendung der Geometrie auf cörperliche Dinge hinlänglich. Denn ein Fehler, welcher auf keine Weise bemerket werden kan, ist hier vor keinen Fehler zu halten. Und fehlen nicht auch die Geometrische Auflösungen, wenn sie nicht in puren Begriffen bestehen, sondern bey etwas cörperlichen angewendet werden? Ist es möglich eine auf das Papier gezeichnete gerade Linie in zwey vollkommen gleiche Theile zu theilen, und kan jemand versprechen dieses dergestalt zu verrichten, daß der eine Theil nicht einmal um den hundersten Theil der Breite eines Haars grösser wäre als der andere? Wie genau müsten die äussersten Puncte der Linien bestimmet werden, wenn man dieses verrichten wolte, und wie spitzig müsten die Schenkel des Cirkelinstrumentes seyn, dessen man sich dazu bedienen könte? Reichen unsere Sinnen zu diese Puncte so genau zu bestimmen, oder uns so zarter Instrumente zu bedienen? Müssen nicht alle Linien, welche wir zeichnen, von einer merklichen Breite seyn, wenn wir sie sehen sollen? Dieses alles macht, daß dasjenige so wir durch die genauesten Zeichnungen heraus bringen, von demjenigen gar weit entfernet ist, so wir heraus bringen würden, wenn es in unserer Gewalt wäre, den Begriffen, welche wir von der Auflösung Geometrischer Aufgaben haben, genau zu folgen.

§. 4. Aus der Ursach haben die Geometrische Auflösungen, wenn man bloß auf den Nutzen in der Anwendung siehet, vor denen, die vermittelst der Zahlen gemacht werden, gar keinen Vorzug: ja diese letztern bringen vielmehr meistens was gesuchet wird, genauer heraus, als die erstern. Es ist möglich, daß man eine gerade Linie zeichne, welche dem Umkreis eines Cirkels eben so genau gleich ist, als eine gerade Linie der andern; ob man zwar sich zu dem erstern der Rechnung zu bedienen gezwungen ist, und das letztere eine der ersten und leichtesten Ausübungen der Geometrie ausmachet.

§. 5. Da-

XIII. Abschnitt.

§. 5. Damit nun diese Auflösungen vermittelst der Zahlen würklich verrichtet werden können, ist es nöthig, daß man die Dinge, welche in der Geometrie betrachtet werden, die geraden Linien nemlich, die Winkel, den Cirkelkreis, die Oberflächen, und so weiter, durch Zahlen ausdrücke. So bald dieses geschehen ist, kan man mit denselben wie mit andern Zahlen umgehen, und vermittelst der bekannten Rechnungsarten aus diesen Zahlen andere heraus bringen, welche Grössen ausdrücken, die von jenen auf die Art abhangen, wie in der Geometrie gewiesen wird. Dieses geschiehet, wenn man die ausgedehnten Grössen nach einer beliebigen Einheit misset, und dieses ist bey geraden Linien etwas leichtes.

Gerade Linien durch Zahlen auszudrücken.

§. 6. Es sey die gerade Linie A von was Länge man sich dieselbe vorstellen wil, durch eine Zahl auszudrücken, welche sich auf eine nach Belieben angenommene Einheit V beziehet: so messe man erstlich die A durch V. Wird nun die V, wenn sie etliche, zum Exempel, 5 mal genommen wird, der A gleich, so drücket die Zahl 5 die Linie A aus. Ist aber dieses nicht, und ist von der A noch ein Stück B übrig geblieben, nachdem man V so oft auf dieselbe geleget hat, als geschehen können, (welches B demnach kleiner seyn muß als V,) so kan man dieses Ueberbleibsel durch einen Bruch ausdrücken, der sich auf die V beziehet: und man findet bald einen Bruch, welcher dieses so genau thut, als nöthig ist. Viel bequemer aber ist es, wenn man dazu allezeit zehentheilche Brüche gebrauchet, welches wir demnach allezeit thun wollen. Man theile also die V in zehen gleiche Theile, und messe die B, welche kleiner ist als V durch diese Zehentel der V. Gesetzet, man finde, daß B noch 6 dergleichen Theile der V enthält, so wird A durch 5, 6 ausgedrückt. Wäre aber B etwas grösser, als 0, 6. der V, aber kleiner als 0, 7; so müste man jedes Theilchen der V wieder in zehen gleiche Theile, und folgends die ganze V in hundert Theilchen theilen, und den nunmehrigen Ueberschuß der B über 0, 6 der V, nach diesen Theilchen, eben so messen wie man B durch die Zehentel der V gemessen, und so immer fort, bis man entweder nicht weiter theilen kan, weil die Theilchen einzeln nicht mehr sichtbar sind: oder, bis man auf solche Kleinigkeiten kommet, welche in der Anwendung vor nichts zu halten sind, und in Ansehung der V oder der A in keine Betrachtung kommen können. Man siehet leicht, daß man gar bald auf solche Kleinigkeiten hinaus komme. Meistentheils pfleget man den zehentausendsten

XIII. Abschnitt. senften Theil eines Ganzen in Ansehung desselben auch dann vor nichts zu halten, wenn man noch ziemlich genau verfähret.

§. 7. Man kan auf die geraden Linien, welche dergestalt aus gleichen Theilchen zusammen gesetzt sind, alles dasjenige anwenden, so VI. von den Verhältnissen solcher Grössen gewiesen worden ist, welche aus gleichen Theilchen zusammen gesetzet sind, ohne einen grössern Fehler zu begehen, als denjenigen, welchen man gleich Anfangs in der Ausmessung der Linien begangen hat. Man kan zu dreyen geraden Linien, welche dergestalt durch Zahlen ausgedrückt sind, die vierte Proportionallinie eben so finden, wie man zu drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl findet: VI, 115. Und zwischen zwo Linien, die man durch Zahlen ausgedrückt hat, wird die mittlere Proportionallinie ebenfals gefunden, wenn man aus dem Product dieser Zahlen die Quadratwurzel ziehet. VI. 120. Dieses alles ist leicht einzusehen. Es seyn drey Linien A, B, C, welche, wenn man sie durch die Einheit V misset, durch die Zahlen 6, 5; 7, 2 und 8 ausgedrückt werden, so wird die vierte Linie, welche mit den drey gegebenen die Proportion voll machet durch die Zahl $\frac{7,2 \times 8}{6,5}$ ausgedrückt. Diese Zahl ist etwas mehr als 8, 86: und wenn man also einer Linie 8, 86 Theilchen von der Grösse derjenigen giebet, mit welchen man die gegebenen Linien A, B, C gemessen hat; so ist sie die vierte Proportionallinie zu den gegebenen dreyen. Eben so ist es, wenn zwo Linien durch die Zahlen 4 und 64 ausgedrückt werden, und man sol zwischen denselben die mittlere Proportionallinie finden. Es drücket die mittlere Proportionalzahl zwischen den gegebenen Zahlen 4 und 64, das ist, die Quadratwurzel aus 64×4 oder 256 welche 16 ist, die mittlere Proportionallinie zwischen den zwo gegebenen aus: und eine Linie von 16 solchen Theilchen, deren die erstere der gegebenen 4, und die zweyte 64 hat, ist die mittlere Proportionallinie zwischen den gedachten zwo Linien.

§. 8. Es ist aber auch nicht nöthig, daß alle vier Proportionallinien durch einerley Einheit gemessen werden; sondern, wenn die erste und die zweyte durch einerley Einheiten gemessen werden, wie auch die dritte und vierte, und die Zahlen welche die Linien ausdrücken, sind proportional, so sind die Linien doch proportional, ob zwar die Einheit, mit welcher die letztern zwo Linien gemessen sind, von der Einheit verschieden ist, mit welcher man die erstern zwo gemessen hat. Es sey

A=2,

A=2, und B=3, und die Einheiten in A und B seyn einander gleich. Es sey C=1, und D=1,5 und die Einheiten in C und D seyn einander wieder gleich, aber von den vorigen Einheiten in A und B verschieden: so ist A:B=C:D, weil die Zahlen, welche A, B, C, D dergestalt ausdrücken, proportional sind, $2:3=1:1\frac{1}{2}$. Man siehet dieses daraus ein, weil, da die Verhältniß $1:1\frac{1}{2}$ der Verhältniß 2:3 gleich ist, und C:D sich verhält wie $1:1\frac{1}{2}$, sich auch C:D wie 2:3 verhalten muß. Ist aber dieses, so muß sich auch C in zwey solche Theile theilen lassen, deren drey auf D gehen, gleich wie A zwey Drittel der B enthält. Und wenn man sich vorstellet, daß dieses würklich geschehen sey, so siehet man leicht, daß die Verhältnisse A:B und C:D einander gleich sind. VI, 30.

Die Winkel durch Zahlen auszudrücken.

§. 9. Wie die Winkel durch Zahlen auszudrücken sind, haben wir grösten Theils bereits gewiesen. VII, 65. Man theilet den Umkreis eines jeden Cirkels in 360 gleiche Theile, deren folgends auf den halben Umkreis 180, und auf den Quadranten desselben 90 gehen werden. Diese Theile nennet man Grade. Einen jeden Grad theilet man wieder in 60 gleiche Theile, welche man *Minuten* nennet, und einer jeden Minute giebt man 60 Secunden. Denn weiter hat man selten nöthig zu gehen. Man bezeichnet die Verwirrung zu vermeiden, diese Theile folgender gestalt: $53^\circ, 27', 32''$ bedeuten 53 Grade, und 27 Minuten, und 32 Secunden. Durch die Zahl nun der Grade, Minuten und Secunden, welche in dem Bogen enthalten sind, welcher aus der Spitze eines Winkels zwischen seinen Schenkeln beschrieben wird, drücket man die Grösse des Winkels aus, und sagt zum Exempel, der Winkel habe $53^\circ, 27', 32''$, wenn der Bogen so viele Grade, Minuten und Secunden enthält. Es ist frey, mit was vor Oefnung des Circuls man den Bogen beschreibe, weil alle Bogen, welche um die Spitze eines Winkels zwischen dessen Schenkeln beschrieben werden können, einerley Verhältniß gegen ihren ganzen oder halben Umkreis haben, VII, 52. und folgends nothwendig durch einerley Zahlen von Graden, Minuten und Secunden ausgedrücket werden, da man die ganzen Umkreise durch einerley Zahlen ausdrückt, indem man einen jeden Umkreis in 360 Theile theilet.

§. 10. Wenn man nun die Zahl der Grade eines Winkels weiß, so kan man leicht die Zahl der Grade des dritten oder fünften oder sie-

XIII. Abschnitt.

benden rc. Theils desselben durch Rechnung finden, und wenn man den Bogen, welchen man um die Spitze des Winkels zwischen dessen Schenkeln beschrieben, in seine Grade getheilet hat, so ist es hernach leicht einen Winkel zu machen, welcher der dritte, fünfte oder siebende rc. Theil desselben Winkels sey. Hält zum Exempel ein Winkel 53°, 27′ (wir lassen die Secunden als Kleinigkeiten weg, welche selten zu beobachten sind) so hält der dritte Theil desselben 17°, 49′, der fünfte 10°, 41′, der siebende 7°, 38′. Und man kan also diesen Winkel aus einem getheilten Cirkelkreis leicht haben.

§. 11. Man verfähret aber folgender gestalt, wenn man den Umkreis eines Cirkels in seine 360 Theile, oder in seine Grade, theilen wil. Erstlich theilet man ihn in 6 gleiche Theile vermittelst des Halbmessers, welcher sich in den Umkreis des Cirkels sechs mal herum tragen läst, wie wir V, 89. gesehen haben. Jeden dieser Theile theilet man in zwey gleiche Theile, und jeden dieser Theile wieder in zwey, welches, wenn man wil, geometrisch geschehen kan: so wird jeder der 6 vorigen Theile in viere getheilet, und es bekommt also der ganze Umkreis 24 gleiche Theile. Nun theile man jeden dieser Theile in 3 durch Versetzung des Cirkels, so bekommt man in dem ganzen Umkreis drey mal 24, das ist 72 Theile. Und wenn man jeden dieser Theile wieder durch die Versetzung des Cirkels in 5 gleiche Theile theilet, so bekommt endlich der ganze Umkreis deren 360, welches seine Grade sind. Auf eben die Art verfähret man, wenn man auch Minuten haben wil.

Ausmessung der geradelinichten Figuren.

§. 12. Wil man die Grössen der geradelinichten Figuren durch Zahlen ausdrücken, oder mit einem Worte, messen: so nimmet man darzu wieder eine Oberfläche als die Einheit oder das Maaß an, aus welchem die Grösse der Figur bestimmet werden sol, und wie wolte man es anders machen? Die Figur dieses Maasses ist beliebig, aber meistentheils ein Quadrat V, dessen Seite man vor die Einheit annimt, aus welcher die Seiten der Figur, welche durch das Quadrat V zu messen ist, ausgedruckt werden sollen. Diese Figur nun ist entweder ein geradewinklichtes Viereck, oder kan doch in ein geradewinklichtes Viereck verwandelt werden. IX, 22. Man kan sie auch in Dreyecke zerschneiden, und ein jedes dieser Dreyecke in ein geradwinklichtes Viereck verwandeln, IX, 19. und also die ganze Figur als eine Summe verschiedener geradwinklichter Vierecke ansehen. Also kommet endlich alles dar-

F. 379.

darauf hinaus, daß man bloß ein geradwinklichtes Viereck zu messen wisse. Dieses aber erfordert nichts anders, als daß man eine Zahl finde, welche die Verhältniß der Figur zu der Einheit V ausdrücke. Wir haben bereits gewiesen, wie dieses zu thun sey, ohne daß man die V würklich zu wiederholten malen auf die Figur lege, welche auszumessen ist, oder die Figur in Theile von der Grösse V theile. Ist die Grundlinie des Viereckes ABC, welche man aus V messen sol AB, und die Höhe CB; so ist die Verhältniß des Quadrats V, dessen Seite wir L nennen wollen, zu dem ABC, aus den Verhältnissen L:AB und L:BC zusammen gesetzt. IX, 47. Man drücke beyde Verhältnisse durch Zahlen aus, das ist, man messe AB so wohl als BC aus L. Gesetzt es sey L:AB = 1:5,3, und L:BC = 1:9,2; so ist die Verhältniß V:ABC = L×L:AB×BC = 1×1:5,3×9,2. VIII, 24. Und wenn man würklich multipliciret, so wird V:ABC = 1:48,76, und ABC enthält das Quadrat V 48 mal, und über dieses noch 7 Zehentel und 6 Hundertel, oder mit einem Wort 76 Hundertel desselben. Man hat demnach ABC durch V gemessen.

§. 13. Ein kleines Nachdenken kan uns an die Hand geben, daß es in der Anwendung eben nicht nöthig sey die Weitläuftigkeit zu machen, welche wir zu desto vollkommenern Verstand dieser Sache beygebracht haben. Man messe die Grundlinie AB durch die Seite des Quadrats V, welches darum nicht eben beschrieben seyn darf, und durch eben die Seite messe man auch die Höhe des Vierecks BC. Hat man nun dadurch wieder gefunden, daß AB = 5,3 und BC = 9,2. dieser Seiten des V enthalte: so multiplicire man diese Zahlen durch einander, und mache dadurch wie vorher 48,76; diese Zahl wird anzeigen, wie oft die Einheit V in dem Viereck ABC enthalten sey.

§. 14. Es ist aber ein Zehentel der quadratischen Einheit, oder des Quadrats EF, dessen Seite EG vor die Einheit angenommen wird, nach welcher die Längen gemessen werden, ein geradewinklichtes Viereck HF, dessen Grundlinie HG dem zehenten Theil der Seite des Quadrats EF, und die Höhe GF dieser Seite selbst gleich ist. Und der zehente Theil eines solchen Vierecks ist das Quadrat FI, dessen Seite der H,G, das ist, dem Zehentel der Seite EG des Quadrats EF, gleich ist. Und eben dieses FI ist der hunderste Theil des Quadrats EF, wie man dieses alles aus der Figur gar leicht siehet. Und wenn demnach V das Quadrat EF bedeutet, und es wird eine Figur, die man durch

F. 380.

XIII. Abschnitt. die V gemessen hat, durch die Zahl 48, 76 ausgedrücket: so wird dadurch angezeiget, daß diese Figur das ganze V 48 mal enthalte, und über dieses 7 Theile von der Grösse HF, und 6 Theile von der Grösse FI. Oder man kan auch kürzer sagen, die Figur, welche durch 48, 76 ausgedrückt wird, enthalte 48 Quadrate von der Grösse der V, und 76 Quadrate von der Grösse des FI, dessen Seite der zehente Theil ist, der Seite des Quadrats V. Denn, wie wir gesehen haben, so ist FI der hunderste Theil des V, und die 76 in der Zahl 48, 76 welche sich auf die V beziehet, bedeuten 76 Hundertel der V.

§. 15. Wenn die Figur, welche man durch V ausgemessen hat, durch noch mehrere zehentheilche Brüche ausgedrückt wird, als zum Exempel, durch diese Zahl 52, 7635, so beziehen sich die zwey Ziffer, welche auf die erstern zwey, die zehentheilche Brüche bedeuten, folgen, hier 35, auf das Quadrat FI eben so wie sich die vorigen 76 auf das Quadrat EF beziehen, und bedeuten also die 35 so viele Quadrate, deren Seiten der zehente Theil der HG sind, welche HG der Seite des Quadrats FI gleich ist. Und so gehet es immer, wenn noch mehr Zahlen unter den zehentheilchen Brüchen vorkommen. Und es bedeuten demnach in der Zahl 52, 763530 die Ziffer vor dem Zeichen der einfachen Einheiten (,) 52 Quadrate der EG, die nächsten zwey 76 bedeuten Quadrate der HG, das ist, Quadrate des zehenten Theils der EG; die darauf folgende zwey, 35, Quadrate des Zehentheils der HG, oder des hunderten Theils der EG, und die zwey nächsten, 30 Quadrate des tausendsten Theils der EG, und so immer fort, wenn noch mehrere Ziffer vorhanden sind. Damit man sich dieses deutlicher vorstellen möge, bezeichnet man zuweilen dergleichen Ziffer auch dergestalt $52^{\circ}, 76' \; 35'' \; 30'''$. Es muß jede Classe zwo Ziffer haben, und fals die Zahl der Ziffer, welche Brüche bedeuten, ungleich ist, muß man am Ende eine 0 anhängen, damit die Classen voll werden.

§. 16. Es ist in diesem wenigen alles enthalten, so zur Ausrechnung aller geradlinichten Figuren zu wissen nöthig ist, und man kan die kleinen Vortheile, die bey dieser Rechnung vorfallen können, aus demjenigen, so in den vorhergehenden Betrachtungen gewiesen worden ist, gar leicht schliessen. Man siehet nemlich, daß überhaupt ein jedes Parallelogrammum zu berechnen, man nur die Grundlinie desselben durch seine Höhe, oder eigentlich zu reden, die Zahl welche die Grundlinie aus dem angenommenen Maaßstab ausdrücket, durch die Zahl, welche die Höhe aus eben dem Maaßstab angiebt, zu multipliciren habe,

be, um die Zahl zu finden, welche die Grösse des Vierecks aus der Quadratischen Einheit anzeiget: weil nemlich ein jedes Parallelogrammum einem geradwinklichten Viereck gleich ist, welches eben die Grundlinie und eben die Höhe hat. IX, 9.

§. 17. Eben so leicht schliesset man, daß, wenn man den Inhalt eines jeden Dreyecks haben wil, man die Grundlinie desselben durch die halbe Höhe, oder die Höhe durch die halbe Grundlinie, multipliciren müsse: weil ein jedes Dreyeck einem geradwinklichten Viereck gleich ist, dessen Höhe halb so groß ist, als die Höhe des Dreyecks, und welches mit dem Dreyeck einerley Grundlinie hat; oder dessen Grundlinie halb so groß ist, als die Grundlinie des Dreyecks, und dessen Höhe der Höhe des Dreyecks gleich ist.

§. 18. Hat man eine geradelinichte Figur, von was Art sie auch seyn mag, dergestalt berechnet, und man wil ein Quadrat haben, dessen Inhalt so groß als der Inhalt der berechneten Figur ist, so darf man nur aus der Zahl, welche den Inhalt ausdrücket, die Quadratwurzel ziehen, diese ist die Seite des gesuchten Quadrats. Es sey der Inhalt einer Figur 1049,76, wie groß ist die Seite des Quadrats, welches dieser Figur gleich ist. Man nehme die Quadratwurzel der Zahl 1049,76, welche ist 32,4. Diese ist die Seite des Quadrats genau. Man siehet aber leicht, daß man nicht allzeit auf solche Zahlen kommen werde, welche die gesuchten Seiten genau ausdrücken, weil nicht alle Zahlen, so die Figuren messen, Quadratzahlen seyn können.

§. 19. Dieses kan uns so gleich eine Anleitung dazu geben, wie in einem geradwinklichten Dreyeck aus zwo Seiten desselben die dritte zu finden ist. Es sey in einem solchen Dreyeck die gröste Seite, die nemlich dem geraden Winkel entgegen gesetzet ist, H, die übrigen Seiten, die den geraden Winkel einschliessen seyn B und P. Weil nun $H^q = B^q + P^q$, IX, 66. so siehet man, daß, wenn B und P in Zahlen gegeben sind, man nur die Quadratzahlen aus diesen Wurzeln machen, und nachdem man dieselbe zusammen gesetzt, die Wurzel von der Summe nehmen müsse, um die gröste Seite H zu erhalten. Es sey $B = 3$, $P = 4$, so ist $B^q = 9$, und $P^q = 16$, folgends $B^q + P^q = 25 = H^q$, und demnach H selbst $= 5$.

§. 20. Es sey zweytens in einem geradwinklichten Dreyeck aus den zwo Seiten H und P die Seite B zu finden. Weil nun $H^q = P^q + B^q$, so ist hinwiederum $H^q - P^q = B^q$, und wenn man also das Quadrat der ge-

XIII. Abschnitt. gegebenen Seite P von dem Quadrat der grösten Seite H abziehet, so bleibt das Quadrat der Seite B übrig, aus welchem man durch die Ausziehung der Quadratwurzel ferner die Seite B erlangen kan. Es sey $H=5$, $P=4$, so ist $H^q=25$, $P^q=16$, und $H^q - P^q = 25 - 16 = 9 = B^q$, folgends $B=3$. Man merke bey dieser Gelegenheit die besondere Eigenschaft dieser Zahlen 3, 4, 5, welche darinne bestehet, daß, wenn man drey Seiten annimt, die sich durch diese Zahlen ausdrücken lassen, und setzet aus denselben ein Dreyeck zusammen, dieses Dreyeck geradwinklicht wird. Es können noch andere dergleichen Zahlen gegeben werden, diese Drey aber sind unter allen die kleinsten.

Ausmessung verschiedener Cörper.

§. 21. Zur Ausmessung der Cörper wird wieder ein Cörper angenommen, weil weder eine Linie noch eine Oberfläche gegen einen Cörper einige Verhältniß haben kan, welche man doch durch die Ausmessung suchet. Und da es auch hier an sich eins ist, was man dem Cörper, welchen man zum Maaß oder zur Einheit annimt, vor eine Figur geben wil: so erfordert die Bequemlichkeit meisten Theils, daß dieser die Figur eines Würfels habe. Weil nemlich erstlich ein Würfel unter die Cörper der ersten Art gehöret, welche eine geradlinichte Grundfläche haben, mit welchen man die Cörper der andern und dritten Art leicht vergleichen kan; und weil zweytens ein Würfel durch die einzige Seite desselben gegeben wird, welches in der Anwendung eben die Bequemlichkeit bringt, welche wir von dem Quadrate, bey der Ausmessung der Oberflächen, gehabt haben, wie dieses sich so gleich zeigen wird.

§. 22. Man kan aber wieder alle Cörper der ersten, zweyten und dritten Art, deren Grundflächen geradlinicht sind, ausmessen, wenn man bloß ein gerades Parallelepipedum auszumessen weiß. Dieses aber geschiehet folgender gestalt. Es sey das gerade Parallelepipedum ABCD aus dem Würfel V, als der Einheit, auszumessen. So messe man erstlich die Seite AB aus der Seite des Würfels V, und bemerke die Zahl, welche anzeiget, wie oft diese Seite und deren Theile in der AB enthalten sind; das ist, man suche eine Zahl, welche die Verhältniß der Seite des Würfels V zur AB so genau ausdrücket, als es möglich oder nöthig ist. Es sey diese Zahl 6, 5. Eben so messe man auch die Seite BC. Wir setzen daß vor diese Linie die Zahl 4, 3 gefunden worden: und da man eben diese Messung auch bey der Höhe CD vorzuneh-

F. 381.

zunehmen hat, so nehmen wir an, daß die Zahl 5, 4 diese CD aus- drücke. Bedeutet nun L die Seite des Würfels V, so wissen wir aus der Betrachtung, welche wir bey dieser Art Cörper angestellet haben, daß die Verhältniß V : ABCD aus den drey Verhältnissen L : AB, L : BC, und L : CD zusammen gesetzt sey. XI, 39. Da nun alle diese Verhältnisse durch Zahlen ausgedrucket sind, und man zwo Zahlen, deren Verhältniß aus drey gegebenen zusammen gesetzet ist, durch die gehörige und bekannte Multiplication finden kan, VIII, 24: so sind auch zwo Zahlen in unserer Gewalt, welche sich wie V zu ABCD verhalten, deren erste die Einheit seyn wird, und deren zweyte folgends anzeiget, wie oft die Einheit V in ABCD enthalten ist, welches dasjenige ist, so man suchte. Es ist nemlich:

XIII. Abschnitt.

$$\left.\begin{array}{l} L : AB = 1 : 6,5 \\ L : BC = 1 : 4,3 \\ L : CD = 1 : 5,4 \end{array}\right\} \text{multipl.}$$

und also V : ABCD = 1 : 150, 930. Demnach enthält der Cörper ABCD die Einheit V hundert und funfzig mal, und noch über dieses 93 Hundertel derselben.

§. 23. Von den zehentheilchen Brüchen, welche hier vorkommen, giebt die 382 Figur einen deutlichen Begrif. Es sey der Würfel, welchen dieselbe vorstellet, die Einheit. Man theile die Seite desselben AB in zehen gleiche Theile, und lege durch den ersten Theilungspunct die Fläche CDE den Seiten des Würfels parallel, welche auf AB perpendicular stehen; so wird dadurch der Cörper CDEF von dem Würfel abgeschnitten, welcher der zehende Theil des ganzen ist. Ferner schneide man auch von AF den zehenden Theil AG ab, und ziehe durch G die Fläche GHI den zwo Seiten des Würfels parallel, auf welchen AF perpendicular stehet; so ist der Cörper AGHI der zehende Theil des vorigen AFED, und folgends der hunderste Theil des Würfels, welcher vor die Einheit angenommen worden. Endlich schneide man auch von der dritten Seite neun Zehentel AK ab, und ziehe eine Fläche der Seite FB parallel, so erhält man den Cörper HIDK, welcher ein Würfel, und der zehende Theil des Cörpers AGHI seyn wird. Folgends ist eben dieses Würfelchen HIDK der hunderste Theil des Cörpers AFE, und der tausendste Theil des Würfels EB, welchen man vor die Einheit angenommen hat.

F. 382.

§. 24. Es ist demnach der zehende Theil der würflichten Einheit ein Parallelepipedon, dessen Länge und Breite die Seite dieses Würfels,

 und

XIII. Abschnitt.

und die Höhe der zehende Theil derselben ist: der hunderste Theil der würflichten Einheit ist ein Parallelepipedon, dessen Länge der Seite des Würfels gleich ist, und die Breite und Höhe dem zehenden Theil derselben, und der tausendste Theil der würflichten Einheit ist wieder ein Würfel, dessen Seite der zehende Theil der Seite dieser Einheit ist. Hieraus übersiehet man eine Zahl, welche sich auf eine würflichte Einheit beziehet, und welche wie diese 395, 273 aussiehet, vollkommen. Sie bedeutet 395 Einheiten wie EB, zwey AE, sieben AI und drey KI.

§. 25. Doch pfleget man gemeiniglich auch die Brüche durch Würfel auszudrucken, und dieses ist bequemer als das vorige. Es enthält AI zehen KI, und folgends enthalten sieben AI siebenzig KI. Und da AE zehen AI enthält, so enthält AE hundert KI, und ist also 2 AE so viel als 200 KI, daß man also auch den Bruch 0, 273 lesen kan zwey hundert, siebenzig und drey KI.

§. 26. Stellet man sich nun die Seite des Würfels KI, welche der zehende Theil der Seiten des Würfels EB ist, wieder in zehen gleiche Theile getheilet vor; so ist ein Würfelchen, dessen Seite der zehende Theil dieser Seite ist, wiederum der tausendste Theil des Würfels KI; und so gehet es ferner, wenn man dieses Zehentel der Seite des Würfels KI wieder in Zehentel theilet, und so immer fort. Dieses giebt uns einen vollständigen Begrif von dem würflichten Maasse. Man nimmet eine gerade Linie an; man theilet diese in zehen gleiche Theile, einen jeden dieser Theile theilet man wieder in zehen gleiche Theile, und so weiter, bis man auf Kleinigkeiten komt, die in keine Betrachtung gezogen werden können. Man stellet sich Würfel vor, die man aus der ganzen Linie und aus ihren Theilchen gemacht, wie sie auf einander folgen, da denn immer der kleine Würfel der tausendste Theil des nächst grössern seyn wird. Durch dergleichen Würfel misset man gemeiniglich alle Cörper. Die Zahlen, welche sie ausdrucken, werden wie gemeine Decimalbrüche geschrieben. Beziehet sich also eine Zahl, als 103, 5729345 auf würflichte Einheiten; so bedeuten die erstern Ziffern, welche von den nachfolgenden durch das (,) abgesondert sind, 103 würflichte Einheiten, wie man sie angenommen hat, zum Exempel solche Würfel, deren Seiten Schuhe sind, die nachfolgende drey Ziffer bedeuten 572 Würfel, deren Seiten den zehenden Theil der Seiten des vorigen ausmachen. Die drey, die auf diese folgen, zehlen Würfel, deren Seiten wieder der zehende Theil der Seite der unmittelbar vorhergehenden Würfel ist: und eben so ist die Seite der Würfel, die

von

von den letzten drey Ziffern gezehlet werden: (denn man muß auch hier die Classe dreyer Ziffer mit 00 vollmachen, so oft es nöthig ist) der zehende Theil der Seite der Würfel der dritten Grösse, und man hat 500 dergleichen Würfel. Damit man dieses desto leichter einsehen könne, pfleget man auch dergleichen Zahlen also zu schreiben und abzutheilen: 103° 572' 934'' 500.'''

XIII. Abschnitt.

§. 27. Wiederum setzet uns dieses genugsam im Stand, alle Cörper der ersten, andern und dritten Art zu berechnen, deren Grundflächen geradlinicht sind. Da man vor einen jeden Cörper der ersten Art ein Parallelepipedum annehmen kan, welches mit demselben gleiche Grundfläche und Höhe hat, XI, 25; so siehet man, daß einen jeden Cörper der ersten Art zu berechnen, nichts erfordert wird, als daß man seine Grundfläche berechne, welche zugleich die Grundfläche des Parallelepipedon seyn wird, und daß man diese sodann durch die Höhe des Cörpers multiplicire.

§. 28. Und da ein Cörper der zweyten Art ein Drittel eines Cörpers der ersten Art ist, welcher mit demselben gleiche Grundfläche und Höhe hat, XI, 61: so wird ein Cörper der zweyten Art, dessen Grundfläche die Zahl B, und dessen Höhe die Zahl A ausdrucket, durch das Product $\frac{1}{3} B \times A$ ausgedruckt; und man erhält dieses Product, wenn man das Product aus der Grundfläche und Höhe $B \times A$ durch 3 theilet; oder wenn man $\frac{1}{3}$ B durch A, oder auch B durch $\frac{1}{3}$ A multipliciret.

§. 29. Ein Cörper der dritten Art ist zweyen Dritteln eines Cörpers der ersten Art gleich, welcher mit dem Cörper der dritten Art gleiche Grundfläche und Höhe hat, XI, 89, und wird demnach durch das Product $\frac{2}{3} B \times A$ ausgedruckt. Man bekommet dieses Product, wenn man $2 B \times A$ durch 3 dividiret; oder wenn man $\frac{2}{3}$ B durch A, oder $\frac{2}{3}$ A durch B multipliciret.

§. 30. Alle diese Berechnungen der Cörper der ersten, andern und dritten Art haben auch in dem Falle statt, wenn die Grundflächen, Cirkel oder Theile der Cirkel sind. Wir haben aber noch nicht weisen können, wie die Cirkel zu berechnen seyen. Und wir werden dieses erst nach einer weitläuftigen Betrachtung gewisser Eigenschaften der Zahlen thun können, welche so wohl vor sich von grossem Nutzen, als insonderheit bey der Messung der krummlinichten Flächen unentbehrlich sind, zu welchen wir uns nunmehro wenden.

Von

XIII. Abschnitt.

Von der Buchstaben Rechnung. Erklärung der Zeichen.

§. 31. Dieses desto bequemer einzusehen, müssen wir uns vor allen Dingen die Zeichen bekannt machen, deren man sich bey dergleichen Abhandlungen mit ungemeinem Vortheil bedienet, dem Verstand zu helfen, und das Nachdenken zu erleichtern. Es macht der Gebrauch dieser Zeichen vor sich keinesweges die so genannte Algebra aus. Die Seele derselben bestehet in der Art zu schliessen, und keinesweges blos in dem Gebrauch dieser oder jener Zeichen. Wir werden uns von der Art des Vortrages, dessen wir uns bisher bedienet haben, ins künftige keinesweges entfernen; und dieser ist von der Art die Fragen aufzulösen, die die Algebra weiset, sehr verschieden.

§. 32. Was aber diese Art zu zeichnen anlanget; so werden die Zahlen, wie auch sonst oft in diesen Betrachtungen von uns geschehen ist, durch die Buchstaben vorgestellet: vor welche man demnach jede beliebige Zahlen wird setzen können. Doch pfleget man sich, wegen der Bequemlichkeit, der kleinern Buchstaben mehr als der grössern zu bedienen. Die Zeichen, welche die Rechnungsarten ausdrucken, die mit den Zahlen vorzunehmen sind, haben wir nicht nöthig zu lehren, weil wir sie gleich Anfangs gewiesen haben: nur ist zu erinnern, daß die Multiplication der Kürze halber hier meistens blos dadurch ausgedrucket werde, daß man die Buchstaben unmittelbar an einander setzet, welche die Zahlen bedeuten, so in einander zu multipliciren sind. Demnach wird ab das Product aus den zwo Zahlen bedeuten, welche man sich unter den zwey Buchstaben a und b vorstellet; und abb das Product, welches kommet, wenn man die Zahl b in sich selbst; und das Product bb, welches dergestalt heraus gebracht wird, durch a multipliciret, und so ferner.

§. 33. Bey diesen Producten ist noch zu merken, daß, wenn man eine Zahl a in sich selbst, das ist, in a multipliciret, und das dadurch entstehende Quadrat, in eben die Zahl a, und so fort; alle diese Producte die Dignitäten der ersten Zahl a genennet werden, welche in Ansehung derselben die Wurzel ist. Und zwar ist aa die zweyte Dignität der Wurzel a, und aaa ist die dritte Dignität dieser Wurzel; $aaaa$ die vierte, $aaaaa$ die fünfte und so fort. Diese Redensarten allgemein zu machen, nennet man auch a, die erste Dignität, von eben der Wurzel a, welche also von der Wurzel selbst nicht verschieden ist. Die zweyte und dritte Dignität der Wurzel a kennen wir bereits unter dem

Na-

Namen der Quadrat und der Cubiczahl dieser Wurzel: und es ist überhaupt das Gegenwärtige nicht anderst, als eine Erweiterung der Begriffe, welche wir von den Quadrat und Cubiczahlen gegeben haben, anzusehen.

§. 34. Die Weitläufstigkeit im schreiben, welche die vielfältige Wiederholung einerley Buchstabens verursachen würde, zu vermeiden, pfleget man die Zahl der Buchstaben, welche sonst geschrieben werden müsten, nur oben zur rechten Hand mit einer Ziffer auszudrucken, welche man deswegen die Exponenten oder Namen der Dignität nennet, weil sie anzeiget, die wie vielste Dignität der Wurzel, an welcher sie stehet, man haben wolle. Demnach schreibet man

vor aa auch a^2
aaa --- a^3
$aaaa$ --- a^4
$aaaaa$ --- a^5 und so fort.

Wil man aber bloß eine gewisse Dignität der Wurzel a ausdrucken, ohne anzuzeigen, die wie vielste dieselbe eigentlich sey: so bedienet man sich an statt der Zahl eines Buchstabens, welcher eine jede Zahl bedeuten kan, und schreibet also a^n. Uebrigens schliesset man hieraus leicht, daß a^1, wie man zuweilen zeichnet, nichts anders bedeuten könne, als selbst die erste Dignität a, oder die Wurzel aller übrigen Dignitäten der a.

§. 35. Wir können eine Sache, die zwar an sich selbst keine Schwierigkeit hat, durch ein Exempel noch deutlicher machen. Wenn a die Zahl 2 bedeutet, so ist $aa = a^2 = 2 \times 2 = 4$, und $aaa = a^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, und $aaaa = a^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, $aaaaa = a^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$, und so fort.

§. 36. Es hat aber dasjenige, so wir eben von der bequemen Bezeichnung der Dignitäten, vermittelst der Exponenten derselben, gesaget haben, auch in dem Falle statt, wenn die Dignitäten selbst als Factores in andern Producten vorkommen. Es ist $aaabb$ so viel als $aaa \times bb$: und weil a^3 so viel bedeutet als aaa, und b^2 so viel als bb, so kan auch $a^3 b^2$ nichts anders als $aaabb$ bedeuten. So ist es in allen übrigen dergleichen Fällen. $a^5 b^3 c$ bedeutet so viel als $aaaaabbbc$. Man siehet bloß hieraus, was diese Art, die Dignitäten durch ihre Namen zu bezeichnen, vor eine Bequemlichkeit gebe.

§. 37. Auch ist die Bequemlichkeit, welche man aus dieser Be-

XIII. Abschnitt.

zeichnung bey der Multiplication und Division der Dignitäten, durch andere Dignitäten von eben der Wurzel, ziehet, nicht geringer. Denn gesetzt, es sey a^3 durch a^2 zu multipliciren, so darf man bloß die Exponenten 3 und 2 addiren. Die Summe $3 + 2$ oder 5 ist der Exponent des Products, und dieses ist demnach a^5. Denn wenn befohlen wird, a^3 durch a^2 zu multipliciren, so ist eigentlich aaa durch aa zu multipliciren. Nun ist das Product $aaa \times aa$ ohnstreitig $aaaaa$, denn dieses kan nichts anders als das vorige bedeuten. Eben so viel aber bedeutet auch a^5. So ist es in allen Fällen, und das Product aus a^n in a^m ist demnach a^{m+n}.

§. 38. Hieraus siehet man so gleich, daß, wenn man eine Dignität a^n in sich selbst multipliciren sol, man bloß die Exponenten derselben zu sich selbst addiren, oder zweymal nehmen müsse: und daß $a^{n+n} = a^{2n}$ dem Product $a^n \times a^n$ gleich seyn werde. Aus eben der Ursach ist die dritte Dignität der a^n diese a^{3n}. Denn diese zu erhalten, muß man das Product $a^n \times a^n \times a^n$ machen. Dieses Product aber ist der Dignität a^{n+n+n}, oder a^{3n} gleich. Und überhaupt hat man nur den Exponenten der Wurzel durch den Exponenten der Dignität zu multipliciren, wenn man diese Dignität erhalten wil, der Exponent der Wurzel mag seyn so groß er wil. Denn man kan eine jede Zahl, und folgends auch eine jede Dignität, als eine Wurzel betrachten. Und es sind demnach die Dignitäten der a^n, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, diese: a^n, a^{2n}, a^{3n}, a^{4n}, a^{5n} und so fort; und a^{mn} bezeichnet überhaupt eine jede Dignität der Wurzel a^n, deren Exponenten die Zahl m ausdrucket.

§. 39. Hieraus schliesset man leicht, daß, wenn eine Dignität durch eine andere von eben der Wurzel zu dividiren ist, man nur den Exponenten der letztern von dem Exponenten der erstern abziehen müsse, damit der Exponent des Quotienten übrig bleibe. Es sey a^5 durch a^2 zu dividiren, so ist der Exponent des Quotienten $5 - 2 = 3$, und der Quotient ist a^{5-2} oder a^3. Dieses schliesset man kurz daraus, weil, wenn man a^3 mit der Dignität a^2 multiplicirет, durch welche a^5 dividiret worden ist, diese a^5 wieder heraus gebracht wird.

§. 40. Auch dieses können wir durch allgemeine Zeichen ausdrucken, wenn wir sagen, daß der Quotient der Dignität a^n, nachdem sie durch diese andere a^m dividiret worden, sey a^{n-m}. Man wende diese Regel bey einer jeden Dignität an, deren Exponent von bestimmeter

Grösse

Grösse ist, als bey dieser a^3, und dividire sie durch a^1 oder a: und bey dem Exponenten verrichte man eben die Division, und so immer fort; so wird $\frac{a^3}{a} = a^{3-1} = a^2$, und $\frac{a^2}{a} = a^{2-1} = a^1 = a$, und $\frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0$, woraus man siehet, daß diese Bezeichnung a^0 nichts anders bedeuten kan als die Einheit. Denn $\frac{a}{a}$ bedeutet die Einheit, die Zahl a mag so groß seyn, als sie wil, weil ein jeder Bruch dessen Nenner dem Zehler gleich ist, der Einheit gleich ist. Gehet man nun in dieser Division weiter fort, und machet $\frac{1}{a} = \frac{a^0}{a}$ nach eben diesen Gesetzen, indem man nemlich den Exponenten des Theilers a von dem Exponenten der 1 oder a^0, welche getheilet werden sol, abziehet, so wird der Quotient $a^{0-1} = a^{-1}$, und es kan also a^{-1} nichts anders bedeuten als $\frac{1}{a}$. Eben so findet man, daß $\frac{a^{-1}}{a} = \frac{1}{a^2}$ auch dergestalt a^{-2} gezeichnet werden könne: und daß überhaupt die Zeichnung a^{-m} nichts anders bedeute, als $\frac{1}{a^m}$. Gleichwie nemlich der Exponent m bedeutet, daß man die Einheit durch die Zahl a und diese wieder durch a und so ferner, so oft multipliciren müsse, als viele Einheiten in dem Exponenten m enthalten sind: also erfordert im Gegentheil die Zeichnung a^{-m}, daß man die Einheit durch a, und den Quotienten $\frac{1}{a}$ wieder durch a dividiren, und dieses so oft, als viele Einheiten in m enthalten sind. Stehet zum Exempel m an statt der Zahl 3, so ist a^m oder $a^3 = 1 \times a \times a \times a$ und a^{-3} ist $= \frac{1}{a \times a \times a}$.

§. 41. Und da a^{2n} die zweyte Dignität der Wurzel a^n bedeutet, oder das Quadrat dieser Zahl, so siehet man, daß hinwiederum die Wurzel einer zweyten Dignität, oder eine Quadratwurzel dadurch bezeichnet wird, wenn man den Exponenten derselben halb so groß machet, als den Exponenten der Dignität. So ist a^{3n} die dritte Dignität der Wurzel a^n, und der Exponent der Wurzel der dritten Dignität oder der Cubicwurzel derselben n ist der dritte Theil des Exponenten der Dignität 3n. Eben so ist es mit der Wurzel der vierten der fünften und fol-

folgenden Dignitäten. Denn a^n ist die Wurzel der vierten Dignität a^{4n}, und der fünften a^{5n} und so fort. Dieses ist richtig, n mag bedeuten, was man wil. Und man bezeichnet also die Wurzel der vierten Dignität, wenn man den Exponenten der Dignität durch 4 theilet, die Wurzel der fünften, wenn man die Division durch 5 verrichtet, und so fort. Und da überhaupt a^{mn} die Dignität der Wurzel a^n vorstellet, deren Exponent die Zahl m ist, so bekömmt man überhaupt die Wurzel der Dignität deren Exponent m ist, wenn man den ganzen Exponenten mn wie er an a stehet, durch den Exponenten m theilet, welcher die Dignität anzeiget, deren Wurzel man haben wil.

§. 42. Eben dieses ist auch richtig, wenn der Exponent durch eine einzelne Zahl oder durch einen einzigen Buchstaben angezeiget wird, ob zwar diese Zahl sich nicht durch den Exponenten der Dignität, von welcher man die Wurzel haben wil, genau dividiren lässet. Ein Exempel kan die Sache klar machen. Ich wil die Wurzel haben, deren dritte Dignität die Zahl a^5 ist. So betrachte ich 5 als ein Product aus 3 und einer andern Zahl, welche nichts anders als $\frac{5}{3}$ seyn kan, und schreibe also, oder kan wenigstens an statt a^5 schreiben $a^{3 \times \frac{5}{3}}$, dadurch erhellet sogleich, daß $a^5 = a^{3 \times \frac{5}{3}}$ die dritte Dignität der Zahl $a^{\frac{5}{3}}$ sey, weil diese Wurzel $a^{\frac{5}{3}}$ in der dritten Dignität $a^{3 \times \frac{5}{3}}$ das ist a^5 giebt. Es wird also die Wurzel der dritten Dignität der gegebenen Zahl a^5 gefunden, wenn man den Exponenten dieser gegebenen Zahl 5 durch den Exponenten der Dignität dividiret, deren Wurzel man haben wil. Und ist überhaupt die Zahl aus welcher man die Wurzel der Dignität m ausziehen sol, mit a^n bezeichnet, so wird diese Wurzel durch $a^{\frac{n}{m}}$ ausgedrückt. Man siehet dieses auch bloß daraus ein, weil, wenn man $a^{\frac{n}{m}}$ zu der Dignität erhebet, deren Exponent m ist, man $a^{\frac{mn}{m}}$ das ist, das vorige a^n erhält.

§. 43. Ferner findet dasjenige, so von den Exponenten der Dignitäten und ihrer Wurzeln gesaget worden ist, auch in dem Falle statt, wenn verschiedene Dignitäten von verschiedenen Wurzeln in einander multipliciret sind. Die zweyte Dignität nemlich von $a^n b^m$ ist $a^{2n} b^{2m}$, die dritte $a^{3n} b^{3m}$, die vierte $a^{4n} b^{4m}$; und so fort. Denn die

die zweyte Dignität von $a^n b^m$ ist ohnstreitig $a^n b^m \times a^n b^m$, das ist $a^n a^n b^m b^m$. I, 96. Nun ist $a^n a^n = a^{2n}$, und $b^m b^m$ ist b^{2m}, XIII. Abschnitt, 38. Also ist die zweyte Dignität von $a^n b^m$ in der That $a^{2n} b^{2m}$. Eben so schliesset man auch bey der dritten Dignität, und den übrigen. Und wenn mehr als zwo Dignitäten in einander multipliciret sind, siehet man auf eben die Art ein, daß noch eben dieses gelte. Ist die Wurzel $a^n b^m c^s$; so ist die Dignität dieser Wurzeln deren Exponent r ist, diese: $a^{rn} b^{rm} c^{rs}$.

§. 44. Hieraus schliesset man, daß hinwiederum, wenn aus einer Dignität die Wurzel auszuziehen ist, welche durch die Multiplication verschiedener Dignitäten von verschiedenen Wurzeln entstanden ist; man aus allen diesen Dignitäten die Wurzeln ziehen, und diese hernach in einander multipliciren könne. Die Wurzel der Dignität $a^{2n} b^{2m}$, welche man als die zweyte betrachtet, ist $a^n b^m$: Und wenn man $a^{rn} b^{rm} c^{rs}$ als eine Dignität ansiehet, deren Exponent r ist, so ist die Wurzel derselben $a^n b^m c^s$. Man hat nemlich die Wurzeln der Dignitäten a^{rn}, b^{rm}, c^{rs}, welche in einander multipliciret waren, eine nach der andern ausgezogen, und diese Wurzeln a^n, b^m, c^s nachhero in einander multiplicirt. Siehet man $a^n b^m c^s$ als eine Dignität an, deren Exponent t ist, so ist die Wurzel derselben $a^{\frac{n}{t}} b^{\frac{m}{t}} c^{\frac{s}{t}}$.

§. 45. Daß die Wurzel aus einer Zahl ausgezogen werden sol, welche man als eine Dignität derselben ansiehet, pfleget man auch durch dieses Zeichen $\sqrt{}$ auszudrücken, welches man vor dieselbe Zahl oder das Zeichen, unter welchem man sich eine Zahl vorstellet, setzet; und über demselben bezeichnet man den Exponenten der Dignität, welche man der Zahl giebet, deren Wurzel verlanget wird. Doch wird der Exponent 2 nicht geschrieben. Folgends bedeutet $\sqrt{3}$, daß man 3 als eine Quadratzahl ansehe, und ihre Wurzel verlange, welche irrational ist. $\sqrt[3]{64}$ bedeutet, daß man die Zahl 64 als eine Cubiczahl ansehe, so sie auch würklich ist, und die Wurzel derselben haben wil, welche 4 ist. Und so in allen übrigen Fällen. $\sqrt[n]{a^m}$ bedeutet also, daß man a^m als eine Dignität ansehe, deren Exponent n ist, und die Wurzel dieser Dignität ist dasjenige, so man sich unter $\sqrt[n]{a^m}$ vorstellen muß.

§. 46. Hieraus nun schliesset man ferner, daß überall $\sqrt[t]{a^m}$ so viel bedeu-

XIII. Abschnitt. bedeute, als $a^{\frac{m}{t}}$: woraus ferner folget, daß auch die nachfolgenden Zeichen einerley Bedeutung haben: $\sqrt[t]{a^m b^n c^s} = a^{\frac{m}{t}} b^{\frac{n}{t}} c^{\frac{s}{t}} = \sqrt[t]{a^m} \times \sqrt[t]{b^n} \times \sqrt[t]{c^s} = a^{\frac{m}{t}} \times \sqrt[t]{b^n} \times \sqrt[t]{c^s} = a^{\frac{m}{t}} \times \sqrt[t]{b^n c^s} = a^{\frac{m}{t}} b^{\frac{n}{t}} \times \sqrt[t]{c^s} = \sqrt[t]{a^m b^n} \sqrt[t]{c^s}$. Ein kleines Nachdenken, bey welchem man voraussetzet, daß die Sache nicht die geringste Schwierigkeit habe, kan dieselbe deutlicher machen, als viele Worte.

§. 47. Dieses war dasjenige, so wir von der Bezeichnung zu merken hatten, der man sich bey dergleichen Abhandlungen mit gar grossem Vortheil bedienet, als wir vor uns haben. Wir müssen denselben nur noch einen Satz beyfügen. Wir haben die Bedeutung der Zeichen + und — längst I, 72. deutlich erkläret, und gewiesen, daß wenn sie den Ziffern vorgesetzet werden, welche Zahlen ausdrücken, und man, zum Exempel, schreibet + 15 — 13; diese Ziffer zwar Einheiten von einerley Art bedeuten können, 15 Thaler zum Exempel und 13 Thaler, aber solche, welche durch anderweitige Bestimmungen einander dergestalt zuwider sind, daß die kleinere Zahl so viele Einheiten der grössern aufhebet und in nichts verwandelt, als sie deren selbst enthält. Dergleichen sind 15 Rthl. Einnahme, 13 Thaler Ausgabe, oder 15 Thaler Ausgabe, 13 Thaler Einnahme, wie auch 15 Meilen Weges vor sich, 13 Meilen zurück, oder 15 Meilen zurück, 13 vor sich, und dergleichen. Eben dieses ist auch auf die Buchstaben oder andere Zeichen anzuwenden, womit die Zahlen oder andere Grössen, als Linien, Oberflächen und Cörper bezeichnet werden. Es bedeuten $+a$, $-a$ Grössen von einerley Art, die einander zwar gleich, aber dergestalt zuwider sind, daß $+a$ mit $-a$ zusammen nicht $2a$ giebt, wie geschehen würde, wenn sie einander nicht zuwider wären; sondern es ist $+a$ mit $-a$ eigentlich gar nichts. Eben so ist $+3a - a$ nicht mehr als $+2a$, und $+3a - 5a$ giebt $-2a$. Denn es wird durch das kleinere nur ein Theil des grössern aufgehoben, welcher dem kleinern gleich ist, und der Ueberschuß ist allezeit von der Art des grössern. Eben so ist $a^n - a^n = 0$, $3a^n - 2a^n = a^n$, und $3a^n - 5a^n = -2a^n$, $5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$. Denn es ist das gezeigte richtig, von was Art auch im übrigen die Grössen seyn mögen, wenn nur die Grössen, deren eine mit + bezeichnet ist, nicht von einer andern Art sind, als diejenigen, vor deren Zeichen — stehet.

§. 48

§. 48. Wenn vor dem Zeichen einer Grösse weder + noch − stehet, so kan man allezeit vor dasselbe + setzen, weil dasselbe im Anfang gemeiniglich nie geschrieben wird. Und die Einheit stellet man sich allezeit als mit + bezeichnet vor, ausser wenn besondere Umstände ein anders erfordern. Man siehet leicht, daß dieses etwas willkührliches ist.

XIII. Abschnitt.

igung der Zahlen, so durch Buchstaben angezeiget werden, und deren Subtraction.

19. Hieraus ist alsobald zu begreiffen, wie man die Zahlen n müsse, welche durch Buchstaben bedeutet werden, vor diese Zeichen + und − stehen, welche Arbeit man gewissen als eine Addition ansehen kan. Gesetzt, man habe $+2c$, und noch über dieses $3a+2b-c$, wie viel macht sammen? Die Antwort ist ungemein leicht: es machet, $5a$ $2c \times 3a+2b-c$, oder in einer andern Ordnung $5a+3a-$ $b+2c-c$, denn man siehet so gleich, daß an der Ordner nichts gelegen sey. Man siehet aber auch, daß man eben kürzer ausdrücken könne. Denn $5a+3a$ ist eigentlich so $8a$, und $-3b+2b$ ist $-b$, eben so ist $2c-c=c$ r also kurz sagen, daß alle die vorgelegte Grössen mit einreiniget oder zusammen gesetzet, diese bringen $8a-b+c$. r erhält diese Verkürzung, wenn, nachdem man die Grösihren Zeichen zusammen gesetzet hat, man alle diejenigen welche einander gleich sind, und wegen der widrigen Zeiund − einander aufheben, diejenigen aber zusammen zehe von einerley Art sind, und, weil sie mit einerley Zeichen + oder − bezeichnet sind, einander vermehren.

§. 50. Es kan hierinn die anderweitige Bezeichnung nichts ändern. Als $3a^3-5a^2+b^2+2c$ mit $a^3-a^2-2b^2-3e$ zusammen giebt $3a^3+a^3-5a^2-a^2+b^2-2b^2+2c-3e$. Das ist, wenn man dasjenige weglässet, so einander vernichtet, und die gleichen Grössen, welche einander nicht zuwider sind, zusammen setzet, $4a^3-6a^2-b^2+2c-3e$. Wenn man diese Exempel erweget, so wird man mit geringem Nachsinnen alles dasjenige aus denselben einsehen, was bey dieser Sache zu sagen ist.

§. 51. Mit der Subtraction hat es eben so wenig Schwierigkeit. Es sey $3a+2b-c$ gegeben, und man sol von demselben $2a-b+c$ weg-

XIII. Abschnitt. wegnehmen: so verändere man nur die Zeichen desjenigen, so man von dem erstern abziehen sol, indem man an statt + setzet —, und an statt — das gegenseitige +, und mache dadurch aus demselben — $2a + b - e$ vereinige aber so dann XIII, 49. diese letzteren Grössen mit denjenigen, von welchen man subtrahiren solte; so ist die Subtraction geschehen, und der Unterschied ist $3a + 2b - c - 2a + b - e$, das ist kurz $a + 3b - c - e$. Denn indem man in der Grösse, welche man abziehen solte, $2a - b + e$. die Zeichen dergestalt verwechselt, und dieselbe so dann mit den ersteren Grössen $3a + 2b - c$ vereiniget, so vernichten sie von diesen Grössen so viel, als sie selbst betragen, und dadurch kan nichts anders als der Unterschied derer einen von den andern übrig bleiben XIII, 47. Die Sache ist gar natürlich; ob sie zwar eben deswegen, weil sie so leicht ist, einen im Anfang aufhalten könte. Derjenige, welcher von 7 Thalern drey Thaler ausgegeben hat, behält vier Thaler übrig, und diese vier Thaler sind der Ueberschuß der 7 Thaler, welche er gehabt, über die ausgegebene Dreye. Wird demnach jemand gefraget, wie viel der Ueberschuß von sieben Thalern über drey Thaler betrage, so antwortet er richtig, wenn er saget, es betrage dieser Ueberschuß so viel, als der in seinem Vermögen hat, welcher sieben Thaler gehabt und drey davon ausgegeben. Auf diese so gar leichte Begriffe gründet sich die Bezeichnung des Unterschiedes, welche wir eben gewiesen haben.

Die Producte zusammen gesetzter Factoren durch Buchstaben auszudrücken.

§. 52. Was die Multiplication anlangt, so haben wir bereits XIII, 32. erwehnet, daß das Product, dessen Factore man sich unter den Buchstaben a, b vorstellet, kurz ausgedrucket werde, indem man diese Buchstaben unmittelbar an einander setzet, also, ab. Es ist aber noch die Frage übrig, welches von den Zeichen +, — diesem Product müsse vorgesetzt werden, wenn einer oder der andere Factor a, b, dieses oder jenes dieser Zeichen vor sich hat. Wenn wir auf den Grund der Multiplication zurück gehen, werden wir diese Frage ohne Weitläuftigkeit beantworten können.

§. 53. Man kan I, 79. sich eine jede Multiplication als eine Erfindung der vierten Proportionalzahl zu drey gegebenen vorstellen, deren die erstere die Einheit ist, und die zweyte und dritte die gegebene Zahlen, diejenigen zum Exempel, welche wir uns unter a und b vorstellen.

stellen. Es kan die Einheit eben so wie eine jede andere Zahl entweder mit + oder mit — bezeichnet seyn; ordentlicher Weise aber, und wenn man Freyheit hat dieses oder jenes anzunehmen, bezeichnet man die Einheit allezeit mit +, oder man nimmet sie von der Art derjenigen Dinge an, welche man sich als etwas würckliches vorstellet, XIII, 48. und so ist es auch bey der gegenwärtigen Proportion. Man könte bey derselben die Einheit allezeit mit — bezeichnen, oder bald mit +, bald mit —. Allein dieses würde unnöthige Weitläuftigkeit geben, und zu nichts nutzen, als uns mit einer Menge von Reguln zu überhäuffen, deren man gar wohl entbehren kan. Da aber ein jeder von den Factoren a und b jedes der zwey Zeichen haben kan, von welchen die Rede ist, so siehet man, daß die Frage, welche wir zu entscheiden haben, diese ist: Man stellet sich die Proportion $1 : a = b : ab$ vor, und wil wissen, was das vierte Glied derselben so durch ab bedeutet wird, vor ein Zeichen, + nemlich oder — haben werde, wenn das zweyte a, wie auch das dritte b das erstere oder das andere dieser Zeichen hat.

§. 54. Die Fälle, welche hier vorkommen können, sind eigentlich diese viere:

$$1 : +a = +b : \text{ - - - } ab$$
$$1 : +a = -b : \text{ - - - } ab$$
$$1 : -a = +b : \text{ - - - } ab$$
$$1 : -a = -b : \text{ - - - } ab.$$

Es kan nemlich a entweder das Zeichen + oder das Zeichen — haben, und in einem jeden dieser Fälle ist b wieder entweder mit + oder mit — bezeichnet. In dem ersten Fall nun siehet man gar leicht ein, daß das Product ab ebenfals mit + bezeichnet seyn muß. Wenn man sagt: wie 1 Thaler Einnahme sich zu 5 Thalern Einnahme verhält: so verhalten sich sieben Thaler Einnahme zu 35 Thalern, so sind diese 35 Thaler gewiß keine Ausgabe, oder Schuld oder etwas dergleichen. Eben so leicht ist auch der andere Fall zu beantworten. Es ist in demselben das Product mit — zu bezeichnen, und daß dieses seyn müsse, siehet man wieder bloß aus einem Exempel. Wie sich 1 Thaler Einnahme zu 5 Thalern Einnahme verhält, so verhalten sich 7 Thaler Schuld, zu 35 Thalern Schuld, nicht aber zu 35 Thalern Einnahme, denn sonst wäre das vierte Glied aus dem dritten nicht so entstanden, wie das zweyte aus dem ersten entstanden ist.

§. 55. Wil man aber eine etwas tiefere Einsicht in diese Dinge haben, so hat man zu betrachten, daß in dem Fall, wenn der Factor a

XIII. Abschnitt.

mit + bezeichnet ist, welches Zeichen auch die Einheit hat, die Grösse a entstehe, indem die Einheit nach und nach wächset, oder dergestalt abnimt, daß doch allezeit etwas übrig bleibe, und die Grösse, welche durch dieses Wachsthum oder Abnehmen der Einheit entstanden ist, ist eben diejenige, welche a bedeutet. Fünf Thaler Einnahme entstehen, indem die Einnahme von einem Thaler wächset, und 5 Groschen Einnahme entstehen, indem die Einnahme eines Thalers abnimt: aber so, daß sie nicht gar vernichtet wird. Eben so aber wie a aus 1 entstehet, muß auch das Product ab aus dem andern Factor b entstehen. Es muß also derselbe ebenfals wachsen oder abnehmen, wie die Einheit gewachsen oder abgenommen, ohne daß er gar verschwinde. Wächset aber b auf die Art beständig, oder nimt es bis auf eine gewisse Grösse ab, und man bezeichnet die Grösse, welche durch dieses Wachsthum oder Abnehmen entstanden ist mit ab; so ist dieses ab gewiß von der Art des b, und folgends hat ab das Zeichen + wenn b dieses Zeichen hat, und ab ist mit — zu bezeichnen, wenn vor b dieses Zeichen stehet. Eine Schuld welche dreymal grösser oder dreymal kleiner worden, ist noch allezeit eine Schuld, gleichwie das Vermögen Vermögen bleibt, es mag wachsen oder abnehmen wie es wil, wenn es nur nicht so sehr abnimt, daß es gar nichts wird.

§. 56. Die zween letztern Fälle scheinen eine etwas grössere Schwierigkeit zu haben: doch ist die Betrachtung, welche wir eben gemacht haben, hinlänglich dieselbe bald zu heben. Wil man sich die Verhältniß 1 : — a vorstellen, so muß man betrachten wie — a aus der Einheit entstehe, welches wir in einem Exempel am besten werden zeigen können, weil uns sonst die Worte mangeln dürften, uns recht deutlich auszudrücken. Ich gehe eine Meile von Morgen gegen Abend. Diese Meile ist 1, und ich kan mir sie als würklich vorstellen. Um diese Meile bin ich nunmehro von dem Ort gegen Abend zu entfernt, von welchem ich ausgegangen bin. Ich kan noch weiter nach Abend fortgehen, und wenn ich mich endlich aufhalte, so kan der Weg, welchen ich auf die Art zurück geleget, und meine ganze Entfernung von dem Orte, aus welchem ich ausgegangen, durch a bedeutet werden, und dieses a hat nunmehro das Zeichen +, weil es zu der Einheit hinzu gesetzt dieselbe vermehret. Gehe ich nun auf meinen Weg zurück, und nähere mich also wieder dem Ort, aus welchem ich gegangen bin beständig, so wird a immer kleiner und kleiner: gleichwohl behält es das Zeichen +, bis ich endlich wieder daselbst angelan-

gelanget bin, wo ich ausgegangen. So bald dieses geschehen ist, verschwindet a, oder meine Entfernung von diesem Ort nach Abend zu, ganz und gar, und wird zu nichts. Diese Vernichtung ist durch den Rückweg von Abend gegen Morgen geschehen, welchen ich genommen habe. Setze ich nun diesen Weg ferner fort, so entferne ich mich von dem Ort nunmehro gegen Morgen, und die Grösse dieser Entfernung kan wieder durch den Buchstaben a ausgedrücket werden. Auch ist nicht nöthig etwas weiter hinzu zu setzen, so lange man blos auf diese Entfernung siehet. Wil man aber auch darauf Acht haben, daß dieser Weg ein Rückweg ist, von Abend gegen Morgen, welcher den vorigen von Morgen gegen Abend vermindert, indem er selbst wächst und endlich gar vernichtet, mich aber, wenn er noch grösser wird, von meinem ersten Ort nach Morgen entfernet; so muß dem Buchstaben a noch das Zeichen — vorgesetzet werden. Und es entstehet also allezeit $-a$ aus der 1, indem die Einheit nach und nach vernichtet wird, bis sie gar nichts wird, und indem diejenige Grösse, welche die Einheit vernichtet hat, so dann noch weiter wächst.

§. 57. Ist nun also die Verhältniß $1:-a$ gegeben, und man sol aus b die Grösse ab eben so machen, wie $-a$ aus 1 wird, so muß b, von was Art sie auch seyn mag, immer abnehmen bis es endlich nichts wird, und die Grösse, welche sie dergestalt vernichtet, muß von dar an noch immer zunehmen bis die Verhältniß $ab:b$ der Verhältniß $a:1$ gleich werde. Hieraus aber siehet man, daß wenn b das Zeichen $+$ hat, wie in dem dritten Falle, ab das Zeichen — haben werde. Denn diejenige Grösse welche $+b$ vernichtet hat, muß nothwendig das Zeichen — haben, und von der Art dieser Grösse ist in diesem Fall ab. Hat aber b das Zeichen — wie in dem vierten Falle; so ist die Grösse, welche es vernichten kan, von der Art derjenigen, die mit $+$ bezeichnet sind, und dieses Zeichen muß also auch ab haben, weil ab von der Art derjenigen Grössen ist, so die b vernichten. Wie sich ein Thaler Vermögen verhält zu 5 Thaler Schuld, so verhalten sich 7 Thaler Vermögen zu 35 Thaler Schuld. Denn gleichwie 5 Thaler Schuld aus einem Thaler Vermögen entstehen, indem man nemlich sechs mal so viel anwendet als man im Vermögen hat; eben so entstehen 35 Thaler Schuld aus 7 Thaler Vermögen, weil derjenige der 7 Thaler besessen, wieder sechs mal so viel angewendet hat, als er gehabt, bis er sein Vermögen vernichtet, und noch über das 35 Thaler Schulden auf sich geladen. Eben so verhält sich auch ein Weg

von 7 Meilen vorwärts, zu einem Rückweg von 35 Meilen; und so ist es in dem andern Exempel. Wie sich ein Thaler Vermögen zu 5 Thaler Schuld verhält, so verhält sich 7 Thaler Schuld zu 35 Thaler Vermögen. Denn gleichwie derjenige, welcher 1 Thaler hat, sechs mal so viel anwenden muß, bis er 5 Thaler schuldig wird: so muß derjenige, welcher 7 Thaler schuldig ist, sechs mal so viel erwerben, bis er seine Schuld tilgen kan, und noch über das 35 Thaler reich wird.

§. 58. Nehmen wir nun dieses alles zusammen, so sehen wir, daß in den gegebenen vier Fällen die Zeichen so stehen müssen:

$$1 : +a = +b : +ab$$
$$1 : +a = -b : -ab$$
$$1 : -a = +b : -ab$$
$$1 : -a = -b : +ab.$$

In dem ersten und letzten dieser Fälle haben die beyden Factorn a und b einerley Zeichen, $+$ in dem ersten, und $-$ in dem letzten; und in beyden Fällen ist das Product ab mit $+$ bezeichnet. In dem zweyten und dritten Fall aber haben die beyde Factore verschiedene Zeichen, und das Product hat $-$. Man muß demnach diese Reguln fest setzen: Das Product hat das Zeichen $+$, wenn beyde Factore einerley Zeichen haben, und das Product hat das Zeichen $-$, wenn die beyden Factore verschiedentlich bezeichnet sind.

§. 59. Man kan dieses gar leicht umkehren und schliessen, daß wenn das Product das Zeichen $+$ hat, die zween Factore desselben ohnmöglich verschiedene Zeichen haben können. Denn wäre dieses, so hätte das Product das Zeichen $-$. Und durch einen eben dergleichen Schluß siehet man, daß wenn das Product das Zeichen $-$ hat, die beyden Factore nicht einerley Zeichen haben können, weil sonst das Product das Zeichen $+$ haben müste. Dieses kan uns dienen, wenn wir die Producte in ihre Factore zu zerfällen haben. Nur müssen wir dabey bemerken, daß die Factore von $+ab$ so wol $+a$, $+b$ als $-a$, $-b$ seyn können, und daß von $-ab$ nicht nur $-a$ und $+b$ sondern auch $+a$ und $-b$ Factore abgeben können. Daß man also ein jedes Product auf zweyerley Art in zween Factore zerfällen kan, und man in diesen Stücken Freyheit hat. Selbst diese Freyheit, welche die Sache erleichtert, könte uns anstössig seyn, wenn wir sie nicht zum Voraus bemerket hätten.

§. 60. Ist einer der Factore aus zweyen Theilen zusammen gesetzt,

setzet, es mögen dieselben Theile mit + oder mit — bezeichnet seyn, wie man will; so bestehet das Product aus den Producten dieser Theile, und dem andern Factor: und die Zeichen der Theile dieser Producte sind aus demjenigen, so gewiesen worden ist, abzunehmen. Es sey erstlich $+a+b$ durch $+c$ zu multipliciren, so setze man, demjenigen, so XIII, 53. gewiesen worden ist, gemäß, $1:+c=+a:+ca$,
$1:+c=+b:+cb$, und nehme die Summen der letztern Glieder dieser Proportionen, so erhält man $1:+c=+a+b:+ca+cb$; VI, 96. Woraus man siehet, daß allerdings $+ca+cb$ das rechte Product aus den Factoren $+c$ und $+a+b$, sey. Setzet man aber in dieser Proportion an statt + vor das zweyte Glied das gegenseitige Zeichen —, so muß auch das Zeichen des vierten Gliedes — werden, XIII, 58. und es wird dadurch die Proportion in die nachfolgende verwandelt: $1:-c=+a+b:-ca-cb$. Woraus man siehet, daß das Product aus den zwey Factoren $-c$ und $+a+b$ sey $-ca-cb$. Und wenn man das Zeichen des zweyten Gliedes + stehen lässet, verändert aber die Zeichen des dritten; so müssen wieder auch die Zeichen des vierten verändert werden. Es wird dadurch $1:+c=-a-b:-ca-cb$. Das Product also aus $+c$ und $-a-b$ ist $-ca-cb$. Endlich, wenn man in dieser letzten Proportion auch das Zeichen des zweyten Gliedes verändert und an statt desselben $-c$ setzet, so muß wieder auch das Zeichen des vierten Gliedes verändert werden. Die Proportion wird dadurch $1:-c=-a-b:+ca+cb$, und das Product aus $-c$ und $-a-b$ ist $+ca+cb$.

§. 61. Es sey zweytens $a-b$ durch c zu multipliciren, und a sey grösser als b: so ist auch ca grösser als cb, und $a-b$, so wohl als $ca-cb$ ist von der Art derjenigen Grösse, die mit + bezeichnet sind, $-a+b$ aber, und $-ca+cb$ ist von der Art derjenigen, vor welchem das Zeichen — stehet. Setzet man nun wieder

$1:\pm c=\pm a:\pm ca$,

und $1:\pm c=\pm b:\pm cb$, und nimmet den Unterschied der letztern Glieder dieser Proportionen, a, b, wie auch ca, cb, und bringet dadurch die Proportion $1:\pm c=\pm a-b:\pm ca-cb$ heraus; so siehet man, daß $\pm ca-cb$ das richtige Product, aus den Factoren c und $a-b$, sey. Verwechselt man aber wiederum das Zeichen des zweyten Gliedes $\pm$ mit dem gegenseitigen —, so muß auch das Zeichen des letzten Gliedes dergestalt verwechselt werden, und dieses Glied wird also $-ca\pm cb$.

XIII. Abschnitt. Demnach ist das Product aus $-c$ und $+a-b$ dieses vierte Glied $-ca+cb$. Lässet man aber das Zeichen des zweyten Gliedes stehen, und verwechselt das Zeichen des dritten Gliedes, in dem man aus demselben $-a+b$ machet, so muß wieder das Zeichen des vierten Gliedes ebenfals gewechselt werden; und es ist demnach das Product aus $+c$ und $-a+b$ wieder $-ca+cb$. Verwechselt man endlich in dieser letzten Proportion $1:+c=-a+b:-ca+cb$ auch das Zeichen des zweyten Gliedes, so muß das Zeichen des vierten nochmals gewechselt werden. Es wird also dieses vierte Glied $+ca-cb$. Und dieses ist das Product aus den Factoren $-c$ und $-a+b$.

§. 62. Hieraus fliessen die Producte, welche entstehen, wenn man einen aus zweyen oder mehr Theilen zusammen gesetzten Factor durch einen andern dergleichen Factor multipliciren sol, ohne grosse Weitläuftigkeit. Man muß I, 92. dergleichen Producte heraus zu bringen, einen jeden Theil des einen Factors durch einen jeden Theil des andern multipliciren, und diese Producte vermittelst der Zeichen zusammen hängen, welche durch die Multiplication der Theile heraus kommen. Es sey $a-b+c$ durch A zu multipliciren, so wird das Product, wie wir gesehen haben, $Aa-Ab+Ac$. Ist nun $A=a-d$, und also auch der zweyte Factor zusammen gesetzt, so ist

$$Aa = aa - ad \text{ und}$$
$$-Ab = -ab + bd$$
$$+Ac = +ac - cd, \text{ folgends,}$$
$$Aa - Ab + Ac = aa - ad - ab + bd + ac - cd,$$

und dieses ist also das Product aus $a-b+c$ und $a-d$.

§. 63. Und nach eben dieser Regel bringt man das Product aus $a^2-2ab+3bc$ und $2a+b-3c$ heraus. Es ist dasselbe:

$$2a \times \overline{a^2-2ab+3bc}$$
$$+\, b \times \overline{a^2-2ab+3bc}$$
$$-3c \times \overline{a^2-2ab+3bc},$$

bey welcher und dergleichen Zeichnungen der Strich bedeutet, daß alle das, so mit dem Strich verknüpfet ist, und folgends hier das Ganze $a^2-2ab+3bc$ durch dasjenige zu multipliciren sey, so vor demselben stehet, und mit demselben vermittelst des Zeichens der Multiplication verknüpfet ist, und nicht etwa bloß der erste Theil desselbenals a^2. Multipliciret man aber würklich, so wird

2a

$$2a \times \overline{a^2 - 2ab + 3bc} = 2a^3 - 4a^2b + 6abc$$
$$+ b \times \overline{a^2 - 2ab + 3bc} = a^2b - 2ab^2 + 3b^2c.$$
$$- 3c \times \overline{a^2 - 2ab + 3bc} = - 3a^2c + 6abc - 9bc^2.$$

Und dieses ist das gesuchte Product, welches man kürzer schreiben kan, wenn man dasjenige weglässet, so einander aufhebet, und zusammen zehlet was zusammen gezehlet werden kan. Thut man dieses, so wird das gesuchte Product nachfolgender massen ausgedrückt: $2a^3 - 3a^2b + 12abc - 2ab^2 + 3bc^2 - 3ac^2 - 9bc^2$.

Die Division.

§. 64. Man siehet bloß hieraus, daß es nicht eben leicht sey hinwiederum die zween Factore eines gegebenen Products zu finden. Derjenige, welcher die Multiplication nicht erst selbst verrichtet hat, wird nicht leicht errathen, daß die Factore des Products $2a^3 - 3a^2b + 12abc - 2ab^2 + 3b^2c - 3a^2c - 9bc^2$, diese zween $a^2 - 2ab + 3bc$ und $2a + b - 3c$ sind, aus welchen wir es herausgebracht haben. Doch kan einiges Nachsinnen, welches sich auf die Regeln der Multiplication gründet, die wir eben gegeben haben, uns in den Stand setzen die Factore eines gegebenen Products öfters zu errathen, und die Probe kan bald weisen, ob wir in Annehmung derselben uns nicht verstossen: und dieses nennet man hier die Division.

§. 65. Es sey das Product $a^2 - b^2$ gegeben, man sol die Factore desselben nicht so wohl finden als errathen. Setzet man daß dieselben seyn $a + b$ und $a - b$, und multipliciret diese Zahlen in einander, so wird das Product $a \times \overline{a - b} + b \times \overline{a - b}$, das ist, $aa - ab + ab - bb$, oder kürzer $aa - bb$. Es sind also die Factore $a + b$ und $a - b$ richtig angenommen, weil durch die Multiplication aus denselben das gegebene Product $aa - bb$ heraus kommt. Dieses Product ist der Unterschied der Quadrate oder der zweyten Dignitäten von a und b, und man siehet hieraus, daß wenn man die Summe zweyer Zahlen $a + b$ in ihren Unterschied $a - b$ multipliciret, das Product dem Unterschied der Quadrate aus eben den Zahlen a und b gleich sey.

§. 66. Es erhellet aus diesem Exempel, wie leicht man vermittelst des Gebrauchs der bequemen Zeichen, welche wir, so weit wir sie im nachfolgenden gebrauchen werden, zu erklären bemühet gewesen, und vermittelst der Verknüpfung derselben die schönsten und nützlichsten

Sätze

XIII. Abschnitt. Sätze heraus bringen könne, wenn man ihrer nur erst etwas gewohnet worden. Es wird sich aber dieses in dem folgenden viel deutlicher zeigen, denn wir können uns nunmehro zu den Abhandlungen wenden, welche wir uns hauptsächlich vorgenommen haben. Wir werden bey der Betrachtung der so genanten Zahlreihen anfangen müssen.

Zahlreihen. Die Arithmetische.

§. 67. Man nennet aber eine Zahlreihe, eine Menge von Zahlen, welche nach einem gewissen beliebig angenommenen Gesetz in unveränderter Ordnung auf einander folgen. Es sind dergleichen Gesetze viele, und man kan sich deren immer noch mehrere vorstellen. Also giebt es auch unendliche Arten von Zahlreihen. Wir werden uns begnügen lassen, deren zwey zu betrachten, unter welchen insonderheit die letztere von unbeschreiblichem Nutzen seyn wird. Diese sind, die Arithmetische, und die Geometrische Reihe.

§. 68. Wil man eine Arithmetische Reihe machen, so fange man bey einer beliebigen Zahl an, 5, zu dieser Zahl setze man eine andere beliebige Zahl hinzu, oder nehme sie von derselben weg, diese mag 2 seyn. Auf die Art bekommt man das zweyte Glied $5+2=7$, oder wenn man sich der Subtraction bedienet $5-2=3$. Aus diesem zweyten Glied wird nun das dritte auf eben die Art gemacht, wie das zweyte aus dem ersten geworden. Man setzet eben die Zahl 2 zu dem zweyten Glied 7 hinzu, wenn man sich im Anfang der Addition bedienet hat, oder man subtrahiret diese Zahl 2 von dem zweyten Glied 3, wenn man zuerst die Subtraction gebrauchet. Auf eben die Art mache man aus dem dritten Glied das vierte, aus dem vierten das fünfte, und so ferner. Die erstere der Arithmetischen Reihen, welche wir angefangen, wird dadurch diese:

5 7 9 11 13 15 17 und so fort.

§. 69. Man siehet bald daß man eine solche Reihe auch nach forne zu fortsetzen könne, wenn man eben die Zahl 2, welche man addiret hatte, aus dem kleinern Gliede das nächste Grössere zu erhalten, von dem Grössern abziehet, und also das nächste Kleinere heraus bringt. Es wird also, diese Reihe von 5 zurück folgender massen stehen:

$-5-3-1 \quad 1,3,5.$

und wenn man dieses zu dem vorigen hinzu setzet, so bekommt man die verlängerte Reihe:

$-5,-3,-1, \ 1,3,5, \ 5,7,9, \ 11,15,17.$

Wor-

Woraus man siehet, daß eine Arithmetische Reihe vor sich und zurück immer weiter fortgesetzet werden könne, und uns nichts zwinge dieselbe jemals zu enden: und daß die Glieder derselben von der 0, welche man sich in der gegenwärtigen Reihe zwischen -1 und $+1$ vorstellen muß, zu beyden Seiten beständig wachsen, doch so, daß die Glieder, welche an der einen Seite der 0 stehen, alle mit dem Zeichen $+$ versehen sind, und die Gegenseitige das Zeichen $-$ haben.

XIII. Abschnitt.

§. 70. Ferner aber schliessen wir eben hieraus, daß die zweyte Art, eine Arithmetische Reihe heraus zu bringen, von der ersten im Grunde, nicht verschieden sey, und daß eben die Reihe durch die beständige Addition einerley Zahl so wohl als durch die beständige Subtraction heraus gebracht werden könne, indem wenn man sich, an statt der Addition, der Subtraction bedienet, bloß die Glieder in verkehrter Ordnung zu stehen kommen, wie in dem gegebenen Exempel augenscheinlich ist.

§. 71. Wil man indessen eine Arithmetische Reihe schreiben, so muß man sie irgendwo anfangen, ob sie zwar ihrer Natur nach, weder Anfang noch Ende hat. Man stelle sich das erste Glied einer solchen Reihe unter a vor, und der Unterschied zweyer unmittelbar auf einander folgenden Glieder derselben sey d, so wird das zweyte Glied derselben $a+d$, und das dritte $a+d+d$, das ist, $a+2d$, und das vierte $a+3d$, die Reihe also stehet folgender gestalt:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d,$$

und so fort. Steiget aber die Reihe unterwärts, das ist, ist das erste Glied grösser als das zweyte, und das zweyte grösser als das dritte, so kan man die Reihe am deutlichsten bezeichnen, wenn man setzet:

$$a, a-d, a-2d, a-3d, a-4d, a-5d$$

und so fort.

§. 72. Man siehet hieraus so gleich wie man aus dem ersten Glied einer Reihe und aus dem Unterschied der Glieder ein jedes Glied finden sol, dessen Entfernung von dem ersten gegeben ist. Gesetzt, wir wollen das fünfte Glied von dem ersten finden, so ist dasselbe $a+5d$; wenn die Reihe aufsteigt, und $a-5d$ wenn sie niedersteigt. Man muß also in dem ersten Fall den Unterschied fünfmal genommen, das ist $5d$, zu dem ersten Gliede a addiren: und in dem zweyten Fall von demselben subtrahiren, wenn man das fünfte Glied haben wil. So ist es in allen Fällen, und wenn also m überhaupt bedeutet, um wie viel Glieder dasjenige von dem ersten entfernet sey, welches man suchet, so ist das

 Glied,

XIII. Abschnitt. Glied, welches man suchet, $a+md$, oder $a-md$, nachdem die Reihe auf oder nieder steiget.

§. 73. Die Zahl m ist allezeit um eins kleiner als die Zahl aller Glieder der Reihe, zu welcher man das letzte suchet. Denn das zweyte Glied der Reihe $a+d$ ist das erste von a, das dritte ist das zweyte von a, und das vierte ist das dritte von a, und so fort. Wenn demnach die Zahl aller Glieder der Reihe durch n bedeutet wird, so ist $n-1=m$, und $n=m+1$. Es ist gar leicht in allen Fällen die eine dieser Zahlen an die Stelle der andern zu gebrauchen.

§. 74. Da nun also bey den Bedeutungen, welche wir angenommen und beständig in dieser Abhandlung gebrauchen werden $a+md$ das letzte Glied einer aufsteigenden Arithmetischen Reihe bedeutet, so kan $a+md-d$ nichts anders bedeuten, als das nächste Glied vor dem letzten, weil dieses kommt, wenn von dem letzten Glied der Unterschied d abgezogen wird, und das Glied vor diesen, oder das zweyte von dem letzten ist $a+md-2d$, das dritte von dem letzten $a+md-3d$, und so fort. Daß also wenn man nur die erstern und die letztern Glieder einer solchen Reihe bezeichnen wil, mit Auslassung der mittlern, man so schreiben muß:

$$a, a+d, a+2d, \ldots\ldots, a+md-2d, a+md-d, a+md$$

Und eben dieses kan auch eine niedersteigende Reihe bedeuten, wenn man das letzte Glied vor das erste hält, und die Glieder zurück zehlet.

§. 75. Hieraus aber siehet man so gleich in einem Blick, daß in einer jeden Arithmetischen Reihe die Summe des ersten und des letzten Gliedes so groß seyn müsse, als die Summe des zweyten und des nächsten an dem letzten, oder die Summe des dritten und des zweyten von dem letzten: ja daß überhaupt die Summe jeder zwey Glieder, die von den äussersten Gliedern der Reihe gleich weit entfernet sind, einer jeden andern dergleichen Summe gleich sind. Denn die Summe des ersten und letzten Gliedes ist $a+a+md=2a+md$, und die Summe des zweyten und des nächsten an dem letzten ist $a+d+a+md-d=2a+md$, und also so groß als die erstere. Die Summe der Glieder, welche zunächst auf diese folgen, ist $a+3d+a+md-3d=2a+md$, wie vorher. Man siehet, daß diese Summen deswegen gleich werden, weil dasjenige, was dem Gliede, welches von dem letzten zurück gezehlet worden, an $a+mb$ fehlet, durch dasjenige ersetzet wird, so das Glied, das man von a an vor sich gezehlet, über das a enthält. Eine klei-

kleine Ueberlegung desjenigen, so gezeiget worden ist, machet dieses klärer als viele Worte.

§. 76. Wenn man eine Arithmetische Reihe von dem ersten Glied nach dem letzten, und wieder von dem letzten nach dem ersten, fortführet, so daß man wechselsweise einem jeden Theil der Reihe ein Glied zusetzet; und also auf der einen Seite immer so viele Glieder machet, als auf der andern: so muß die Reihe endlich voll werden: und zwar kan dieses auf zweyerley Art geschehen. Es kan erstlich das letzte Glied der Reihe, welche von a anfängt und beständig aufsteiget, nach und nach so groß werden, daß es unmittelbar vor den ersten Glied des andern Theils der Reihe, welchen man von dem letzten Glied $a+md$ zurück geführet hat, vorher gehe, wie dieses geschiehet, wenn in der Reihe, die wir zum Exempel angenommen, m die Zahl 5 bedeutet, da dann die ganze Reihe sechs Glieder bekommt. In diesem Fall verwandelt sich diese Reihe in die nachfolgende:

$$a, a+d, a+2d, \quad . \; . \; . \quad a+3d, a+4d, a+5d,$$

und das erste Glied des letztern Theils derselben $a+3d$ folget unmittelbar auf das letzte Glied des erstern Theils $a+2d$.

§. 77. In einer dergleichen Reihe ist die Zahl aller Glieder nothwendig gerade, denn es stehen deren so viel in der einen Helfte von dem ersten Glied an, als in der andern Helfte stehen, die man von dem letzten Glied zurück geführet hat. Und wenn man demnach die Summe des ersten und letzten Gliedes, und aller übrigen machet, die von dem ersten Glied gleichweit entfernet sind, so bekommt man halb so viel dergleichen Summen, als Glieder in der ganzen Reihe sind. In unserm Exempel, da der Glieder an der Zahl sechse sind, sind der Summen drey. Da diese Summen einander gleich sind, darf man dieselbe nur durch die Zahl derselben, das ist, durch die Helfte der Zahl aller Glieder in der Reihe multipliciren, so bekommt man die Summe aller dieser Summen aus zwey und zwey Gliedern der Reihe, das ist, die Summe aller Glieder der ganzen Reihe. Und dieses ist die gemeine Regel, welche die Summen der Glieder Arithmetischer Reihen zu finden angegeben wird, deren Richtigkeit wir dergestalt in den Umständen gezeiget haben, wenn die Zahl der Glieder gerade ist. Man setzet das erste Glied der Reihe zu dem letzten, und multipliciret durch die Helfte der Zahl aller Glieder, so hat man die Summe. Es sey zum Exempel das erste Glied einer Arithmetischen Reihe 5, und der Unterschied 3. In dieser Reihe seyn 12 Glieder, so wird das letz-

XIII. Abschnitt.

te $5 + 11 \times 3 = 38$: die Summe des ersten und letzten Gliedes ist demnach $5 + 38 = 43$; diese Summe durch die Helfte von 12, das ist, durch 6 multipliciret, giebt 258, die Summe aller Glieder der Reihe.

§. 78. Es kan aber auch eine dergleichen Reihe, welche man von dem ersten Glied nach dem letzten, und zugleich von dem letzten nach dem ersten dergestalt fortgeführet hat, sich auf eine andere Art schliessen, indem nemlich das letzte Glied der vordern Helfte selbst, dem ersten Glied der hintern Helfte gleich wird. Dieses geschiehet allezeit, wenn m eine gerade Zahl bedeutet, und folgends die Zahl aller Glieder in der Reihe ungerade ist, wie in dem nachfolgenden Exempel:

$$a,\ a+d,\ a+2d\ \ldots\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d,$$

da das letzte Glied der ersten Helfte $a+2d$, dem ersten Glied der zweyten Helfte gleich ist. In diesem Falle ist das zweymal stehende Glied, als hier $a + 2d$ das mittelste unter allen: und weil alles dasjenige, so von den Summen zweyer Glieder, die von dem äussersten gleich weit abstehen, erwiesen worden ist, auch hier zutreffen muß; so ist das mittlere Glied zweymal $2a + 4d$ genommen, so groß als die Summe der äussern Glieder $a + a + 4d$. Und wil man die Summe aller Glieder der Reihe finden, so multiplicire man erstlich die Summe aller Glieder durch die Zahl m halb genommen, welche Zahl hier gerade, und um eines kleiner ist, als die Zahl aller Glieder, so hat man die Summe aller Glieder, ausser dem mittelsten: und wenn man also zu dieser Summe noch das mittelste Glied hinzu setzet, so erhält man die Summe aller Glieder überhaupt.

§. 79. Stellet man sich diese Rechnungsart etwas genauer vor, so findet man, daß sie mit der vorigen im Grunde überein komme, und nach eben den Regeln verrichtet werden könne. Es sey die Summe des ersten und des letzten Gliedes einer dergleichen Reihe s; so ist das mittelste Glied derselben $\frac{1}{2}s$, weil dieses Glied gedoppelt, der gedachten Summe gleich ist. Die Summe aller Glieder der Reihe ist demnach $\frac{1}{2}ms + \frac{1}{2}s$, nach der Regel, die wir XIII, 78 gegeben haben, welches Product man auch so schreiben kan: $\frac{m+1}{2} \times s$. Denn wenn man die Summe s würklich durch $\frac{m+1}{2} = \frac{m}{2} + \frac{1}{2}$ multipliciren wil, so muß man so wohl durch $\frac{m}{2}$ als durch $\frac{1}{2}$ multipliciren, XIII, 61, und dadurch erhält

erhält man $\frac{1}{2}ms + \frac{1}{2}s$. Es drucket also $\frac{m+1}{2} \times s$ die Summe aller Glieder der Reihe aus. Bedeutet aber n noch die Zahl aller Glieder der Reihe, wie wir dieses gleich Anfangs angenommen; so ist $m+1 = n$, und wenn man also das letztere an die Stelle des erstern schreibet, so wird die Summe aller Glieder der Reihe $\frac{n}{2} \times s$, das ist, die Summe aller Glieder wird gefunden, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes s durch die Helfte der Zahl der Glieder $\frac{n}{2}$ multipliciret; wie man dieses thun muß, wenn die Zahl aller Glieder gerade ist, XIII, 77.

§. 80. Es sey zum Exempel die Reihe, deren Summe man finden sol, nachfolgende 3, 5, 7 und so fort, bey welcher also $a = 3$ und $d = 2$, man sol die Summe von 13 Gliedern dieser Reihe finden, deren erstes die 3 ist; so ist $m = 12$, und das letzte Glied $a + md$ ist $3 + 24 = 27$, folgends die Summe des ersten und des letzten Gliedes $3 + 27 = 30$; dieses durch $\frac{13}{2}$, als die Zahl aller Glieder, multipliciret, giebet $\frac{13 \times 30}{2} = 13 \times 15 = 195$: dieses ist die Summe aller Glieder dieser Reihe.

Von den geometrischen Zahlreihen.

§. 81. Die zweyte Reihe, welche wir insonderheit zu betrachten haben, ist die geometrische. Sie wird wieder aus zwey Gliedern verfertiget, welche gegeben, oder nach Belieben angenommen seyn können. Aus diesen zwey Gliedern wird das dritte gemacht, wenn man demselben gegen das zweyte eben die Verhältniß giebet, welche das zweyte gegen das erste hat: so, daß das erste, das zweyte und das dritte Glied eine zusammenhangende oder stetige Proportion ausmachen. Auf eben die Art wird aus dem dritten Glied das vierte. Man macht nemlich das vierte Glied so groß, daß das dritte Glied sich zu demselben verhalte, wie sich das erste zu dem zweyten verhält, und so gehet man weiter fort. Daß demnach in einer geometrischen Reihe alle Glieder gegen diejenigen, welche in der Reihe unmittelbar auf dieselben folgen, einerley Verhältniß haben.

§. 82. Gesetzet, es bedeute a das erste Glied einer solchen Reihe, und b das zweyte, so wird das dritte $\frac{bb}{a}$, denn diese Zeichnung bedeu-

XIII. Abschnitt.

tet die vierte Proportionalgrösse zu a, b und b; und das vierte Glied wird $\frac{b^3}{a^2}$, welches die vierte Proportionalgrösse ist zu a, b, und dem dritten Gliede $\frac{b^2}{a}$. Das fünfte ist $\frac{b^4}{a^3}$ und so fort, VI, 117, daß demnach die Reihe folgendergestalt stehet:

$$a,\ b,\ \frac{b^2}{a},\ \frac{b^3}{a^2},\ \frac{b^4}{a^3},\ \frac{b^5}{a^4},\ \frac{b^6}{a^5},$$ und so weiter.

Es sey zum Exempel $a = 2$, $b = 3$, so ist die Reihe 2, 3, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{81}{8}$, $\frac{243}{16}$, $\frac{729}{32}$ und so weiter.

§. 83. Man siehet hieraus so gleich, daß ein jedes Glied einer geometrischen Reihe, welches von dem ersten um eine Zahl von Gliedern entfernet ist, die man sich unter m vorstellen kan, nachfolgenderstalt ausgedrucket werden könne: $\frac{b^m}{a^{m-1}}$. Stehet nemlich m vor die Einheit, und wil man also das nächste Glied nach dem ersten haben, welches vom Anfang der Reihe das zweyte ist, so ist dasselbe $\frac{b^1}{a^{1-1}} = \frac{b}{a^0} = \frac{b}{1} = b$. Vor das dritte, vom Anfang der Reihe ist $m = 2$, und es wird also $\frac{b^m}{a^{m-1}}$ nunmehro $\frac{b^2}{a^{2-1}} = \frac{b^2}{a}$. Eben so wird das fünfte Glied von dem ersten gefunden, wenn man vor m in der allgemeinen Bezeichnung $\frac{b^m}{a^{m-1}}$ die Zahl 5 setzet. Dadurch wird dieses Glied $\frac{b^5}{a^4}$, und $\frac{b^5}{a^4}$ bedeutet also das fünfte Glied von dem ersten, oder überhaupt das sechste Glied einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied durch a, und das zweyte durch b bezeichnet wird. Man findet also nach dieser Regel ein jedes Glied der Reihe, wenn die zwey ersten Glieder derselben gegeben sind, und angezeiget wird, um wie viele Glieder dasjenige, so zu finden ist, von dem ersten abstehe.

§. 84. Man kan sich auch nachfolgender Anweisung bedienen, aus etlichen Gliedern einer geometrischen Reihe das nachfolgende heraus zu bringen, und also die Reihe so weit fortzusetzen, als man will. Gesetzt,

A sey

A sey das erste Glied der Reihe, und B das zweyte. C aber sey ein jedes anderes Glied eben der Reihe, das dritte, vierte, fünfte, und so fort, oder auch das zweyte. Man nehme den Unterschied der ersten zwey Glieder A — B, oder B — A, und suche zu dem ersten Gliede A, zu diesem Unterschied, und zu dem Gliede C, die vierte Proportionalzahl. Diese ist der Unterschied des Gliedes C von demjenigen, so in der Reihe zu nächst auf C folget. Und wenn man also diesen Unterschied zu dem Gliede C hinzu setzet, oder von demselben abziehet, nachdem die Reihe steiget oder fället, so erhält man das auf C folgende Glied der Reihe, welches wir mit D bezeichnen wollen. Da in einer solchen Reihe man ein jedes Glied vor das erste annehmen kan; so siehet man, daß man vor A ein jedes Glied der Reihe, und vor B dasjenige nehmen könne, so zu nächst darauf folget.

§. 85. Es sey das erste Glied der Reihe 8, das zweyte 12; so ist der Unterschied dieser Glieder 4. Man sage, wie das erste Glied 8 zu diesem Unterschied 4, so die zweyte 12 zu 6; diese 6 setze man zu dem zweyten Gliede hinzu, so erhält man das dritte Glied der Reihe 18. Ferner sage man, wie 8 zu 4, so das dritte Glied 18 zu 9 dem Unterschied des dritten und vierten. Dieser Unterschied giebet mit dem dritten Gliede das vierte Glied der Reihe 27, und eben so erhält man das fünfte $40\frac{1}{2}$, und die folgenden. Steiget die Reihe niederwärts, und ist das erste Glied derselben 18, das zweyte 12, und folgends der Unterschied dieser Glieder 6: so sage man, wie 18 zu 6, das ist, wie 3 zu 1, so das zweyte Glied 12 zu 4; diese Zahl von dem zweyten Gliede abgezogen, läst 8, das dritte Glied der Reihe. Auf eben die Art findet man aus dem dritten Gliede das vierte, und so fort.

§. 86. Die Richtigkeit dieser Anweisung ist gar leicht einzusehen, wenn man sich unter A, B, C, D noch eben dergleichen Zahlen vorstellet, als wir diese Buchstaben im vorhergehenden haben bedeuten lassen: so ist, wenn die Reihe steiget, $A : B - A = C : D - C$; folgends VI, 80 das erste Glied dieser Proportion zu der Summe des ersten und des zweyten, wie das dritte zu der Summe des dritten und vierten, das ist, $A : B = C : D$. Fället aber die Reihe, indem sie fortgehet, so ist $A : A - B = C : C - D$. Spricht man nun hier VI, 89, wie das erste Glied A zu dem Unterschied des ersten und zweyten Gliedes der Proportion $A - A + B$, so das dritte C, zu dem Unterschied des dritten und vierten $C - C + D$; so erhält man wieder

A : B

XIII. Abschnitt. $A:B=C:D$. Es wird demnach die Reihe, so fortgesetzet, daß das Glied D, welches zu nächst auf C folget, gegen das Glied C sich so verhält, wie das zweyte Glied der Reihe B gegen dem ersten. Sie muß also XIII, 81 nothwendig eine geometrische Reihe werden.

Geometrische Reihen zu summiren.

§. 87. Was aber die Summen der Glieder der geometrischen Reihen anlanget, so kan uns nachfolgende Betrachtung zu deren Erfindung leiten. Es haben in einer geometrischen Reihe alle Glieder gegen dasjenige, so unmittelbar auf dieselben folgen, einerley Verhältniß; und wenn man also die Glieder, wie folget, unter einander setzet:

$$\begin{array}{ccc} a & : & b \\ b & : & \frac{bb}{a} \\ \frac{bb}{a} & : & \frac{b^3}{a^2} \\ \frac{b^3}{a^2} & : & \frac{b^4}{a^3} \end{array}$$

so sind diese Verhältnisse alle gleich; und es verhält sich also die Summe aller ersten Glieder $a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2}$ zu der Summe aller letztern $b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3}$, wie sich a zu b verhält, VI, 103. Die erstere Summe ist die Summe aller Glieder der Reihe ausser dem letzten, und die letzte Summe ist die Summe aller Glieder der Reihe ausser dem ersten. Demnach verhält sich in einer jeden geometrischen Reihe das erste Glied zu dem zweyten, wie die Summe aller Glieder der Reihe ausser dem letzten, zu der Summe aller Glieder ausser dem ersten.

§. 88. Man bezeichne die Summe aller Glieder mit s, und das letzte Glied der Reihe, welches wir sonst mit $\frac{b^m}{a^{m-1}}$ bezeichnet haben, stelle man sich der Kürze halben unter u vor; behalte aber die Bedeutung der a und b, so wird die Proportion, welche eben mit Worten ausgedrucket ist, durch diese Zeichen also müssen ausgedrucket werden: $a : b = s - u : s - a$: und wenn man die erstern Glieder dieser Proportion von den letztern abziehet, so wird VI, 89 $b - a : a = s - a - s$

$a - s + u : s - u$, das ist, $b - a : a = u - a : s - u$. Es ist Demnach $\frac{u-a}{b-a} + a = s - u$, und folgends $\frac{u-a}{b-a} + a + u = s$.

XIII. Abschnitt.

§. 89. Hieraus lässt sich die Summe aller Glieder einer Progression s finden, wenn die ersten zwey Glieder derselben a und b, zusamt der Zahl der Glieder, deren Summe man suchet, gegeben ist. Denn aus diesen Zahlen kan man das letzte Glied u finden, und hat man dieses, so hat man alles, was zur Erfindung der Summe nöthig ist. Die Regel, welche wir eben durch Zeichen ausgedrücket haben, weiset die Rechnungsarten, welche dazu erfordert werden, deutlich. Es sey in einer Progression $a = 1$, und $b = 5$, man wil die Summe der fünf erstern Glieder derselben haben, so ist $u = \frac{b^4}{a^3} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{1 \times 1 \times 1} = 625$, und $u - a = 624$, $b - a = 4$, und folgends $\frac{u-a}{b-a} \times a = \times \frac{624}{4} = 156$, und wenn man demnach noch das letzte Glied hinzu setzet, so wird die Summe der Glieder, welche man suchte $= 781$.

§. 90. Wil man bequem und ohne vieles Nachsinnen rechnen, so muß in der Reihe, deren Summe man finden sol, das zweyte Glied grösser seyn als das erste, weil man angenommen, daß sich dieses von einem abziehen lasse. Und man thut besser, wenn man vor solche Reihen, bey welchen die Glieder immer kleiner werden, die Regel etwas anders setzet. Wenn man nemlich wieder die Proportion annimmt, welche XIII, 84. erwiesen worden $a : b = s - u : s - a$, und ziehet nunmehro die letztern Glieder von den erstern ab, so bekommt man $a - b : a = s - u - s + a : s - u$, das ist $a - b : a = a - u : s - u$, folgends ist hier $\frac{a-u}{a-b} \times a = s - u$, und demnach $\frac{a-b}{a-b} \times a \times u = s$. Vergleichet man diese Regel mit der vorigen, so findet man, daß beide zugleich ausgedruckt werden, wenn man saget: man müsse zu dem Unterschiede des ersten und zweyten Gliedes $b - a$, oder $a - b$ zu dem Unterschiede des ersten und letzten Gliedes $u - a$ oder $a - u$, und zu dem ersten Glied a die vierte Proportionalzahl finden, und derselben noch das letzte Glied u zusetzen, damit man die Summe aller Glieder s erhalte.

§. 91. Es sey zum Exempel die Reihe, welche zu summiren ist

XIII. Abschnitt. von 5 Gliedern, und das erste Glied derselben sey $5 = a$, das zweyte $1 = b$, so wird das letzte $\frac{b^4}{a^3} = \frac{1}{125}$, und demnach $a - u = 5 - \frac{1}{125}$ $= \frac{625 - 1}{125} = \frac{624}{125}$, und $a - b = 5 - 1$ das ist 4, demnach $\frac{a - u}{a - b} \times a$ $= \frac{624 \times 5}{125 \times 4} = \frac{156 \times 5}{125} = \frac{780}{125}$. Setzet man nun hierzu noch das letzte Glied $\frac{1}{125}$, so kommt die Summe aller Glieder der Reihe, welche demnach nachfolgende ist $\frac{781}{125}$ oder $6\frac{31}{125}$.

§. 92. Es ist bey dergleichen Reihen das letzte Glied allezeit in Ansehung der erstern und der Summe klein, insonderheit, wenn die Reihe geschwinde absteiget, das ist, wenn das erste Glied in Ansehung des zweyten groß ist, und wenn der Glieder gar viele sind. In derjenigen Reihe, welche wir eben zum Exempel angenommen haben, war das fünfte Glied schon $\frac{1}{125}$, da das erste 5 war, weil nemlich das zweyte Glied 1 in Ansehung des ersten merklich klein ist. Wie sehr klein muß denn also das hunderste Glied einer solchen Reihe seyn? In diesem Falle also kan man die Summe ohne merklichen Fehler finden, wenn man das letzte Glied gar wegläßet, oder wenn man dasselbe als gar nichts ansiehet. Nimmt man dieses an, so wird die Regul, nach welcher die Summe aller Glieder einer solchen Reihe gefunden wird $\frac{a - u}{a - b} \times a + u = s$, in die nachfolgende verwandelt $\frac{a \quad a}{a - b} = s$, und die Summe alle Glieder der Reihe s ist die dritte Proportionalzahl zu dem Unterschiede der zwey ersten Glieder der Reihe $a - b$ und zu dem ersten Gliede derselben a.

§. 93. Wir wollen nach dieser Regul unser voriges Exempel rechnen. Es war in demselben $a - b = 4$ und $a = 5$, und es ist demnach $s = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$. Nach der genauen Regul war $s = 6\frac{31}{125}$, welches so viel ist als $6\frac{1}{4\frac{1}{31}}$, woraus man siehet, wie gering der Fehler sey, welchen man, auch bey so wenigen Gliedern begehet, und also die Kleinigkeit desselben bey den Umständen, wenn entweder der Glieder der Reihe gar sehr viele sind, oder wenn dieselbe sehr stark abnehmen, gar leicht ermessen kan. Wenn in der geometrischen Reihe, die sich mit 5, 1 anfängt, hundert Glieder wären, so wäre $\frac{aa}{a-b}$ oder $\frac{25}{4}$ der

wah-

wahren Summe gar sehr nahe, noch näher aber, wenn der Glieder tausend wären, ungemein näher, wenn ihrer eine Million wäre, und so fort. XIII. Abschnitt.

§. 94. Indessen fehlet man bey dieser Art Rechnung immer um eine Kleinigkeit, und zwar ist dieser Fehler der Unterschied der wahren Summe $\frac{a-u}{a-b}\times a+u$ und dasjenige, so man vor die Summe angenommen $\frac{aa}{a-b}$, und wenn man das erstere von dem letztern abziehet, so hat man diesen Fehler. Dieses zu verrichten, muß man diese Zahlen in Brüche von einerley Benennung verwandeln, welches geschiehet, wenn man in der erstern u durch $a-b$ multipliciret II, 19. Sie wird dadurch $\frac{aa-au+au-bu}{a-b}$, das ist, weil $au-+au=0$, so ist die rechte Summe $\frac{aa-bu.}{a-b}$ Diese nun von derjenigen, welche wir davor angenommen $\frac{aa}{a-b}$, abgezogen, lässet $\frac{aa-aa+bu}{a-b}$, das ist $\frac{bu}{a-b}$. Es verhält sich also der Unterschied der zwey ersten Glieder $a-b$ zu dem zweyten Gliede b, wie das letzte Glied u zu dem Fehler um welchen man zu viel genommen, indem man $\frac{aa}{a-b}$ vor die Summe aller Glieder der Reihe gesetzet hat: woraus man vollkommen sehen kan, wie gar sehr klein dieser Fehler bey den gesetzten Umständen seyn müsse. In unserm Exempel, da $a-b=4$, $b=1$ und $u=\frac{1}{125}$, ist der Fehler $\frac{1}{4\times125}=\frac{1}{500}$, welches mit dem vorigen überein kommt. Denn wenn man von $6\frac{1}{4}$ diesen Fehler $\frac{1}{500}$ abziehet, so bleibt $6\frac{124}{500}$, welches so viel ist als $6\frac{31}{125}$, wie vorher XIII, 88. gefunden worden.

§. 95. Es ist also, wenn wir diesen kleinen Fehler bey den bestimmten Umständen verachten $\frac{aa}{a-b}$ allezeit der Reihe $a+b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{a^2}$ + &c. ohne merklichen Fehler gleich, wie viele Glieder derselben

 man

XIII. Abschnitt. man auch annehmen wil, und wenn man beiderseits durch eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl n multipliciret, so wird auch $n.\frac{aa}{a-b}$ der Reihe $na + nb + \frac{nb^2}{a} + \frac{nb^3}{a^2} + \&c.$ ohne sonderlichen Fehler gleich. Man kan allezeit eines vor das andere setzen: den Bruch vor die Reihe, und die Reihe vor den Bruch.

§. 96. Es kommen zuweilen auch dergleichen geometrische Reihen vor, bey welchen die Zeichen der Glieder abwechseln, als $a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} - \frac{b^5}{a^4}$ und so fort. Die Summirung der Glieder solcher Reihen kan man aus den gegebenen Reguln unmittelbar herleiten. Denn wenn man nur in denselben vor $+b$ setzet $-b$, so hat man die Reguln, nach welchen dergleichen Reihen berechnet werden müssen. Weil aber dieses bey denjenigen, vor welche wir schreiben, noch vielleicht einige Schwierigkeit lassen dörfte, so wollen wir die Gründe davon auf eine andere Art, aus demjenigen herleiten, so gewiesen worden ist. Wir bemerken zu dem Ende, daß, wenn man die Glieder einer geometrischen Reihe wechselsweise nimmet, nemlich das erste a, das dritte $\frac{b^2}{a}$, das fünfte $\frac{b^4}{a^3}$ und so fort: Diese Glieder wieder eine geometrische Reihe geben; und daß eben dieses geschehe, wenn man das zweyte Glied b und das vierte $\frac{b^3}{a^2}$, und das sechste $\frac{b^5}{a^4}$ und so fort annimmet. Die zwo Reihen, die auf diese Art aus der gegebenen entsprungen sind, sind diese:

$$a. \quad \frac{b^2}{a} \quad \frac{b^4}{a^3} \quad \frac{b^6}{a^5} \text{ und s. w.}$$

$$b. \quad \frac{b^3}{a^2} \quad \frac{b^5}{a^4} \quad \frac{b^7}{a^6} \text{ und so fort.}$$

Man siehet leicht, daß dieses geometrische Reihen sind, und zwar am allerleichtesten, wenn man betrachtet, daß jedes Glied einer jeden dieser Reihe entstehet, wenn man dasjenige, so unmittelbar vorher gehet mit $\frac{b^2}{a^2}$ multipliciret, das ist, wenn man zu aa, bb und dem vorherge-

henden Glied die vierte Proportionalgrösse suchet. Auf die Art wird $\frac{b^2}{a}$ aus a, und $\frac{b^3}{a^2}$ aus b, und so weiter. Es hat demnach ein jedes Glied dieser Reihen gegen dasjenige, so unmittelbar auf dasselbe folget, die Verhältniß, welche $aa : bb$ hat.

XIII. Abschnitt.

§. 97. Und hieraus schliessen wir, daß die Summe aller Glieder einer solchen geometrischen Reihe, in welcher die Zeichen + und — beständig abwechseln, als $a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3}$ und so fort, dem Unterschied der Summe der Glieder dieser zwo Reihen $a + \frac{b^2}{a} + \frac{b^4}{a^3}$, und $b + \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^5}{a^4}$ &c. gleich sey, und dieses siehet man so gleich aus der Betrachtung dieser Reihen. Man darf also nur nach den gegebenen Regeln die eine und die andere dieser Summen berechnen, und so dann die letzte von der ersten abziehen. Wir erachten nicht nöthig, uns hiebey auf etwas weiters einzulassen, als daß wir zeigen, wie in dem Fall zu verfahren ist, wenn die Reihe absteiget, und deren letztes Glied so klein ist, daß man es vor nichts halten kan.

§. 98. In diesem Falle verhält sich der Unterschied der zwey ersten Glieder der Reihe zu dem ersten, wie das erste zur Summe, XIII, 91. und demnach ist die Summe aller Glieder der Reihe $a + \frac{b^2}{a} + \frac{b^4}{a^3} + \frac{b^6}{a^5}$ und so fort, bis man das letzte Glied vor nichts halten kan, diese $\frac{aa}{a - \frac{b^2}{a}}$. Wenn man aber den Zehler und Nenner durch a multipliciret, so wird diese Summe $\frac{a^3}{a^2 - b^2}$. Die Summe der zweyten Reihe $b + \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^5}{a^4}$ wird durch einen eben dergleichen Schluß gefunden. Man muß sagen, wie der Unterschied des ersten und zweyten Gliedes $b - \frac{b^3}{a^2}$ zu dem ersten Gliede b, so das erste Glied b zur Summe, und diese ist demnach

XIII. Abschnitt. $\frac{bb}{b - \frac{b^3}{a^2}}$. Und multipliciret man hier den Zehler und Nenner durch a^2, so wird diese Summe $\frac{a^2 b^2}{a^2 b - b^3}$; oder wenn man beede Glieder durch b dividiret, so wird eben diese Summe also ausgedrückt $\frac{a^2 b}{a^2 - b^2}$. Ziehet man nun diese leztere Summe von der erstern ab, so bekommet man die Summe der Glieder der Reihe mit abwechselnden Zeichen, $a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2}$ und so fort, und diese Summe ist demnach $\frac{a^3}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 b}{a^2 - b^2}$, das ist, weil die Nenner einerley sind, $\frac{a^3 - a^2 b}{a^2 - b^2}$.

§. 99. Der Zehler in dieser Regel $a^3 - a^2 b$ ist ein Product aus den zwo Zahlen a^2 und $a - b$, wie man leicht siehet. Und der Nenner kan durch die Multiplication dieser zwo Zahlen $a + b$ und $a - b$ entstehen. XIII, 65. Zerfället man also die Glieder dieses Bruchs $\frac{a^3 - a^2 b}{a^2 - b^2}$ welcher die Summe aller Glieder der Reihe ausdrücket, so wir betrachten, in die Zahlen aus deren Multiplication sie entstanden sind; so wird diese Summe also ausgedrückt $\frac{a^2 \times \overline{a - b}}{\overline{a + b} \times \overline{a - b}}$. Und wenn man die Glieder beyde durch $\overline{a - b}$ dividiret, so zeigt sich die Summe, welche wir suchen aufs kürzeste folgender gestalt $\frac{a^2}{a + b}$ und es verhält sich die Summe des ersten und zweyten Gliedes einer Reihe, deren Glieder bey abwechselnden Zeichen +, — immer kleiner werden, indem sie sich von dem ersten entfernen, zu dem ersten Gliede; wie dieses erste Glied zu einer vierten Zahl, welche der Summe aller Glieder der Reihe desto näher kommet, je mehr der Glieder an der Zahl sind, und je geschwinder sie absteigen.

§. 100. Es sey zum Exempel die Reihe diese nachfolgende: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$, und so fort, man wil die Summe von den hundert ersten Gliedern derselben ohne sonderlichen Fehler haben, so ist

$a -$

$a=1$, $b=\frac{1}{2}$, und $a+b=\frac{3}{2}$, demnach die Summe $\frac{a^2}{a+b}=\frac{2}{3}$. Und diesem Bruch $\frac{2}{3}$ kommt die Summe der Reihe noch näher, wenn man die tausend erstern Glieder derselben nimt, und so fort. Nemlich die Summe der zwey erstern Glieder der Reihe $1-\frac{1}{2}$ ist $=\frac{1}{2}$, und das dritte Glied $\frac{1}{4}$ dazu, giebt $\frac{3}{4}$ oder $\frac{6}{8}$. Ziehet man hievon das vierte Glied $\frac{1}{8}$ ab, so bleibt $\frac{5}{8}$ oder $\frac{10}{16}$, und das fünfte dazu giebt $\frac{11}{16}$. Dieses ist von $\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$ schon nicht sehr verschieden, und dieser Unterschied wird immer kleiner, je weiter man gehet.

§. 101. Und so viel von den Summen der Glieder der geometrischen Reihen. Es ist übrig, daß wir zeigen, wie aus jeden zwey Gliedern einer solchen Reihe, deren Entfernung von einander bekannt ist, ein jedes anderes Glied zu finden sey, welches von dem ersten Glied der Reihe um so viel Glieder entfernet ist, als man wil. Es sey eine Reihe, deren erstes Glied 1; und das achte 128 ist, wie groß ist das fünfte Glied dieser Reihe, oder das eilfte? Wie diese und dergleichen Fragen zu beantworten sind, haben wir noch zu weisen. So trocken auch diese Abhandlung scheinen mag, so ist sie doch von ganz ungemeinen Nutzen, und wir sind dem grossen Newton, welcher uns hiezu eine gar bequeme Anweisung gegeben hat, auch davor vielen Dank schuldig.

Wie oft eine beliebige Zahl von zweyerley Buchstaben versetzet werden könne.

§. 102. Wir werden uns bemühen die Gründe dieser Anweisung so kurz und deutlich zu zeigen, als uns möglich ist. Wir müssen aber einige kleine Betrachtungen von der Versetzung zweyerley Buchstaben oder anderer Dinge machen, ehe wir uns würklich dazu wenden können. Es seyn die zween Buchstaben, welche zusammen zu setzen sind a und b, man sol a so wohl als b so oft nehmen als man wil, a zum Beyspiel ein mal und b zwey mal, und dieselbe folgender gestalt abb, bba, bab zusammen setzen. Die Frage ist, wie oft dieses bey einer jeden angenommenen Zahl des Buchstabens a, und bey jeder angenommenen Zahl des Buchstabens b geschehen könne, und wie viele verschiedene Ordnungen der Buchstaben man dadurch heraus bringe? Wird a nur ein mal und b zwey mal gesetzet, so siehet man leicht, daß sich diese Buchstaben nach nicht mehr verschiedenen Arten zusammen setzen lassen, als nach den dreyen, die wir eben hergesetzt abb, bba, bab.

XIII. Abschnitt.

Wie ist es aber, wenn der *a* zwey, drey, vier oder mehrere sind, wie auch der *b*?

§. 103. Diese Frage leicht zu beantworten bemerken wir erstlich, daß eine jede Ordnung von Buchstaben von der Art derjenigen, die wir betrachten, als *ababba*, aus einer jeden andern Ordnung von eben so vielen Buchstaben entstehen könne, in welcher vor ein *b* der gegenwärtigen Ordnung ein *a* stehet, weil man nemlich vor ein jedes solches *a* wieder das *b* setzen kan. Diese Ordnungen sind: *aaabba*, *abaaba*, *ababaa*. Wenn man in der ersten dieser Ordnungen vor das zweyte *a*, oder in der zweyten vor das dritte *a*, ein *b* setzet; wie auch, wenn man in der dritten in die Stelle des dritten *a* ein *b* bringet, so erhält man immer die erst gegebene Ordnung der Buchstaben *ababba*.

§. 104. Die Anwendung dieses Satzes wird erleichtert, wenn wir ihn also ausdrücken: Eine jede Ordnung von zween Buchstaben *ababba*, kan durch die Verwechselung eines einzigen *a* mit einem *b* aus so viel andern Ordnungen eben so vieler *a*, *b*, deren jede aber ein *b* weniger hat, entstehen, als vielmal in der ersten *b* enthalten ist. Nemlich da in der Ordnung, die wir zum Exempel angenommen haben, der Buchstabe *b* drey mal stehet, übrigens aber dieselbe überhaupt sechs Buchstaben hat, so kan dieselbe aus drey Ordnungen von sechs Buchstaben, unter welchen sich aber nur zwey *b* befinden, heraus gebracht werden, welche diese sind: *aaabba*, *abaaba*, *ababaa*. Man siehet leicht, daß dieses mit andern Worten eben das sage, so wir eben gewiesen haben.

§. 105. Zweytens bemerken wir, daß aus einer jeden Ordnung zweyer Buchstaben *aabbaa* eine andere Ordnung von eben so vielen Buchstaben, unter welchen aber ein *b* mehr anzutreffen ist, als in der vorigen, so oft könne heraus gebracht werden, als oft in derselben *a* anzutreffen ist. Und dieses deswegen, weil man vor jedes *a* der gegebenen Ordnung ein *b* setzen kan. Es können aus der Ordnung der vier *a*, und zwey *b* welche wir angenommen haben, nachfolgende vier Ordnungen von dreyen *b* und dreyen *a* gemacht werden: *babbaa*, *abbbaa*, *aabbba*, *aabbab*.

§. 106. Es seyn nunmehro fünf Buchstaben zusammen zu setzen, von zweyerley Benennungen *a* und *b*, so siehet man so gleich, daß, wenn man blosse fünf *a* und gar kein *b* nehmen wil, man aus denselben nicht mehr als eine einzige Ordnung heraus bringen könne, nemlich

diese

diese *aaaaa*. Und dieses ist richtig, es mag die Zahl aller Buchstaben so groß oder so klein seyn als man wil. Die Ordnung, welche man aus zwanzig *a* an einander gesetzt, machen kan, ist ebenfals nur eine einzige. Denn es wird gesetzt, daß man ein *a* von dem andern, und ein *b* von dem andern nicht unterscheide.

§. 107. Wil man aus dieser Ordnung *aaaaa* eine andere machen, in welcher noch fünf Buchstaben, aber unter derselben ein *b* vorkommt: so kan vermöge des Satzes XIII, 105. dieses so oft geschehen, als viel mal in dieser Ordnung *a* vorkommt, das ist, so viel mal, als viele Buchstaben in derselben stehen, weil man an die Stelle eines jeden *a* ein *b* setzen kan. Dadurch kommen diese fünf Ordnungen

baaaa
abaaa
aabaa
aaaba
aaaab. Und man siehet überhaupt, daß, wenn man sich die Zahl der Buchstaben, deren hier fünfe sind, unter den Buchstaben *n* vorstellet, welcher eine jede Zahl bedeuten kan: die Zahl der Ordnungen, die aus einem *b* und einer Zahl der *a*, die um eins kleiner ist als *n*, gemacht werden können, allezeit der *n* gleich seyn werde.

§. 108. Aus einer jeden dieser fünf Ordnungen kan man nun andere machen, welche zwey *b* und nur drey *a* enthalten. Und zwar, weil in jeder der vorstehenden Ordnungen vier *a* stehen, so giebt eine jede derselben vier Ordnungen von drey *a* und zwey *b*. XIII, 105. Die beystehende Tafel weiset deutlich wie dieses zu verrichten sey. Die vorigen fünf Ordnungen stehen oben, und diejenigen, die aus einer jeden heraus gebracht werden, unter denselben:

baaaa	*abaaa*	*aabaa*	*aaaba*	*aaaab*
bbaaa	*bbaaa*	*babaa*	*baaba*	*baaab*
babaa	*abbaa*	*abbaa*	*ababa*	*abaab*
baaba	*ababa*	*aabba*	*aabba*	*aabab*
baaab	*abaab*	*aabab*	*aaabb*	*aaabb*

Wil man demnach die Zahl aller dieser Ordnungen, in welchen *b* zweymal vorkommt, geschwind haben, so multiplicire man die Zahl der Ordnungen, in welchen ein *b* vorkommet, 5, durch die Zahl der *a* welche in diesen Ordnungen vorkommen, welche allezeit um 1 kleiner und also hier 4 ist, so ist 5×4 die Zahl aller Ordnungen, in welchen *a* drey mal

 und

XIII. Abschnitt.

und b zwey mal vorkommt, welche wir dergestalt heraus gebracht haben. Wir werden aber so gleich sehen, daß noch etwas bey dieser Rechnung zu bessern sey. Indessen siehet man nach einem kleinem Nachdenken, daß dieses überall statt haben müsse. Und da wir gesehen, daß, wenn n immer die Zahl der Buchstaben einer jeden Ordnung bedeutet, eben diese Zahl n auch die Zahl der Ordnungen sey, in welchen nur ein b anzutreffen ist, und da die Zahl der a in diesen Ordnungen nothwendig $n-1$ ist; so ist beständig die Zahl aller Ordnungen von eben so vielen Buchstaben, unter welchen aber zwey b vorkommen, wie wir sie zur Zeit heraus gebracht, dem Product $n \times \overline{n-1}$ gleich.

§. 109. Allein wenn wir einen Blick auf die Tafel XIII, 8. zurück werfen, in welcher wir alle Ordnungen dreyer a und zweyer b vorgestellet haben, so sehen wir, daß diese Ordnungen nicht alle verschieden sind: sondern daß in der Tafel eine jede Ordnung zwey mal vorkomme. Und aus dem vorhergehenden kan uns leicht beyfallen, warum dieses geschehen müsse. Da diese Ordnungen von zweyen b und dreyen a aus den erstern, in welchen nur ein b vorkommt, gemacht worden sind; so ist jede Ordnung so oft heraus gebracht worden, als oft in derselben b stehet, nemlich zwey mal XIII, 104. Wil man also nur die Zahl derjenigen Ordnungen haben, die von einander verschieden sind, um welche es uns auch eigentlich zu thun ist; so muß man die vorige Zahl durch 2 theilen. Es wird also in unserm Exempel die eigentliche Zahl der verschiedenen Ordnungen $5 \times \frac{4}{2} = 10$, und überhaupt $n \times \frac{\overline{n-1}}{2}$.

Diese verschiedene Ordnungen sind nachstehende:

bbaaa			
babaa	abbaa		
baaba	ababa	aabba	
baaab	abaab	aabab	aaabb

§. 110. Es wäre zu weitläuftig, wenn wir die folgende Ordnungen, in welchen immer ein b mehr und ein a weniger vorkommt, ebenfals alle würklich darstellen wolten. Wir haben das bisherige nur zum deutlichern Verstand angebracht, und können nunmehro leicht schliessen, daß aus einer jeden der gefundenen Ordnungen dreyer a und zweyer b wir drey Ordnungen machen können, in welchen drey b vorkommen, weil wir nemlich vor ein jedes a einer jeden der letzt gefundenen

nen Ordnungen ein *b* setzen können. XIII, 105. Dadurch wird die Zahl aller Ordnungen dreyer *b* und zweyer *a*, die gefundene $5 \times \frac{4}{2}$ dreymal, das ist $5 \times \frac{4}{2} \times 3$. Oder überhaupt: $n \times \frac{n-1}{2} \times n-2$. Da aber in den Ordnungen, welche dergestalt heraus gebracht werden, das *b* dreymal vorkommt, so kan eine jede derselben aus drey Ordnungen, in welchen zwey *b* vorkommen, gemacht werden, oder drey verschiedene Ordnungen, in welchen zwey *b* vorkommen, geben allemal bey dieser Art die Ordnungen hervor zu bringen, nur eine Ordnung, in welcher *b* dreymal vorkommt. XIII, 104. Es ist demnach die Zahl der wahrhaftig verschiedenen Ordnungen, in welchen drey *b* vorkommen, dreymal kleiner, als die Zahl welche gefunden worden $5 \times \frac{4}{2} \times 3$ oder überhaupt $n \times \frac{n-1}{2} \times n-2$, und man muß diese Zahl durch 3 theilen, wenn man die Zahl der verschiedenen Ordnungen dieser Art haben will. Sie wird dadurch in unserm Exempel $5 \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} = 10$, und überhaupt in allen möglichen Fällen $n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$.

§. 111. Aus einer jeden Ordnung zweyer *a* und dreyer *b*, dergleichen diese ist: *aabbb*, können nunmehro wieder zwey Ordnungen von einem einzigen *a* und vieren *b*, gemacht werden; und es kommt demnach überhaupt die Zahl aller Ordnungen eines *a* und vierer *b*, die dergestalt heraus gebracht werden können, wenn in unserm Exempel die vorige Zahl $5 \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3}$ noch durch 2, oder überhaupt $n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, durch $n-3$ multipliciret wird. Allein da in diesen Ordnungen das *b* viermal vorkommt, so kommen je vier und vier dieser Ordnungen vollkommen mit einander überein, und geben nur eine Ordnung von vier *b* und einem *a*. Die durch die angewiesene Multiplication gefundene Zahl ist also viermal zu groß, wenn von solchen Ordnungen die Rede ist, die würklich von einander unterschieden sind. Dieses zu vermeiden, multiplicire man in unserm Exempel nicht durch 2, sondern durch $\frac{2}{4}$, und überhaupt nicht durch $n-3$, sondern durch $\frac{n-3}{4}$, so wird die richtige Zahl der Ordnungen, in welchen vier *b* anzutreffen sind, $5 \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} = 5$, oder überhaupt $n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$.

§. 112. Nach eben diesen Reguln muß man fortfahren, wenn

XIII. Abschnitt.

man die Zahl der Ordnungen finden wil, in welchen noch ein b mehr und ein a weniger stehet, als vorher. Unter den Ordnungen von einem a und vier b, deren Zahl wir bereits gefunden haben, ist diese $abbbb$. An die Stelle eines jeden a kan man b setzen, und weil nur ein a vorhanden ist, so können der Ordnungen, in welchen b fünfmal stehet, nur so viele heraus gebracht werden, als viele der Ordnungen von vier b, und einem a sind. Diesem zu folge wäre die ganze Zahl aller Ordnungen, in welchen fünf b und kein a anzutreffen, die Zahl der vorigen von vier b $5 \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4}$ durch 1 multipliciret. Weil aber in diesen Ordnungen fünf b vorkommen, so geben fünf der vorigen Ordnungen nur eine der gegenwärtigen, und man muß nicht durch 1 sondern $\frac{1}{5}$ multipliciren, wenn man die eigentliche Zahl der verschiedenen Ordnungen, die aus fünf b gemacht werden können, haben wil. Es wird demnach diese Zahl $\frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{5}$, das ist 1, und man siehet vor sich leicht, daß dieses seine Richtigkeit habe, weil man die Ordnung $bbbbb$ nicht verändern kan. Ueberhaupt aber wird die Zahl der verschiedenen Ordnungen der Buchstaben a und b, wenn unter denselben fünf b vorkommen, und folgends $n-5$ die Zahl der a ausdrücket, diese: $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5}$. Und dieses ist hinlänglich einzusehen, wie diese Regul weiter fortzusetzen ist.

§. 113. Wir können diese Sache, nachdem die Gründe davon, wie wir hoffen, nunmehro vollkommen klar sind, auch kürzer fassen. Es sey in einer beliebigen Menge von zweyerley Buchstaben a und b, die Zahl aller Buchstaben, wie bishero immer, n, und die Zahl der b in dieser Menge sey m: so ist die Zahl der a welche in derselben befindlich sind $n-m$. Die Zahl aller Ordnungen aber, welche man den Buchstaben geben kan, wenn m die Zahl der b und $n-m$ die Zahl der a ausdrücket, sey P. Sol man nun hieraus die Zahl aller möglichen Ordnungen finden, welche eben die zwey Buchstaben haben können, deren Zahl noch die vorige n ist, unter welchen aber ein b mehr, und folgends ein a weniger vorkommt als vorher, so daß die Zahl der b welche nunmehro in den Ordnungen vorkommen, durch $m+1$ auszudrucken ist: so muß man die Zahl der möglichen Ordnungen P, welche wir als bekannt angenommen haben, durch die Zahl der a multipliciren, welche in denselben Ordnungen vorkommen, das ist, durch $n-m$, und nachdem man dadurch das Product $P \times \overline{n-m}$ erhalten, so muß dasselbe durch die Zahl der b getheilet werden, welche in den neuen

Ord-

Ordnungen vorkommen, das ist, durch $m+1$. XIII, 108. Dadurch erhält man die Zahl aller möglichen Ordnungen die man suchet, und es ist demnach dieselbe $P \times \frac{n-m}{m+1}$. Es verhält sich also bey den öfters erwehnten Umständen, und wenn man die Ordnungen, in welcher ein *b* mehr vorkommt, die folgenden nennet, und die andere in welcher ein *a* mehr vorkommt als in der folgenden, die vorhergehenden: es verhält sich, sage ich, die Zahl der *b* in den folgenden Ordnungen nemlich $m+1$, zu $n-m$, der Zahl der *a* in den vorhergehenden, wie sich die Zahl aller möglichen vorhergehenden Ordnungen P, zu der Zahl aller möglichen nachfolgenden Ordnungen verhält.

XIII. Abschnitt.

§. 114. Es sey unter einer beliebigen Zahl *n* von Buchstaben gar kein *b*, und folgends sey $m=0$, so wissen wir bereits, daß sich die Buchstaben von einerley Art nicht in verschiedene Ordnungen, dergleichen wir hier betrachten, setzen lassen, XIII, 106. und daß folgends P die Einheit bedeute. Wil man nun die Zahl aller möglichen Ordnungen haben, in welchen *b* einmal vorkommt, so schreibe man in $P \times \frac{n-m}{m+1}$ an statt P die 1, und an statt *m* setzet man 0, so wird $1 \times \frac{n}{1}$ die Zahl aller möglichen Ordnungen von zweyerley Buchstaben *a* und *b* unter welchen *b* nur einmal vorkommt, wie wir sie bereits oben gefunden.

§. 115. Wil man aus der Zahl dieser Ordnungen, als den vorhergehenden die Zahl aller möglichen Ordnungen finden, welche darauf folgen, in welchen nemlich zwey *b* vorkommen, so ist P nunmehro gefunden $= 1 \times \frac{n}{1}$, *m* aber ist nunmehro $= 1$, und *n* behält seine Bedeutung, denn die Zahl aller Buchstaben bleibt beständig einerley. Wenn man demnach in $P \times \frac{n-m}{m+1}$ vor P, $1 \times \frac{n}{1}$, und vor *m*, die 1, schreibet, so bringet man die Zahl aller Ordnungen heraus, in welcher zwey *b* vorkommen, und diese ist $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$.

§. 116. Auf eben die Art findet man aus der Zahl aller möglichen Ordnungen der Buchstaben, unter welchen zwey *b* sind, die Zahl aller möglichen Ordnungen der Buchstaben, unter welchen drey *b*

XIII. Abschnitt. vorkommen. P ist nunmehro $= 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$, und $m = 2$. Setzet man nun dieses beedes an seine Stelle in der Regel $P \times \frac{n-m}{m+1}$, so wird die Zahl aller möglichen Ordnungen bey drey b, diese $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$.

§. 117. Nicht anders schliesset man auch die Zahl der möglichen Ordnungen der Buchstaben bey vier, fünf und sechs b, aus den vorigen. Es gehet alles beständig nach einerley Gesetzen fort. Die Nenner der Brüche, welche in einander zu multipliciren sind, werden immer um eins grösser, und die Zehler nehmen um 1 ab: vor jedes b aber, welches in der Menge der Buchstaben, deren mögliche Ordnungen man suchet, an statt eines a gesetzet wird, muß ein dergleichen Bruch zu den vorigen, als ein Factor, hinzu kommen.

§. 118. Wird nun die Bedeutung des Buchstabens n bestimmet, und also die Zahl der Buchstaben, welche in ihre Ordnungen zu bringen sind, würklich angezeiget; so findet man alles in würklichen Zahlen. Die möglichen Ordnungen z. E. aus fünf Buchstaben von zweyerley Art a und b sind diese. Sind alle fünf Buchstaben a, so ist die Summe aller möglichen Ordnungen 1.

Ist unter denselben ein b, und sind die übrigen vier Buchstaben a, so ist die Summe aller möglichen Ordnungen $1 \times \frac{n}{1}$, das ist, weil $n = 5$, $1 \times \frac{5}{1} = 5$.

Sind unter den Buchstaben zwey b, und sind die übrigen drey Buchstaben a, so ist die Zahl der möglichen Ordnungen $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$, das ist, $1 \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{2} = 10$.

Sind unter denselben drey b, und sind die übrigen zwey Buchstaben a, so ist die Zahl der möglichen Ordnungen $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, das ist $1 \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} = 10$.

Sind unter den Buchstaben vier b, und nur ein a, so ist die Zahl der

der möglichen Ordnungen $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$, das ist $1 \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} = 5$.

Sind endlich unter diesen Buchstaben fünf *b*, und also kein *a*, so ist die Zahl aller möglichen Ordnungen $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5}$, das ist $1 \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{5}$, welches nicht mehr als die Einheit bringet. Weiter kan man nicht kommen, weil, wenn man einen Schritt weiter thun wolte, der Bruch, welchen man noch zu dem vorigen, als einen Factor hinzu setzen müste, o werden, und dasselbe durch die Multiplication gänzlich vernichten würde. Es sind demnach alle mögliche Ordnuhgen aus fünf Buchstaben von zweyer Benennung gefunden, welche wir suchten.

§. 119. Aus diesem allen nun können wir sehen, durch wie vielerley Multiplicationen ein Product, in welchem zween Buchstaben in gewissen Dignitäten vorkommen, entstehen könne, dergleichen Producte sind ab^2, a^2b^3, und überhaupt $a^{n-m}b^m$. Das erstere dieser Producte kan auch so geschrieben werden, *abb*, wie auch *bab* und *bba*, und wenn man nach Maaßgebung einer jeden Ordnung, diesen Buchstaben multipliciret, so entstehet immer eben das Product ab^2, weil die Ordnung in der Multiplication nichts ändert. I, 96. Nemlich, wenn man erstlich *b* durch *b*, und das Product durch *a* multipliciret, oder wenn man *b* durch *a* und das Product durch *b* multipliciret, oder auch wenn man *a* durch *b* multipliciret, und das Product nochmals durch *b*, so entstehet allezeit eben das Product ab^2. Hieraus schliesset man so gleich, daß das Product ab^2 durch so vielerley Multiplicationen entstehen könne, als viel mal sich die drey Buchstaben *abb* versetzen lassen. Und so ist es in allen dergleichen Fällen. Das Product a^2b^3 kan durch so vielerley Multiplicationen entstehen, als vielmal sich die Buchstaben *aabbb* versetzen lassen, und das Product $a^{n-m}b^m$, in welchem wir die Exponenten mit denjenigen Buchstaben ausgedrücket haben, deren wir uns XIII, 13. bey der Regel bedienet, die wir eben zu Ende gebracht, entstehet durch so vielerley Multiplicationen, als viele der Ordnungen sind, in welche sich die Buchstaben *aaa* . . . und *bb* . . setzen lassen, deren Zahl überhaupt *n* ist, und unter welchen die Zahl *m* der *b* vorkommet.

§. 120.

XIII. Abschnitt.

§. 120. Diese Betrachtungen können wieder sehr trocken scheinen. Es wird sich aber der Nutzen derselben so gleich zeigen, indem wir sie auf die Dignitäten solcher Wurzeln, welche aus zwey Theilen bestehen, anwenden, und zeigen wollen, wie solche Dignitäten zusammen zu setzen sind: welches jedoch der geringste Nutze ist, welchen diese Lehre bringen wird. Die nützlichsten und tiefsten Betrachtungen gründen sich darauf, deren einige im Verfolg vorkommen werden.

Die Dignitäten einer zweytheiligen Wurzel.

§. 121. Es bedeute $a+b$ eine Wurzel von zwey Theilen. Wir werden hernach an statt der $+b$ auch $-b$ setzen. Vors erste aber können wir es bey der angenommenen Zeichnung bewenden lassen. Die zweyte Dignität dieser Wurzel entsteht ohnfehlbar, wenn man sie mit sich selbst, das ist, mit $a+b$ multipliciret. Man verrichte diese Multiplication, aber man verfahre dabey dergestalt, daß man die Buchstaben, mit welchen man multipliciret, allezeit den andern vorsetze, welche man multipliciret, so wird die Rechnung, oder vielmehr die Bezeichnung der Rechnung, welche man vornehmen muste, wenn an der Stelle der Buchstaben die Zahlen stunden, welche die Buchstaben bedeuten können, diese seyn:

$$\begin{array}{c} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab+ba+bb \end{array}$$

Das Product ist die zweyte Dignität der Wurzel $a+b$. Betrachtet man dasselbe etwas genauer, so siehet man, daß es aus allen Producten bestehe, welche entstehen können, wenn man zwey der Buchstaben a und b in allen möglichen Ordnungen, die von einander verschieden sind, in einander multipliciret. Denn man hat in denselben würklich a mit a, b mit a, a mit b, und b mit b multipliciret, und auf mehrere Arten kan man zween Buchstaben von zweyerley Benennung nicht mit einander multipliciren.

§. 122. Wil man nun die dritte Dignität von eben der Wurzel $a+b$ haben, so muß man die zweyte, welche wir gefunden, nochmals durch die Wurzel multiplicirен. Man verfahre bey dieser Multiplication wieder wie gewiesen worden ist, und schreibe die Buchstaben, durch welche man multipliciret, vor diejenigen, welche man multipliciret, so stehet die Rechnung in folgender Ordnung:

Die

Die zweyte Dignität: $aa + ab + ba + bb$
Die Wurzel $a + b$

$$\begin{array}{l} aaa + aab + aba + abb \\ + baa + bab + bba + bbb \end{array}$$

Wenn man nun das Product, welches die dritte Dignität der Wurzel $a+b$ ist, ebenfals betrachtet, so findet man, daß bey demselben eben dergleichen richtig sey, als wir eben bey der zweyten Dignität bemerket haben. Es bestehet dieses Product aus allen Producten, welche aus den Buchstaben a und b entstehen können, wenn man derselben drey nimmet, wie man nur kan, nemlich entweder drey a, oder zwey a und ein b, oder ein a und zwey b, oder drey b, und multipliciret jede drey angenommene Buchstaben in so mancher Ordnung in einander, als möglich ist. Denn wenn man die zween Buchstaben a und b mit einander verknüpfet, wie man nur kan, wie dieses bey der zweyten Dignität geschehen, und man setzet hernach einer jeden Verknüpfung so wohl a als auch b vor, so ist klar, daß dadurch alle Verknüpfungen dreyer Buchstaben entstehen müssen, die nur möglich sind. Dieses aber ist geschehen, indem aus der zweyten Dignität die dritte gemacht worden.

§. 123. Wir hatten die zween Buchstaben a, b. Vor jeden derselben konte entweder a oder b stehen. Dieses sind die Ordnungen alle, welche diese Buchstaben haben können, wenn man sie zwey und zwey mit einander verknüpfet. Und diese Verknüpfungen zusammen machen die zweyte Dignität der Wurzel $a+b$. In derselben sind also die letzten Buchstaben so oft verändert als möglich ist, und die erstern sind auch so oft verändert als möglich ist. Wil man also noch einen Buchstaben vor die zwey vorigen setzen, und denselben wieder so oft verändern als möglich ist, so hat man nur einer jeden der vorigen Verknüpfungen aa, ab, ba, bb so wohl a als auch b vorzusetzen. Dadurch wird auch der erste der drey Buchstaben, welche man dergestalt zusammen setzet, so oft verändert, als bey den gesetzten Bedingungen, daß nemlich nur die beyden Buchstaben a und b gebraucht werden sollen, möglich ist. Und man bekommt also wieder alle Ordnungen, in welche sich die drey Buchstaben setzen lassen, oder alle Producte, welche aus diesen Buchstaben gemacht werden können, wenn man sie in allen möglichen Ordnungen mit einander multipliciret. Nun aber entstehet die dritte Dignität der Wurzel $a + b$ wenn man allen Theilen der zweyten Dignität, so wohl a als auch b als einen Multiplicator vorse-

 tzet.

XIII. Abschnitt.

tzet. Demnach enthält diese dritte Dignität alle Producte, die aus dreyen Buchstaben, von der Benennung a und b, entstehen können, wenn man sie in allen möglichen Ordnungen in einander multipliciret.

§. 124. Dieses kan genug seyn uns weiter zu führen. Alle mögliche Ordnungen aus vier Buchstaben, deren keiner von a oder b verschieden ist, entstehen aus allen Ordnungen dreyer dieser Buchstaben, wenn man einer jeden dieser Ordnungen so wohl a als auch b vorsetzet, und eben diese Ordnungen bezeichnen alle Producte, welche man aus diesen vier Buchstaben machen kan, wenn man sie in allen möglichen Ordnungen in einander multipliciret. Es wird aber durch diese Multiplication aller möglichen Producte aus dreyen Buchstaben, erstlich durch a, und so dann auch durch b, die vierte Dignität der Wurzel $a+b$ hervor gebracht: weil, indem man diese Multiplication verrichtet, ein jedes der Producte, aus welchen die dritte Dignität bestehet, so wohl durch a als durch b multipliciret wird. Demnach bestehet die vierte Dignität von $a+b$ aus allen Producten von vier Buchstaben, deren keiner von a oder b verschieden ist, welche entstehen können, wenn diese Buchstaben in jeder möglichen Ordnung in einander multipliciret werden.

§. 125. Und eben so bestehet die fünfte Dignität der Wurzel $a+b$ aus allen Producten aus fünf Buchstaben, deren keiner von a oder b verschieden ist, die entstehen können, wenn man diese Buchstaben in einer jeden möglichen Ordnung in einander multipliciret. Man kan die Rechnung welche wir angefangen leicht fortsetzen, wenn man noch einigen Anstand bey diesen Dingen haben solte, und dadurch alles den Augen deutlich vorstellen, so der Verstand begreifen sol. Thut man dieses, so siehet man gar leicht, daß überhaupt eine jede Dignität der Wurzel $a+b$ zu erhalten, man so viele Buchstaben a und b auf alle mögliche Arten nehmen müsse, als viele Einheiten der Exponent der Dignität hat, welche man schaffen sol, und daß aus denselben alle Producte zu machen seyn, welche daraus entstehen können, wenn man sie in allen möglichen Ordnungen in einander multiplicirет.

§. 126. Ich will die fünfte Dignität aus $a+b$ haben: so nehme ich $aaaaa$, $aaaab$, $aaabb$, $aabbb$, $abbbb$, $bbbbb$, oder a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5. Der ersten Producte a^5 nehme ich so viele, als vielmal dieses Product aus seinem einfachen Factoren a heraus gebracht werden kan, wenn man die Ordnung der Multiplication verändert so oft man kan. Es kan aber

aber dieses nur einmal geschehen: ich nehme also auch nur ein a^5. Ferner nehme ich der Producte a^4b so viele, als vielmal sich die einfachen Factore desselben a und b verwechseln lassen. Diese Verwechselung kan fünfmal geschehen, also nehme ich fünf a^4b. Eben so verfähret man mit den übrigen. Das Product a^3b^2 kan aus seinen einfachen Factoren a und b auf zehen verschiedene Arten entstehen, also nehme ich $10\,a^3b^2$ XIII, 118. Verfolgt man diese Arbeit, so bekommt man endlich die fünfte Dignität von $a+b$ welche diese ist: $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

XIII. Abschnitt.

§. 127. Wil man also überhaupt die Dignität von $a+b$ haben deren Exponent n ist, welche man gemeiniglich so ausdrücket $\overline{a+b}^n$, so wird dieselbe:

$$a^n + \frac{n}{1} \times a^{n-1}b + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}\, a^{n-3}b^3$$ und so

fort. Denn dieses sind alle Producte, welche entstehen können, indem man von den Buchstaben a und b die Zahl n nimmet, wie man nur kan, und dieselbe in allen möglichen Ordnungen in einander multipliciret: weil n die Zahl aller möglichen Multiplication ausdrucket, durch welche $a^{n-1}b$ entstehen kan, und $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$ die Zahl derjenigen, durch welche man $a^{n-2}b^2$ erhält, und so fort. Dieses ist die Newtonische Regel eine jede Dignität einer Wurzel zu finden, welche aus zweyen Theilen bestehet.

§. 128. Hat, in der Wurzel, b das Zeichen $-$, und ist also die Wurzel $a-b$, so bekommen alle Dignitäten der b, deren Exponent ungerade ist, eben das Zeichen, die übrigen aber behalten das Zeichen $+$. Denn das Product $1 \times -b$ ist $-b$, aber das Product $-b \times -b$ ist b^2, und das Product $-b \times b^2$ ist $-b^3$. Diese Zeichen werden durch die übrige Multiplicationen, welche die Regel vorzunehmen weiset, nicht verändert, und man kan also die Regel leicht machen, nach welcher man die Dignität, deren Exponent n ist, von der Wurzel $a-b$ findet, wenn man nur in der eben gegebenen Regel die Zeichen derjenigen Glieder verändert unter deren Factoren eine Dignität von b mit einem ungeraden Exponenten, 1 oder 3 oder 5 und so fort, vorkommet: Demnach ist $\overline{a-b}^n = a^n - \frac{n}{1} \times a^{n-1}b + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times a^{n-4}b^4 - \&c.$

XIII. Abschnitt.

§. 129. Wir wollen, ehe wir weiter gehen, die Anwendung dieser Regul in einem Exempel weisen, welches zum deutlichern Verstand des folgenden vieles beytragen wird. Man sol das siebende Glied einer geometrischen Reihe, deren erstes die Einheit, und das zweyte 11 ist, oder welches auf eben das hinaus kommt, man sol die sechste Dignität der Zahl 11 schaffen, so theile man diese Zahl 11 in zwey bequeme Theile, welche hier 10 und 1 sind, mit welchen jede Multiplicationen gar leicht zu verrichten stehen, und da also hier $\overline{a+b}^n = \overline{10+1}^6$, und folgends in der XIII, 127 gegebenen Regel $a = 10$, $b = 1$, und $n = 6$, so mache man nach Anleitung derselben

$$a^n = 10^6 = \text{- - - - - - - - - - - - - -} \quad 1000000.$$

$$n \times a^{n-1}b = 6 \times 100000 = \text{- - - - - - - - - -} \quad 600000.$$

$$n \times \frac{n-1}{2} \times a^{n-2}b^2 = 6 \times \frac{5}{2} \times 10000 = \text{- - - - - -} \quad 150000.$$

$$n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times a^{n-3}b^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{2 \times 3} \times 1000 = \text{- - -} \quad 20000.$$

$$n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times a^{n-4}b^4 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{2 \times 3 \times 4} \times 100 = \quad 1500.$$

$$n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} \times a^{n-5}b^5 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{2 \times 3 \times 4 \times 5} \times 10 = 60.$$

$$n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} \times \frac{n-5}{6} \times a^{n-6}b^6 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \times 1 = 1.$$

Die Summe aller dieser Zahlen ist die verlangte sechste Dignität der Zahl 11, oder es ist $11^6 = 1000000 + 600000 + 150000 + 20000 + 1500 + 60 + 1$, das ist 1771561.

§. 130. Sol man an statt der $10 + 1$ oder 11, die Zahl $10 - 1$ oder 9 zur sechsten Dignität erheben, so bleiben die Zahlen alle wie wir sie gefunden; nur bekommt die zweyte Zahl 600000 das Zeichen $-$, wie auch die vierte und die sechste, und es wird demnach die sechste Dignität der Zahl 9 diese $1000000 - 600000 + 150000 - 20000 + 1500 - 60 + 1 = 53144$.

§. 131. Man siehet aus diesem Exempel gar leicht, was auch aus der allgemeinen Betrachtung der Regel erhellet, daß wenn b viel kleiner ist als a, die nachfolgenden Glieder in Ansehung der vorhergehenden gar klein werden: wie denn in unserm Exempel das dritte Glied 150000 noch nicht der zehende Theil ist des ersten und andern zusammen

men genommen 1600000. Ist demnach das zweyte Glied b in Ansehung des ersten gar sehr klein, so kan man sich blos an dem ersten und zweyten Gliede begnügen lassen. Und es ist in diesem Falle $\overline{a+b}^n = a^n + na^{n-1}b$, ohne einen sonderlichen Fehler, welcher desto kleiner wird, je kleiner b in Ansehung des a ist. Eben so ist bey diesem Verstand fast $\overline{a-b}^n = a^n - na^{n-1}b$, und man fehlet, indem man dieses annimmet, desto weniger, je kleiner b in Ansehung des a ist. Ist zum Exempel $a = 1000$ und $b = 1$, und man sol die dritte Dignität von $a + b$ oder 1001 schaffen, so ist $a^n = 1000^3 = 1000000000$, und $na^{n-1}b = 3000000$. Die Summe dieser zwey Glieder kan man vor die verlangte Cubiczahl annehmen. Sie kommt in der That derselben gar nahe. Die Summe der gefundenen zwey Glieder ist 1003000000 und die Cubiczahl von 1001 ist eigentlich 1003003001. Man siehet, daß der Unterschied dieser zwey Zahlen 3001 in Ansehung des Ganzen in keine sonderliche Betrachtung könne gezogen werden. Wir werden künftig diese Anmerkung zu den wichtigsten Erfindungen gebrauchen, und sie ist also nicht ausser Acht zu lassen, so gering sie auch dem ersten Anblick nach scheinen mag.

Ein jedes Glied einer geometrischen Reihe zu finden.

§. 132. Gegenwärtig wenden wir uns zu demjenigen, so wir bey unserer vorhabenden Betrachtung noch zu zeigen haben: wie nemlich in einer geometrischen Reihe deren erstes Glied die Einheit ist, und in welcher ein anderes Glied zusamt desselben Entfernung von dem ersten ebenfals gegeben ist, erstlich das zweyte, und so dann ein jedes anderes Glied zu finden sey. Es sey das gegebene Glied $\overline{a+b}^e$: so stelle man sich eine geometrische Reihe vor, deren Glieder nachfolgender Gestalt stehen: 1, $\overline{a+b}^n$, $\overline{a+b}^{2n}$, $\overline{a+b}^{3n}$ . . . . . . $\overline{a+b}^{tn}$. und nehme an, daß das Glied derselben $\overline{a+b}^{tn}$ mit dem gegebenen $\overline{a+b}^e$ einerley sey, welches allerdings seyn muß, wenn t die Entfernung des gegebenen Gliedes $\overline{a+b}^e$ von dem ersten bedeutet, oder wenn man setzet, daß t so viele Einheiten enthalte, als viele Glieder in der Reihe von dem ersten bis an $\overline{a+b}^e$ stehen XIII, 82: So ist das zweyte Glied dieser Reihe $\overline{a+b}^n$. Weil aber $\overline{a+b}^{tn} = \overline{a+b}^e$, so sind nothwendig die Exponenten dieser Dignitäten einerley, nemlich $tn = e$,

 und

XIII. Abschnitt. und folgends $n = \frac{e}{t}$ Man kan also den Exponenten des zweyten Gliedes, aus dem gegebenen Exponenten e, und aus der Zahl der Glieder t, leicht finden.

§. 133. Hat man aber dergestalt n aus e und t ausgedruckt, so kan man auch das zweyte Glied aus dem gegebenen $\overline{a+b}^e$ und der Zahl t würklich ausdrücken. Denn $\overline{a+b}^n$ hat man in der allgemeinen Regul $= a^n + n \times a^{n-1}b + n \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2$ &c. Setzet man nun in derselben vor n überall den Bruch $\frac{e}{t}$ so wird würklich das zweyte Glied, welches man suchte $\overline{a+b}^n$ aus dem gegebenen Gliede $\overline{a+b}^e$, und aus der Zahl t bestimmet. Wir wollen uns aber hiebey noch nicht aufhalten.

§. 134. Gleichwie in der bezeichneten Reihe 1, $\overline{a+b}^n$, $\overline{a+b}^{2n}$, $\overline{a+b}^{3n}$, $\overline{a+b}^{4n}$ &c. $2n$ der Exponent desjenigen Gliedes ist, so von der Einheit um zwey Glieder entfernt ist, und $3n$ der Exponent desjenigen, so von der Einheit um 3 Glieder abstehet: also bedeutet überhaupt in dieser Reihe $\overline{a+b}^{rn}$ ein jedes Glied, welches von dem ersten Gliede der Reihe 1 um so viel Glieder abstehet, als viele Einheiten in der Zahl r enthalten sind. Und wil man dieses Glied aus der allgemeinen Regul ausdrücken, so hat man in derselben nur überall an statt n das Product rn zu setzen. Nun haben wir gesehen, daß bey demjenigen, so wir hier zum Grunde legen; $n = \frac{e}{t}$ also ist $rn = \frac{re}{t}$: und das Glied, welches durch $\overline{a+b}^{rn}$ bezeichnet wird, das ist, ein jedes Glied der Reihe 1, $\overline{a+b}^n$, $\overline{a+b}^{2n}$ &c. welches von dem ersten um so viele Glieder entfernt ist, als viele Einheiten in der Zahl r enthalten sind, wird auch durch $\overline{a+b}^{\frac{re}{t}}$ ausgedrückt, welche Zeichnung an die Hand giebt, wie dasselbe aus dem gegebenen Gliede der Reihe $\overline{a+b}^e$, und aus der Zahl der Glieder entstehen könne, die in der Reihe zwischen der 1 und $\overline{a+b}^e$ stehen, welche Zahl wir uns unter t vorstellen. Es wird demnach dieses Glied gefunden, wenn man in der Regel an statt des n überall den Bruch $\frac{re}{t}$ setzet.

§. 135.

XIII. Abschnitt.

§. 135. Man nehme $e = r$, wie man der Bequemlichkeit halber gemeiniglich zu thun pfleget, so wird $\frac{re}{t} = \frac{r}{t}$. Setzet man nun diesen Bruch an die Stelle des n der Regel, so wird $a^n = a^{\frac{r}{t}}$.

$$n \times a^{n-1}b = \frac{r}{t} \times a^{\frac{r}{t}-1}b = \frac{r}{t} \times \frac{a^{\frac{r}{t}}b}{a}$$

$$n \times \frac{n-1}{2} \times a^{n-2}b^2 = \frac{r}{t} \times \frac{r-t}{2t} \times a^{\frac{r}{t}-2}b^2 = \frac{r}{t} \times \frac{r-t}{2t} \times \frac{a^{\frac{r}{t}}b^2}{a^2}.$$

$$n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times a^{n-3}b^3 = \frac{r}{t} \times \frac{r-t}{2t} \times \frac{r-2t}{3t} \times \frac{a^{\frac{r}{t}}b^3}{a^3},$$ und so fort, wie man leicht siehet. Demnach ist $\overline{a+b}^{\frac{r}{t}} = a^{\frac{r}{t}} + \frac{r}{t} \times \frac{a^{\frac{r}{t}}b}{a} + \frac{r}{t} \times \frac{r-t}{2t} \times \frac{a^{\frac{r}{t}}b^2}{a^2} + \frac{r}{t} \times \frac{r-t}{2t} \times \frac{r-2t}{3t} \times \frac{a^{\frac{r}{t}}b^3}{a^3}$, und so fort. Oder wenn man den gemeinschaftlichen Factor $a^{\frac{r}{t}}$ von dem übrigen absondert, so wird $\overline{a+b}^{\frac{r}{t}} = a^{\frac{r}{t}} \times (1 + \frac{r}{t} \times \frac{b}{a} + \frac{r}{t} \times \frac{r-t}{2t} \times \frac{b^2}{a^2} \times \frac{r}{t} \times \frac{r-t}{2t} \times \frac{r-2t}{3t} \times \frac{b^3}{a^3} + \dots$ und so immer fort, nach eben den Gesetzen. Diese Reihe drücket also ein Glied einer geometrischen Reihe $\overline{a \times b}^{\frac{r}{t}}$ aus, welche von der 1 anfängt, und in welcher das Glied $\overline{a+b}^1$, so wir vor $\overline{a+b}^e$, gesetzet haben, um so viele Glieder von der 1 entfernt ist, als viele Einheiten die Zahl t enthält. Die Zahl der Glieder aber, welche in der Reihe von der Einheit an, bis an das Glied $\overline{a \times b}^{\frac{r}{t}}$ stehen, dieses Glied mit gerechnet, oder die Zahl aller Glieder der Reihe bis an das Glied $\overline{a \times b}^{\frac{r}{t}}$, die Einheit mit gerechnet, und dieses Glied ausgeschlossen, ist t.

§. 136. Man siehet leicht, daß man nach eben der Regel auch

$a - b$

XIII. Abschnitt.

$\overline{a-b}^{\frac{r}{t}}$ zusammen setzen könne, und daß dazu nichts anders erfordert werde, als daß man dem b immer das Zeichen $-$ gebe, so oft es vorkommt, wobey nur nicht aus der Acht zu lassen, daß $-b \times -b$ das Product $+bb$ gebe, und so in andern dergleichen Fällen. Alles übrige bleibt. Es bedeutet $\overline{a-b}^{\frac{r}{t}}$ ebenfals in der Reihe, in welcher $\overline{a-b}^{t}$ oder $a-b$ von der Einheit um so viele Glieder entfernt ist, als viele Einheiten in t enthalten sind, dasjenige Glied, welches von dem ersten um so viele Glieder abstehet, als viele Einheiten die Zahl r ausmachen. Dieses Glied $\overline{a-b}^{\frac{r}{t}}$ ist also $= a^{\frac{r}{t}} \times (1 - \frac{r}{t} \times \frac{b}{a} + \frac{r}{t} \times \frac{r-t}{2t} \times \frac{b^2}{a^2} - \frac{r}{t} \times \frac{r-t}{2t} \times \frac{r-2t}{3t} \times \frac{b^3}{a^3} +$ &c.

§. 137. Es enthält diese Regel alles was bisher von dieser Sache gewiesen worden ist, weil die Buchstaben r, t eine jede Zahl bedeuten können, die man nur annehmen wil; und wir werden uns also künftig hin an diese Regel allein halten. Auch hier kan man öfters nur die drey oder zwey ersten Glieder vor die ganze Reihe annehmen, wenn die Glieder sehr abnehmen, und $\frac{r}{t} \times \frac{b}{a}$ viel kleiner wird als 1, und so fort. Ob dieses sey, siehet man in der Anwendung, wenn die Bedeutung der Buchstaben bestimmet wird, gar leicht.

§. 138. Ist t in Ansehung des r sehr groß, es mag nun r bedeuten, was es wil, so ist $r-t$ von $-t$ nicht sonderlich verschieden: noch weniger aber fehlet man, wenn man vor $r-2t$ nur $-2t$ setzet, und wieder weniger, wenn man vor $r-3t$ bloß $-3t$ annimmet. Bey diesen geringen Fehlern, welche noch immer kleiner und kleiner werden, je grösser t in Ansehung des r wird, kan man nach einer Regel rechnen, welche aus der vorigen mit Hinweglassung aller r, wo dieselben in der Verknüpfung mit t vorkommen, folgender massen gemacht wird. Es bleibt $\frac{r}{t} = \frac{r}{t}$, aber $\frac{r}{t} \times \frac{r-t}{2t}$ wird nunmehro $\frac{r}{t} \times \frac{-t}{2t} =$

$-\frac{r}{2t}$ und $\frac{r}{t}\times\frac{r-t}{2t}\times\frac{r-2t}{3t}$ wird $\frac{r}{t}\times\frac{-t}{2t}\times\frac{-2t}{3t}=\frac{r}{3t}$. Das folgende Glied $\frac{r}{t}\times\frac{r-t}{2t}\times\frac{r-2t}{3t}\times\frac{r-3t}{4t}$ verwandelt sich in dieses

$\frac{r}{t}\times-\frac{t}{2t}\times-\frac{2t}{3t}\times-\frac{3t}{4t}=-\frac{r}{4t}$; und so geht es weiter fort. Daß demnach bey den gesetzten Bedingungen, wenn nemlich t in Ansehung der r gar sehr groß ist, die Regel selbst nachfolgende Form bekommet:

$$\overline{a+b}^{\frac{r}{t}}=a^{\frac{r}{t}}\left(1+\frac{r}{t}\times\frac{b}{a}-\frac{r}{2t}\times\frac{b^2}{a^2}+\frac{r}{3t}\times\frac{b^3}{a^3}-\frac{r}{4t}\times\frac{b^4}{a^4}+\text{\&c.}\right.$$

§. 139. Hat aber b das gegenseitige Zeichen —, so wird die Regel nachfolgender Gestalt ausgedrückt:

$\overline{a-b}^{\frac{r}{t}}=a^{\frac{r}{t}}\left(1-\frac{r}{t}\times\frac{b}{a}-\frac{r}{2t}\times\frac{b^2}{a^2}-\frac{r}{3t}\times\frac{b^3}{a^3}\right.$ und so fort, vollkommen, wie vorher, nur bekommen alle Glieder, ausser dem ersten, das Zeichen —.

Begriffe der Logarithmen.

§. 140. Man hat auf diese Betrachtung, welche ein jedes Glied einer geometrischen Reihe, die von der Einheit anfängt, aus einem gegebenen Glied der Reihe und der Entfernung desselben von der Einheit, zu finden lehret, eine besondere Rechnungsart gegründet, welche nicht nur in vielen Fällen leichter ist als die gemeine; sondern auch verschiedene Aufgaben zu lösen im Stande ist, welche ohne derselben eine ungemeine Schwierigkeit haben würden. Dieses wird vermittelst der so genannten Logarithmen verrichtet, welche man im teutschen Verhältnißzahlen nennen könte. Diese Zahlen sind zwar bereits gefunden: es kan uns aber bey dem Gebrauch derselben ein gar grosses Licht geben, wenn wir sie auch selber zu finden wissen. Wie dieses ohne grosse Weitläuftigkeit geschehen könne, geben die bisherige Betrachtungen an die Hand. Wir wollen diese Materie in eben der Deutlichkeit abzuhandeln trachten, welcher wir uns bisher immer beflissen haben.

XIII. Abschnitt.

§. 141. Man stelle sich nochmals eine Geometrische Reihe unter der allgemeinen Bezeichnung vor:

$1, a^n, a^{2n}, a^{3n}, a^{4n}, a^{5n}, a^{6n} - - - - a^{mn},$

so verhält sich ein jedes Glied derselben, welches man annehmen wil, zu den unmittelbar folgenden, wie dieses letztere Glied zu demjenigen, welches unmittelbar nach demselben stehet. Es ist $1 : a^n = a^n : a^{2n}$, und $a^n : a^{2n} = a^{2n} : a^{3n}$, und so überall. Dieses ist aus den ersten Begriffen klar. Denn eben diese Gleichheit der Verhältniß eines jeden Gliedes zu demjenigen, welches unmittelbar auf dasselbe folget, machet, daß die Glieder eine Geometrische Reihe mit einander machen. Folgends entsteht die Verhältniß eines jeden Gliedes der Reihe zu demjenigen, welches von demselben das zweyte ist, als $a^n : a^{3n}$, wenn man die Verhältniß eines Gliedes der Reihe, welches man annehmen wil, zu demjenigen so unmittelbar auf dasselbe folget, als $1 : a^n$, zweymal setzet. VIII, 2. Dadurch entsteht die Verhältniß $1 : a^{2n}$, und die Verhältniß $a^n : a^{3n}$ ist dieser Verhältniß $1 : a^{2n}$ gleich. Man siehet leicht, daß eben dieses richtig seyn werde, wenn man diese Verhältnisse verkehrt setzet. Die Verhältniß $a^{3n} : a^n$ ist ebenfals aus der Verhältniß $a^n : 1$ zweymal genommen, zusammen gesetzt.

§. 142. Auf eben die Art siehet man, daß die Verhältniß eines jeden Gliedes der Reihe zu demjenigen, so von demselben um drey Glieder entfernet ist, als $a^n : a^{4n}$ entstehe, wenn man die Verhältniß eines Gliedes eben der Reihe zu dem unmittelbar folgenden $1 : a^n$ dreymal nimmet, denn wenn man die Verhältniß $1 : a^n$ dreymal zusammen setzet, so bekömmet man die Verhältniß $1 : a^{3n}$, und diese ist mit der vorigen $a^n : a^{4n}$ einerley. Auf eben die Art schliesset man, daß die Verhältniß eines jeden Gliedes der Reihe zu demjenigen, so von demselben das vierte ist, entstehe, wenn man die Verhältniß eines jeden Gliedes eben der Reihe viermal zu sich selbst setzet und so fort. Auch dieses ist richtig, wenn man die Verhältnisse verkehrt setzet.

§. 143. Betrachtet man nun die Verhältniß eines Gliedes einer solchen Reihe zu demjenigen, so unmittelbar auf dasselbe folget, welche allezeit der Verhältniß $1 : a^n$ gleich ist, als einfach, so muß man die Verhältniß eines jeden Gliedes der Reihe zu demjenigen, welches von demselben um zwey Glieder entfernt ist, als $a^n : a^{3n}$, als zweyfach ansehen, weil sie durch die Zusammensetzung zwoer Verhältnisse, die der ersten gleich sind, entstehet; und die Verhältniß eines jeden Gliedes zu demjenigen, so von demselben um 3 Glieder entfernet ist, muß man

man bey eben diesen Bedingungen als dreyfach ansehen, und so fort. XIII. Abschnitt.
VIII, 7. Die Entfernung des zweyten Gliedes der Verhältniß von dem ersten, in der angenommenen Reihe, zeiget allezeit, wie oft die Verhältniß eines Gliedes derselben zu dem unmittelbar folgendem, zusammen zu setzen sey, damit die gedachte Verhältniß heraus komme. Ist ein Glied der Reihe, welches wir q nennen wollen von a^{2n} um eine Zahl von Gliedern entfernet, welche durch m ausgedrücket wird, so muß die Verhältniß $1 : a^n$ so oft zusammen gesetzet werden, als viele Einheiten in m enthalten sind, damit eine Verhältniß heraus gebracht werde, welche der Verhältniß $a^{2n} : q$ gleich sey. Und eben so oft muß die Verhältniß $a^n : 1$ zusammen gesetzet werden, wenn man die Verhältniß $q : a^{2n}$ heraus bringen wil. Eben so ist es auch in dem folgenden, ob wir zwar nicht nöthig finden, es allezeit zu erinnern.

§. 144. Es gründen sich also diese Benennungen auf die Reihe, welche man angenommen, oder vielmehr auf die Verhältniß $1 : a^n$, aus welcher man die ganze Reihe bestimmet hat: welche Verhältniß man als die einfache betrachtet. In Ansehung dieser Verhältniß nennet man die Verhältniß $1 : a^{2n}$ doppelt, und die Verhältniß $1 : a^{3n}$ dreyfach. Bey einer andern einfachen Verhältniß müsten diese Nahmen ohnfehlbar geändert werden. Zum Exempel, wenn man vor a^n die Zahl 2 schreibt, so wird die Reihe nachfolgende 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128 u. s. f. Betrachtet man nun die Verhältniß 1 : 2, welche der Verhältniß 2 : 4 oder 4 : 8 gleich ist, als einfach, so ist die Verhältniß 1 : 4 oder 2 : 8, oder 4 : 16 u. s. w. als gedoppelt, und die Verhältniß 1 : 8 oder 2 : 16 oder 4 : 32. u. s. w. als dreyfach anzusehen. Nach eben diesen Gesetzen sind die Verhältnisse zu benennen, welche entstehen, indem man die einfache Verhältniß vier, fünf, sechs und mehrmal zusammen setzet. Nimmet man aber eine andere Verhältniß zum Grunde, welche man als die einfache betrachtet, und aus derselben die Geometrische Reihe machet, als diese 1 : 4, wodurch nachstehende Reihe kommt:

1, 4, 16, 64, 256, 1024, u. s. f.

so ist die Verhältniß 1 : 4, welche in Ansehung der vorigen Verhältniß 1 : 2 zweyfach war, nunmehro nur einfach, die Verhältniß 1 : 16 welche vorhero als vierfach angesehen wurde, ist nunmehro nur zweyfach, und so gehet es immer fort. Die Sache ist natürlich. Nachdem dasjenige groß oder klein ist, welches man vor die Einheit annimt, wird ein jedes Ding, so man durch dieselbe Einheit ausmisset, bald mit einer kleinern bald mit einer grössern Zahl ausgedruckt.

XIII. Abschnitt.

§. 145. Setzet man zwischen jede zwey Glieder der Geometrischen Reihe, die mittlere Proportionalzahl, so bekommet man eine neue Geometrische Reihe, welche aus dem vorigen dergestalt auszudrucken ist:

$$1,\ a^{\frac{n}{2}},\ a^n,\ a^{\frac{3n}{2}},\ a^{2n},\ a^{\frac{5n}{2}},\ a^{3n},\ \text{u. s. f.}$$

Die Glieder, deren Exponenten in Gestalt der Brüche stehen, sind die Glieder, welche man zwischen die Glieder der vorigen Reihe gesetzet hat. Und man siehet leicht, daß dadurch wieder eine Geometrische Reihe heraus gebracht werde, wenn man das erste und zweyte Glied, oder die Verhältniß $1 : a^{\frac{n}{2}}$ zum Grunde nimmet, und aus derselben eine Geometrische Reihe zu machen anfängt. Denn dadurch wird eben diejenige heraus gebracht, welche wir gesetzet haben.

§. 146. Behält man nun im übrigen dasjenige, so im Anfang angenommen worden ist, und betrachtet die Verhältniß $1 : a^n$ noch als einfach, so kan man die Verhältniß $1 : a^{\frac{n}{2}}$ nicht anders als eine halbierte Verhältniß nennen, und eben diesen Nahmen muß man nunmehro der Verhältniß eines jeden Gliedes gegen dasjenige, so unmittelbar auf dasselbe folgt, geben. Die Verhältniß $a^n : a^{\frac{3n}{2}}$ ist eine halbierte Verhältniß, weil die Verhältniß $a^n : a^{2n}$ als die ganze Verhältniß betrachtet wird. Man nennet eine dergleichen Verhältniß im Lateinischen eine rationem subduplicatam.

§. 147. Man kan aber auch zwischen jede zwey Glieder einer Geometrischen Reihe zwey, oder drey, oder mit einem Wort, so viele Glieder setzen als man wil, welche mit denjenigen, zwischen welche man sie gesetzet hat, wieder eine Reihe geben, und in diesem Fall entstehet allemal eine neue Geometrische Reihe, wenn man eben dergleichen Zwischensätze bey allen Gliedern der vorigen vornimmet. Wir lassen uns begnügen, zwischen die Glieder der erst bezeichneten Reihe, zwey andere zu setzen, welche die angegebene Eigenschaften haben, so stehet die neue Reihe in folgender gestalt:

$$1,\ a^{\frac{n}{3}},\ a^{\frac{2n}{3}},\ a^n,\ a^{\frac{4n}{3}},\ a^{\frac{5n}{3}},\ a^{2n},\ a^{\frac{7n}{3}},\ a^{\frac{8n}{3}},\ a^{3n}.$$

Weil hier wieder die Verhältniß $1 : a^n$ oder $a^n : a^{2n}$ als die einfache Ver-

Verhältniß angesehen wird, und die Verhältniß $1 : a^{\frac{n}{3}}$, oder $a^{\frac{n}{3}} : a^{\frac{2n}{3}}$, oder überhaupt die Verhältniß eines jeden Gliedes der Reihe zu demjenigen, so unmittelbar auf dasselbe folget, dreymal zusammen gesetzet werden muß, damit die gedachte einfache Verhältniß $1 : a^n$ heraus komme: so muß man die Verhältniß $1 : a^{\frac{n}{3}}$ und eine jede andere, die ihr gleich ist, ansehen, als ob sie entstanden wäre, indem man die einfache Verhältniß in drey gleiche Verhältnisse zertheilet. Man nennet derowegen eine solche Verhältniß, indem man sie auf die Verhältniß beziehet, welche man als einfach und ganz ansiehet, eine rationem subtriplicatam: und hieraus verstehet man leicht, was rationes subquadruplicatæ, subquintuplicatæ und submultiplicatæ quævis, heissen.

§. 148. Aus diesen Gründen folget dasjenige, so wir von dem Gebrauch der Logarithmen oder den Verhältnißzahlen zu sagen haben, unmittelbar; und man siehet gar leicht, warum sie so genennet werden. Man stelle sich eine beliebige Geometrische Reihe vor, welche man von der Einheit anfangen kan, ob zwar dieses nicht unumgänglich nöthig ist. Wir wollen dazu eine der leichtesten annehmen, nemlich 1, 2, 4, 8, 16 und so fort. Denn es ist leicht sie fort zu setzen, so weit man wil. Man nehme in derselben zwey Glieder nach Belieben an, und stelle sich die Verhältniß des ersten dieser Glieder zu dem zweyten als einfach vor. Es ist also wieder nicht nöthig, daß das erste Glied eben die Einheit sey, doch hat man einige Bequemlichkeit davon, wenn man auch dieses annimt. Wir wollen es thun, und uns also die Verhältniß 1 : 8 als die einfache Verhältniß vorstellen. So bald man dieses angenommen, so ist die Verhältniß des ersten Gliedes der Reihe zu dem zweyten 1 : 2, als der dritte Theil der erstern Verhältniß 1 : 8 anzusehen, und die Verhältniß 1 : 4 muß also als $\frac{2}{3}$ eben der Verhältniß 1 : 8 betrachtet werden, welche man als einfach angenommen hat, und so weiter. Schreibt man demnach also:

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 4, & 8, & 16, & 32, & 64, & 128, & 256, & 512 \\ 0, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & 1, & \frac{4}{3}, & \frac{5}{3}, & 2, & \frac{7}{3}, & \frac{8}{3}, & 3 \end{matrix}$$

so zeiget jede unter einem Glied der Geometrischen Reihe stehende Zahl an, wie die Verhältniß des ersten Gliedes der Reihe, zu dem Gliede, unter welchem die Zahl stehet, aus der einfachen Verhältniß 1 : 8 entstehe. Nemlich der unter dem Glied 2 stehende Bruch $\frac{1}{3}$ zeiget, daß die Verhältniß 1 : 2 entstehe, indem man die einfache Verhältniß 1 : 8

XIII. Abschnitt. gleichsam in drey gleiche Verhältnisse theilet, oder zerfället, aus deren Zusammensetzung die Verhältniß 1:8 entstehet. Der unter der 4 stehende Bruch $\frac{2}{3}$ zeiget an, daß man die einfache Verhältniß 1:8 in drey gleiche Verhältnisse zerfällen müsse, deren jede 1:2 seyn wird, und daß man zwo dieser Verhältnisse zusammen setzen müsse, die Verhältniß 1:4 heraus zu bringen. Eben so zeiget der Bruch $\frac{7}{3}$ unter 128 an, daß man die einfache Verhältniß 1:8 in drey gleiche Verhältnisse 1:2 zerfällen, und sieben solche Verhältnisse zusammen setzen müsse, damit die Verhältniß 1:128 entstehe.

§. 149. Es misset oder zehlet also jede Zahl, welche unter einem Glied der Geometrischen Reihe stehet, würklich die Verhältniß der Einheit zu dem Glied der Reihe, unter welchem sie stehet, und das Maaß, dessen man sich dazu bedienet, ist die Verhältniß, welche man als ganz und einfach angenommen hat. Die unter den Gliedern der Geometrischen Reihe stehende Zahlen sind demnach die würklichen Logarithmen oder Verhältnißzahlen, welche die Verhältniß der Einheit zu den Gliedern, unter welchen sie stehen, ausdrücken. Die Zahl $\frac{1}{3}$ ist der Logarithmus der Verhältniß 1:2, die Zahl $\frac{2}{3}$ ist der Logarithmus der Verhältniß 1:4, und so weiter. Alles dieses ist wieder richtig, wenn man diese Verhältnisse umkehret, und machet daß die grössern Glieder vorher gehen, und die kleinern darauf folgen.

§. 150. Man pfleget eben diese Zahlen auch Logarithmen der Glieder der Geometrischen Reihe selbst zu nennen, unter welchen sie stehen, und dieser Benennung zu folge müssen wir sagen: es sey bey der angenommenen einfachen Verhältniß 1:8 die Zahl 2 der Logarithmus zu 64. Dieses ist etwas undeutlich gesprochen. Denn was sol dieses sagen, 2 sey die Zahl der Verhältniß zu 64 oder von 64? Eine jede Verhältniß erfordert ja zwey Glieder. Es verhält sich dieses in der That nicht anders, aber es wird in diesem Fall, wenn man den Logarithmus einer Zahl nennet, das erste Glied der Verhältniß verschwiegen, weil es allezeit die Einheit ist, und nach dieser Erinnerung man es in allen Fällen anzugeben weiß. Kurz der Logarithmus einer Zahl heisset nichts anders, als der Logarithmus der Verhältniß der Einheit zu dieser Zahl. In unserm Exempel ist $\frac{7}{3}$ der Logarithmus zu 128, das ist, der Logarithmus der Verhältniß 1:128. Gemeiniglich nehmen gute Schriftsteller die einfache Verhältniß so, daß die Einheit die zweyte Stelle bekommt, da dann der Logarithmus einer jeden Zahl, der Logarithmus der Verhältniß derselben Zahl zu

der Einheit ist; und, zum Beyspiel, der Logarithmus der Verhältniß 8 : 1, auch der Logarithmus der Zahl 8 genennet wird. Doch dieses verändert in dem ganzen Vortrage so wenig, daß wir nicht nöthig achten, deswegen von den Begriffen abzugehen, welche uns zuerst beygefallen sind: und wir erinnern dieses nur deswegen, damit diese kleine Verschiedenheit niemanden aufhalten möge.

XIII. Abschnitt.

§. 151. Man siehet übrigens leicht, daß man die Logarithmen der Zahlen auch durch andere Brüche von andern Benennern ausdrücken könne, wenn nur diese Brüche denjenigen, durch welche sie ausgedrucket sind, gleich genommen werden. Wir wollen dieses thun, und uns dazu der Decimalbrüche bedienen: so bekommen die Logarithmen, welche wir zum Exempel angenommen haben, mit denjenigen, die bereits berechnet sind, und derer man sich gemeiniglich bedienet, eine desto grössere Aehnlichkeit.

Zahl.	Logarithmus.
1	0, 000
2	0, 333
4	0, 667
8	1, 000
16	1, 333
32	1, 667
64	2, 000
128	2, 333
256	2, 667
512	3, 000
1024	3, 333
2048	3, 667
4096	4, 000

Es ist bey einer Tafel, welche bloß zum Exempel dienen sol, nicht nöthig, daß wir die Logarithmen genauer ausdrücken. Der Logarithmus von 2 ist eigentlich $\frac{1}{3} = 0,333333$, und so fort ohne Ende, und derjenige welchen wir gesetzt haben 0,333 ist demnach zu klein. Hingegen ist der Logarithmus von 4 eigentlich 0,6666 und so immer fort ohne Ende, und demnach ist derjenige, welchen wir in die Tafel gebracht haben 0,667 etwas zu groß. Es kan aber dieses keinen sonderlichen Fehler in der Anwendung bringen, wenigstens erreichen wir unsern

XIII. Abschnitt. unsern gegenwärtigen Zweck durch die Tafel, wie sie ist, vollkommen.

§. 152. Es ist gar leicht aus einer solchen Tafel den Logarithmus einer jeden Verhältniß zu finden, deren Glieder unter den Zahlen der Tafel vorkommen. Denn wenn erstlich das vordere Glied der Verhältniß kleiner ist als das hintere, als wenn die gegebene Verhältniß diese ist 4 : 512, deren Glieder beyde in der Tafel vorkommen, so suche man nur den Logarithmus des vordern Gliedes 4, welcher ist 0, 667, wie auch den Logarithmus des hintern Gliedes 512, dieser ist 3, 000. Man ziehe den Logarithmus des vordern Gliedes von dem Logarithmus des hintern ab, der Unterschied 2, 333 ist der Logarithmus der Verhältniß 4 : 512. Denn der Logarithmus dieser Verhältniß wird aus dem Abstand des vordern Gliedes derselben von dem hintern in der Tafel ermessen, und die Zahl, welche diese Entfernung ausdrücket, ist eben der Logarithmus der gegebenen Verhältniß. XIII, 143. Nun wird der Abstand des ersten Gliedes 4 von der Einheit, durch den Logarithmus desselben 0, 667 ausgedrücket, wie aus der Verfertigung der Tafel klar ist, und den Abstand des letztern Gliedes 512 von der Einheit zeiget ebenfals der Logarithmus desselben 3, 000 an. Es wird aber der Abstand des zweyten Gliedes der Verhältniß 4 : 512 von dem ersten gefunden, wenn man von der Entfernung des zweyten Gliedes von der Einheit, die Entfernung des ersten Gliedes von der Einheit abziehet. Der Ueberschuß von dieser Subtraction ist demnach der gesuchte Logarithmus der gegebenen Verhältniß. Und zehlet man in der Tafel nach, so siehet man deutlich, daß in derselben die Zahl 512 von der 4 um 2, 333 oder um $2\frac{1}{3}$ Glieder entfernet sey, wenn man sich nur erinnert, daß man die Verhältniß eines jeden Gliedes der Geometrischen Reihe zu demjenigen, so von demselben das dritte ist, als einfach angenommen hat, XIII, 148. woraus folget, daß man die Entfernung eines Gliedes von demjenigen, so unmittelbar vorher gehet durch $\frac{1}{3}$ ausdrücken müsse. Es stehen von 4 an bis 512 in der Tafel eigentlich 7 Glieder, die Entfernung also der Zahl 512 von 4 beträgt $\frac{7}{3}$ das ist $2\frac{1}{3}$, und dieses ist der gefundene Logarithmus der Verhältniß 4 : 512. Man kan zur deutlichern Einsicht dieser Dinge, mit andern Zahlen eben dergleichen Versuche anstellen.

§. 153. Ist aber zweytens das vordere Glied der Verhältniß grösser als das hintere, so findet man den Logarithmus desselben zwar ebenfals nach der gegebenen Regel. Allein weil in diesem Fall auch der Loga-

Logarithmus des vordern Gliedes grösser ist als der Logarithmus des hintern, so kan man jenen nicht von diesem abziehen. Man wird also zwar den kleinern Logarithmus von dem grösten abziehen, dem Ueberschuß aber das Zeichen — beysetzen müssen, wenn man den Logarithmus der gegebenen Verhältniß heraus bringen wil. Mit einem Wort, da der Logarithmus der Verhältniß 4:512, wie wir gesehen haben: 2,333 ist, so ist der Logarithmus der Verhältniß 512:4 zwar von eben der Grösse, er hat aber das gegenseitige Zeichen, und da man jenen gemeiniglich als mit + bezeichnet sich vorstellet, so ist der Logarithmus der Verhältniß 512:4 dieser, — 2,333.

§. 154. Es ist nicht schwer dieses in ein vollkommenes Licht zu setzen. Die Zahl 4 ist in der Tafel von 512 um so viele Glieder entfernet, als viele der Glieder sind, um welche die letztere 512 von der erstern 4 entfernet ist. Also kan der Logarithmus der Verhältniß 512:4 von dem Logarithmus der Verhältniß 4:512 der Grösse nach nicht verschieden seyn. Allein wenn man in der Tafel von 4 bis an 512 zehlet, so zehlet man $2\frac{1}{3}$ Glieder vorwärts, und von 512 bis an 4 stehen eben so viele Glieder rückwärts. Demnach ist der Abstand des Gliedes 4 von 512 mit — zu bezeichnen, da man den Abstand des Gliedes 512 von 4 sich als mit + bezeichnet, vorstellet.

§. 155. Hieraus siehet man so gleich, daß, da wir bey Verfertigung unserer Tafel, vor den Logarithmus der Verhältniß 1:8 die Einheit angenommen, im Gegentheil der Logarithmus der Verhältniß 8:1, in welcher die Glieder der vorigen in verkehrter Ordnung stehen, —1 seyn werde, und daß, da der Logarithmus der Verhältniß 1:16 war 1,333 oder $1\frac{1}{3}$, im Gegentheil der Logarithmus 16:1 seyn werde — 1,333, oder — $1\frac{1}{3}$, und so in allen übrigen Fällen. Siehet man aber den Logarithmus der Verhältniß 8:1 oder einer jeden andern, bey welcher das zweyte Glied der Einheit ist, als mit + bezeichnet an, so bekommt der Logarithmus der Verhältniß 1:8, das gegenseitige Zeichen —.

§. 156. Dieses kan uns weisen, wie die Logarithmen der Brüche zu bestimmen sind, welche weniger sind als 1, und uns einen Zweifel benehmen, welcher in der Anwendung vorfallen kan, wenn wir auf Logarithmen kommen, welche mit — bezeichnet sind, und welche zu solchen Verhältnissen gehören, deren vorderstes Glied nach unserm Vortrag, die Einheit ist. Da in diesem Fall das zweyte Glied kleiner seyn muß als die Einheit, so kan es scheinen, als ob solche Logarithmen

XIII. Abschnitt.

rithmen eine Tafel erforderten, welche vor die Einheit, in die Brüche, zurück geführet ist. Und in der That verhält sich die Sache so: wir werden aber so gleich zeigen, daß eine dergleichen Tafel, als diejenige ist, welche wir zum Exempel hieher gesetzet haben, gar wohl die Stelle derselben vertreten kan.

§. 157. Man führe nemlich die Geometrische Progression $1:2$ vor die Einheit zurück, so werden die Glieder derselben $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, und so fort, und die Progression stehet zu beyden Seiten der Einheit in folgender Gestalt:

$$\tfrac{1}{64},\ \tfrac{1}{32},\ \tfrac{1}{16},\ \tfrac{1}{8},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{2},\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,$$

Wenn man nur einiger massen darauf Acht hat, wie die Glieder einer Geometrischen Reihe heraus gebracht werden, so siehet man so gleich, daß in den Nennern der Brüche, die die Glieder der Reihe vor der Einheit ausmachen, eben die Zahlen in eben der Ordnung vorkommen müssen, welche die Glieder der Reihe nach der Einheit ausmachen. Was aber die Logarithmen anlanget, welche zu diesen gebrochenen Zahlen gehören, so ist der Logarithmus der Verhältniß $1:\frac{1}{8}$ ohnfehlbar dem Logarithmus der Verhältniß $8:1$ gleich, weil diese Verhältnisse einander gleich sind: und wenn wir also den Logarithmus der Verhältniß $8:1$ bestimmen, so haben wir auch den Logarithmus der Verhältniß $1:\frac{1}{8}$, das ist, den Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{8}$. XIII, 150. Nun ist der Logarithmus der Verhältniß $8:1$ wie wir gesehen haben -1. Eben dieser ist also auch der Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{8}$, und so ist es mit den übrigen Logarithmen aller Brüche. Der Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{2}$, oder der Verhältniß $1:\frac{1}{2}$ ist $-\frac{1}{3}$, weil der Logarithmus der Verhältniß $2:1$ diese Grösse $-\frac{1}{3}$ hat, und weil $2:1 = 1:\frac{1}{2}$. Der Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{4}$, oder der Verhältniß $1:\frac{1}{4}$ ist $-\frac{2}{3}$, weil der Logarithmus der Verhältniß $4:1$ in unserm Täfelchen $-\frac{2}{3}$ ist, und weil $1:\frac{1}{4} = 4:1$. Eben so ist es beständig, und es würde demnach die vor die Einheit zurück geführte Tafel in folgender Gestalt erscheinen:

Zahl.	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{8}{1}$	$\frac{16}{1}$	$\frac{32}{1}$	$\frac{64}{1}$
Logarithmus.	-2	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$+\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$+1$	$+\frac{4}{3}$	$+\frac{5}{3}$	$+2$

§. 158. Man siehet aber aus diesem gar leicht, daß dieses nur eine Wiederholung eben der Tafel mit sehr wenig veränderten Umständen seyn würde, und daß man die Zahl, welche zu einem Logarith-

mus

mus gehöret, welcher mit — bezeichnet ist, gar leicht finden kan, wenn man nur in der Tafel diejenige Zahl findet, welche zu eben dem Logarithmus gehöret, wie er da stehet, und da man sich diese Zahl als einen Bruch vorstellen kan, von welchem der Nenner die Einheit ist, diesen Bruch umkehret, so daß nunmehro der Zehler die Einheit wird. Wir haben, dieses desto deutlicher zu zeigen, in dem Täfelchen des letzten Absatzes, die ganze Zahlen in Form dergleichen Brüche geschrieben. Es ist in dieser Tafel, welche im Grunde mit der vorigen einerley ist, +2 der Logarithmus zu der Zahl $\frac{64}{1}$, also ist —2 der Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{64}$. Eben so ist $\frac{5}{3}$ oder 1, 667 der Logarithmus zu $\frac{32}{1}$; also ist $-\frac{5}{3}$ oder —1,667 der Logarithmus zu $\frac{1}{32}$.

Gebrauch der Logarithmen.

§. 159. Nunmehro können wir die Anwendung dieser Lehre auf die gemeinste Rechnungsarten weisen, welche vermittelst der Logarithmen zu verrichten sind, wobey wir uns bloß unserer kleinen Tafel XIII, 151. bedienen werden, weil in der That der Gebrauch einer jeden andern Tafel, von dem Gebrauch derselben, gar nicht verschieden ist. Es seyn A und B zwo Zahlen, welche in der Tafel vorkommen, deren Verhältniß A : B man sich vorstellet. lA bedeutet den Logarithmus, welcher zu der Zahl A gehöret, und in der Tafel neben derselben stehet, und lB bedeute den Logarithmus von B. Der Logarithmus der Verhältniß A : B hingegen werde durch $l\overline{A:B}$ bezeichnet. Da wir nun XIII, 152. gesehen haben, daß der Logarithmus einer jeden Verhältniß gefunden werde, wenn man den Logarithmus des ersten Gliedes derselben von dem Logarithmus des zweyten Gliedes abziehet, es mag nun das erste oder das zweyte Glied das grössere seyn: so siehet man leicht, daß diese Gleichung $l\overline{A:B} = lB - lA$ allzeit richtig seyn werde. Bedeuten nun C und D zwo andere Zahlen, welche in eben der Tafel vorkommen, und deren Logarithmen folglich bekant sind, weil sie in der Tafel neben den Zahlen stehen, so ist wiederum $l\overline{C:D} = lD - lC$.

§. 160. Man setze, daß die zwo Verhältnisse A : B und C : D einander gleich seyn, und daß also die Proportion A : B = C : D ihre Richtigkeit habe: so sind auch die Logarithmen dieser Verhältnisse einander gleich, weil in einerley Tafel allzeit gleiche Verhältnisse gleiche Logarithmen haben, das ist, es ist $l\overline{A:B} = l\overline{C:D}$. Demnach ist auch $lB - lA = lD - lC$, weil diese nichts anders sind als die Logarithmen der

XIII. Abschnitt.

gleichen Verhältnisse, $\overline{lA:B, lC:D}$. Setzet man aber zu den beeden Gliedern dieser Gleichung $lB-lA=lD-lC$ den lC hinzu, so findet man $lB+lC-lA=lD$.

§. 161. Diese Regel enthält alles, was von dem Gebrauch der Logarithmen hauptsächlich zu wissen nöthig ist. Wir haben angenommen, daß die vier Zahlen A, B, C und D proportional seyn, und daß folgends D die vierte Proportionalzahl zu den dreyen A, B und C sey, und haben nach richtigen Gründen schliessen können: es sey $lD=lB+lC-lA$, das ist, es entstehe der Logarithmus der vierten Zahl D, wenn man von der Summe der Logarithmen der zweyten und dritten $lB+lC$ den Logarithmus der ersten lA abziehet. Demnach kan man den Logarithmus der vierten Proportionalzahl D leicht finden, wenn man die Logarithmen der drey ersten A, B und C hat. Diese aber stehen in der Tafel neben den Zahlen, und werden gegeben so bald die Zahlen gegeben sind. Und wiederum findet man vermittelst der Tafel die Zahl, welche zu einem Logarithmus gehöret, gar leicht. Man kan demnach vermittelst der Logarithmentafel zu drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl, bloß vermittelst der Addition und Subtraction, finden.

§. 162. Es sey zum Beyspiel zu den dreyen Zahlen 16, 512 und 128 die vierte Proportionalzahl zu finden, so bedeutet A nunmehro 16, lA stehet in der Tafel neben 16, und ist also $lA=1,333$; B bedeutet 512, und lB ist in der Tafel 3,000. Ferner bedeutet C die Zahl 128 und lC ist 2,333. Endlich bedeutet D die vierte Proportionalzahl welche man suchet, und lD ihren Logarithmus. Da nun $lD=lB+lC-lA$, so setze man

$lA=l.16=1,333$
$lB=l.512=3,000$
$lC=l.128=2,333$, und mache
$lB+lC= \quad 5,333$, und ferner
$lB+lC-lA= 4,000$, so hat man lD, gleich dieser letzt gefundenen Zahl 4,000. Da nun neben denselben in der Tafel die Zahl 4096 stehet, so ist diese die vierte Proportionalzahl D, welche man suchte.

§. 163. Man siehet leicht, was vor grosse Mühe man durch diese Rechnungsart ersparet, insonderheit wenn die gegebene Zahlen etwas

groß

gross sind. Es sey in einem andern Exempel $A = 1024$, $B = 32$ und $C = 4$, so ist.

$$lA = l.1024 = 3,333$$
$$lB = l.32 = 1,667$$
$$lC = l.4 = 0,667, \text{ folgends}$$
$$lB + lC = 2,333$$
$$lB + lC - lA = -1,000$$

Es ist nemlich hier der lA, welcher von der Summe $lB + lC$ abzuziehen war, grösser als diese Summe. Man muß demnach zwar die kleinere Summe $lB + lC$ von der grössern lA abziehen, aber dem Ueberbleibsel das Zeichen — geben. Daß wir aber vor dieses Ueberbleibsel 1,000 setzen, geschiehet, weil unsere Logarithmen um so vieles fehlen, wie oben XIII, 151. angemerket worden ist. Es ist also $lD = -1,000$. Nun ist die Zahl, welche zu 1,000 gehöret, in unserer Tafel 8 oder $\frac{8}{1}$. Zu $-1,000$ gehöret also der Bruch $\frac{1}{8}$, XIII, 157. und dieser ist die vierte Proportionalzahl, welche man suchte.

§. 164. Wenn das erste Glied der Proportion A die Einheit ist, so ist die vierte Proportionalzahl D das Product aus den zwo mittlern C und D, und demnach $lD = lC + lD$, weil der Logarithmus der Einheit nichts ist. Wir wollen grösserer Deutlichkeit halber die Rechnung wie vorher setzen. Es sey $B = 16$, und C sey $= 128$, so ist

$$lA = l.1 = 0,000$$
$$lB = l.16. = 1,333$$
$$lC = l.128 = 2,333$$
$$lB + lC = 3,666$$
$$lB + lC - lA = 3,666 = lD.$$

Demnach ist $D = 2048$, und man findet allzeit den Logarithmus des Products, wenn man die Logarithmen der Factoren addiret, woraus so dann das Product selbst vermittelst der Tafel leicht zu haben ist.

§. 165. Ist eines von den zwey mittlern Gliedern der Proportion als B, die Einheit, so ist das vierte Glied der Proportion, D der Quotient, der vermittelst der Division des andern mittlern Gliedes C durch das erstere A gefunden wird. Weil nun hier $lB = 0$, so wird $lD = lC - lA$, das ist, der Logarithmus des Quotienten bleibt übrig, wenn man den Logarithmus des Theilers von dem Logarithmus der Zahl abziehet, welche zu theilen ist. Wir wollen auch hier dergestalt verfahren,

XIII. Abschnitt.

als ob wir die vierte Proportionalzahl zu den dreyen $A=32$, $B=1$, und $C=2048$ zu suchen vor hätten, so ist:

$$lA = l.32 = 1,667$$
$$lB = l.1 = 0,000$$
$$lC = l.2048 = 3,667,$$ folgends ist
$$lB + lC - lA = 2,000 = lD,$$ und demnach ist
$D=64$.

§. 166. Wil man von einer Zahl, so in der Tafel vorkommt, die Quadratzahl machen, so ist nur der Logarithmus derselben zwey mal zu nehmen. der Logarithmus, welcher dergestalt heraus gebracht wird, ist der Logarithmus der Quadratzahl, welche man suchte. Man siehet dieses so gleich aus demjenigen, so XIII, 164. von der Multiplication gewiesen worden ist. Wenn aus der Zahl B die Quadratzahl verfertiget werden sol, so muß man B in B multipliciren, und folgends lB zu lB addiren, damit man den Logarithmus des Quadrats erhalte. Es ist aber $lB + lB = 2lB$. Der Logarithmus von 32 ist 1,667. Nimt man diesen gedoppelt, so ist 3,334 der Logarithmus von 1024, und dieses ist die Quadratzahl der Wurzel 32. Also ist hinwiederum bloß der Logarithmus der Quadratzahl durch 2 zu dividiren, wenn man den Logarithmus der Wurzel haben wil. Der Logarithmus 4,000 halb genommen ist 2,000, und dieses ist der Logarithmus zu 64, welche Zahl demnach die Quadratwurzel von 4096 ist, zu welcher der Logarithmus 4,000 gehöret.

§. 167. Eine Cubiczahl heraus zu bringen, multipliciret man die Quadratzahl durch die Wurzel: Also muß man den Logarithmus der Quadratzahl zu dem Logarithmus der Wurzel setzen, wenn man den Logarithmus der Cubiczahl haben wil. XIII, 164. Da nun der Logarithmus der Quadratzahl zwey mal so groß ist, als der Logarithmus der Wurzel, so wird der Logarithmus der Cubiczahl drey mal so groß. Und man darf also bloß den Logarithmus der Wurzel durch 3 multipliciren, wenn man den Logarithmus der Cubicwurzel haben wil. Der Logarithmus zu 4 ist in unserer Tafel 0,667, dieser drey mal genommen giebt 2,001 oder 2,000; und dieser Logarithmus gehöret zu 64, welche Zahl also die Cubiczahl von 4 ist.

§. 168. Wil man also wieder umgekehrt aus dem Logarithmus der Cubiczahl den Logarithmus der Wurzel haben, so muß man den Logarithmus der Cubiczahl durch 3 dividiren. Der Quotient ist der verlangte

langte Logarithmus der Cubicwurzel. In unserer Tafel stehet bey der Zahl 4096 der Logarithmus 4,000, dieser durch 3 getheilet giebt 1,333, bey welchem der Logarithmus 16 stehet. Es ist also 16 die Cubicwurzel von 4096.

§. 169. Diese Regeln sind allgemein. Der Logarithmus der vierten Dignität einer Zahl ist vier mal so groß, als der Logarithmus der Wurzel, und folgends ist der Logarithmus der Wurzel der vierten Dignität der vierte Theil des Logarithmus dieser Dignität. Ist die Wurzel A, und hat man dieselbe zu der Dignität erhoben, deren Exponent n ist, so ist $lA^n = nlA$, und folgends $\frac{lA^n}{n} = lA$. Das ist, es kommt der Logarithmus der Dignität lA^n, wenn man den Logarithmus der Wurzel lA durch den Exponenten der Dignität n multipliciret: und aus dem Logarithmus der Dignität lA^n entstehet der Logarithmus der Wurzel lA, wenn man den erstern durch den Exponenten der Dignität n dividiret, deren Wurzel man schaffen sol.

§. 170. Man kan dieses unter andern gebrauchen, die Logarithmen der zusammen gesetzten Zahlen, aus den Logarithmen der einfachen Zahlen zu finden, so bald man diese erhalten. Denn alle zusammen gesetzte Zahlen entstehen, wenn man die einfachen in einander multipliciret, II, 54. so entstehen ihre Logarithmen, wenn man die Logarithmen der einfachen Zahlen addiret. Man stelle sich den Logarithmus von 2 unter $l2$ vor, und den Logarithmus von 3 bedeute man mit $l3$, so ist $l.2\times3$, das ist $l6 = l2 + l3$. Dieses erleichtert die Arbeit in Erfindung der Logarithmen ungemein. Denn es ist dieselbe nicht so leicht, als man sich dieselbe vielleicht bey dem ersten Anblick vorstellet.

Von der Berechnung der Logarithmen.

§. 171. Es war uns gar leicht, eine Logarithmische Tafel anzufangen, und bis zu gar grossen Zahlen fortzusetzen. Wirft man aber die Augen auf dieselbe zurück, so siehet man so gleich, daß in derselben gar wenige Zahlen enthalten sind. Die 3 ist nicht in derselben befindlich, auch nicht die 5, die 6 und 7. Zwischen der nächsten Zahl, so in der Tafel vorkommt 8, und der darauf folgenden 16, stehen noch mehr Zahlen, welche die Tafel nicht enthält, und dieses gehet immer weiter. Es wäre demnach eine solche Tafel von gar geringem Gebrauch: als welche bloß dienen könte, die Logarithmen solcher Zahlen zu finden, welche

XIII. Abschnitt. che die vierte Proportionalzahlen zu dreyen andern, die sämtlich in der Tafel zu finden sind, abgeben.

§. 172. Zwar könte man die Tafel erweitern, und in dieselbe gar viele ganze Zahlen bringen, ohne sich auf was anders zu gründen, als das, so wir bishero zu erklären bemüht gewesen. Man müste also verfahren. Das zweyte Glied der geometrischen Reihe, welche von der 1 anfängt, müste man nur um einen gar kleinen Bruch grösser annehmen als die Einheit, zum Exempel 1,0001, und die Verhältniß 1:1,0001 vor einfach, oder auch, als aus zwey oder drey oder vier gleichen Verhältnissen zusammen gesetzt, ansehen. Wir wollen das letzte behalten, so ist 4 der Logarithmus der Verhältniß 1:1,0001 oder der Zahl 1,0001. So bald man dieses angenommen, müste man aus der Verhältniß 1:1,0001 durch die gewöhnlich wiederholte Multiplication eine geometrische Reihe machen, zu deren Gliedern man so dann die Logarithmen leicht schreiben könte. Die Glieder dieser Reihe würden folgende seyn, 1;1,0001; 1,00020001; 1,000300030001; 1,0004000600040001, und ihre Logarithmen wären 0,4,8,12,16 und so fort. Dieses würde eine ungeheure Tafel geben: aus welchen man so dann bloß die ganze Zahlen nehmen, und mit ihren Logarithmen besonders schreiben müste. Denn die Weitläuftigkeit wäre gar zu groß, wenn man auch die Brüche behalten wolte. Eine dergleichen Tafel, welche eigentlich nur ein Auszug aus einer viel weitläuftigern Logarithmentafel wäre, würde nicht viel anders aussehen, als die gemeinen Logarithmen Tafeln, der wir uns bedienen. Wer siehet aber nicht, daß dieses eine Arbeit geben würde, welche zu unternehmen sich schwerlich jemand entschliessen wird.

§. 173. Wir müssen also noch zeigen, wie die Logarithmen auf eine leichtere Art zu berechnen sind. Denn ob zwar diese Arbeit bereits verrichtet ist, und wir ziemlich weitläuftige Tafeln der Logarithmen würklich haben, so gebraucht man doch vors erste die Logarithmen mit grösserer Einsicht und mit grösserer Sicherheit, wenn man auch die Rechnung derselben verstehet, und vors zweyte kan man, so oft es Noth thut, die Fehler, welche etwa in einer Tafel eingeschlichen seyn möchten, verbessern. Ob zwar übrigens diese Lehre ganz in die Arithmetic gehöret, und zu deren Abhandlung aus der Geometrie nichts erfordert wird: so wollen wir doch uns einer Figur dabey bedienen, und auf die Betrachtung derselben dasjenige, so wir zu zeigen haben, gründen: theils, weil dadurch alles leichter einzusehen ist, und theils, weil

wir

wir damit zugleich einige Begriffe beybringen werden, welche zwar in denjenigen Theil der Geometrie nicht gehören, den wir abzuhandeln uns vorgesetzt haben, aber doch in der Anwendung gar grossen Nutzen haben.

Die Logarithmische Linie.

§. 174. Man nehme auf einer geraden Linie VY, zu beyden Seiten von A gleiche Theile von beliebiger Grösse, und in beliebiger Zahl an, dergleichen sind AB, BC, CD, DE, wie auch Ab, bc, cd, de und so fort. Man ziehe durch A eine Linie von beliebiger Länge Aa, und durch B eine andere, welche der Aa parallel läuft, und etwas weniges grösser ist als dieselbe. Wir wollen diese Linie nur mit dem einzigen Buchstaben B bezeichnen, weil doch daraus keine Verwirrung folgen kan, und eben dergleichen wollen wir auch bey den übrigen Linien thun, welche der Aa parallel zu ziehen seyn werden, wie auch bey der Aa selbst. Man suche so dann zu den beyden Linien A und B die dritte Proportionallinie, und setze diese an C. Ferner suche man zu A, B und C die vierte Proportionallinie, oder welches auf eben das hinaus kommet, man suche zu B und C die dritte Proportionallinie, und setze dieselbe an D, und so fahre man immer fort, so daß die Linien A, B, C, D, E &c. eine geometrische Progression ausmachen. Auf eben die Art gehe man von der A nach der anderen Seite V zurück. Man suche zu B und A die dritte Proportionallinie, und setze dieselbe an b, ferner suche man zu A und b die dritte Proportionallinie, und setze sie an c, und so weiter, wodurch die Glieder der Progression erhalten werden, welcher kleiner sind als A.

F. 384.

§. 175. Man stelle sich ferner vor, daß man eine jede der kleinen Linien AB, BC, CD &c. Ab, bc, cd &c. wieder in eine beliebige Zahl gleicher Theile getheilet, und an diese Theile andere gerade Linien der Aa parallel gesetzt habe, welche in einer geometrischen Reihe zwischen A, B, C, fallen. Man kan sich dieses am leichtesten vorstellen, wenn man XIII, 147. annimt, daß jede der kleinen Linien AB, BC, CD und so fort, in zwey gleiche Theile getheilet worden, und daß an das mittelste Punct der AB man der Aa parallel, die mittlere Proportionallinie zwischen der A und B gesetzt, und an das mittelste Punct der BC die mittlere Proportionallinie zwischen der B und C, und so ferner. Und daß man so dann in dieser Arbeit noch weiter dergestalt fortgefahren, indem man nemlich die Helften dieser Linien AB, BC, CD wieder in

XIII. Abschnitt. zwey gleiche Theile getheilet, und an diese letzten Theilungspuncte andere Linien der Aa parallel gesetzt, deren jede die mittlere Proportionallinie zwischen denjenigen zwo Parallellinien ist, zwischen welchen sie stehet, und so immer fort.

§. 176. Man kan sich vorstellen, daß diese Arbeit so lang fortgesetzt worden sey, bis ein jedes der Theilchen AB, BC, &c. in mehr als hundert, oder in mehr als tausend Theilchen zertheilet worden. Hat man dieses, so stelle man sich weiter vor, daß alle Puncte, in welchen sich diese Parallellinien endigen, durch gerade Linien zusammen gezogen seyn: so siehet man leicht, daß dadurch eine Linie XZ zum Vorschein kommen werde, welche von einer wahrhaftig krummen Linie desto weniger verschieden seyn wird, je mehr der Linien sind, welche man der Aa parallel gezogen, deren äusserste Puncte eben diejenigen sind, welche diese Linie XZ bestimmen. Weil man sich dieser der Aa parallel laufenden Linien immer mehr und mehr vorstellen, und dadurch die Linie XZ einer wahrhaftig krummen Linie, die mit einer geraden nichts gemeinschaftliches hat, immer näher und näher bringen kan: so hat es kein Bedenken, daß man dieselbe vor eine eigentliche krumme Linie halten könne. Sie ist unter dem Namen der **Logarithmischen Linie** bekannt.

§. 177. Die Haupteigenschaft dieser Linie ist, daß, wenn man in der VY von der A an oder sonst, gleiche Theile nach Belieben nimt, als AE=EF, Ae=ef, und ziehet so dann durch die Puncte f, e, E, F gerade Linien, der Aa parallel, bis an die krumme Linie XZ: die Linien f, e, A, E, F in einer geometrischen Progression stehen werden. Denn, wenn erstlich die Puncte E, F, e, f unter denjenigen sind, welche man auf der Linie VY gleich Anfangs angenommen hat, und man nimmet die Verhältniß A:B vor einfach an: so siehet man leicht, daß die Verhältniß f:e aus so vielen Verhältnissen, die der Verhältniß A:B gleich sind, zusammen gesetzt sey; als viele dergleichen Verhältnisse, A:B zusammen gesetzet worden sind, um die Verhältnisse e:A oder A:E oder auch E:F heraus zu bringen: XIII, 174. woraus so gleich folget, daß die Verhältnisse f:e, e:A, A:E, E:F alle gleich sind: weil durch die Zusammensetzung einer gewissen Zahl gleicher Verhältnisse unmöglich ungleiche Verhältnisse heraus gebracht werden können. VIII, 16. Ist aber dieses, so stehen die Linien f, e, A, E, F, allerdings in einer geometrischen Progression. XIII, 81.

§. 178. Sind aber die Linien AG, GH, Ag, gh zwar wieder gleich, aber dergestalt angenommen worden, daß die Puncte derselben G, H, g, h in keines der in VY zuerst angenommenen Puncte A, B, C, D, 2 | c fallen; und man hat durch diese Puncte die geraden Linien G, H, g und h der Aa parallel gezogen: so kan man schliessen, daß diese Linien h, g, A, G, H deswegen dennoch eine geometrische Progreßion ausmachen müssen, wenn man erweget, daß man sich die kleinen Linien AB, BC alle, und folgends auch DE, in eine sehr grosse Zahl von gleichen Theilen getheilet, und durch alle diese Theilungspuncte Linien vorstelle, welche der Aa parallel liegen, und sich in der krummen Linie XZ endigen. Woraus folget, daß die Linie G entweder genau auf eine dieser Parallellinien fallen, oder doch von derselben gar wenig entfernt seyn müsse: welche Entfernung man noch so weit vermindern kan, als man wil, indem man der Theile in DE, und der Linien zwischen D und E, immer mehrere machet, bis endlich die Entfernung der Linie G von einer dieser Parallellinien zwischen D und E, keinen merklichen Fehler bringt, und also vor nichts gehalten werden kan. Und eben dieses ist auch von den übrigen Linien H, g, h zu sagen. Also sind wir wieder in dem vorigen Fall, da nemlich gesetzt wird, es sey die Linie VY in gleiche Theile getheilet, durch ein jedes dieser Theilungspuncte sey eine gerade Linie der Aa parallel gezogen, welche sich in der krummen Linie XZ endiget, unter diesen Linien seyn h, g, G, H, und es sey hg = gA = AG = GH. Es wird demnach auch hier der vorige Schluss statt finden, daß nemlich die Linien h, g, A, G, H in einer geometrischen Progreßion stehen.

XIII. Abschnitt.

§. 179. Hieraus nun siehet man, daß die Figur, welche wir betrachten, die Stelle unendlich vieler Logarithmentafeln vertrete. Denn wenn man in derselben die Linien A, B, D und so fort durch Zahlen ausdrücket, welche sich auf eine beliebige Einheit beziehen, aus welcher man diese Linien misset: stellet sich aber vor, daß die Verhältniß A : B die einfache, und folgends AB die Einheit sey, vermittelst welcher man die Theile der Linie VY misset: so ist zu der Verhältniß A : E = E : F = f : e = e : A der Logarithmus AE = 4, und man bekommt dadurch eine Tafel, welche man so gleich verändert, wenn man sich die Verhältniß A : B als gedoppelt, oder als aus drey gleichen Verhältnissen zusammen gesetzt, vorstellet, deren eine die einfache sey. Wird der dritte Theil der AB vor die Einheit angenommen, so ist der Logarithmus der Verhältniß A : B die Zahl 3, folgends bekomt die Verhältniß A : E =

E:F=f:e=e:A den Logarithmus 12. Und man kan auf die Art, mit Beybehaltung der Zahlen, welche die Linien f, e, A, E, F ausdrücken, die Logarithmische Tafel ohne Aufhören verändern. Weil aber auch die der Aa parallel laufende Linien nach und nach alle Grössen bekommen, welche eine Linie haben kan, so sind aus dieser Figur, wenn man sie zu beyden Seiten fortsetzet, und diese Parallellinien durch Zahlen ausdrücket, die Logarithmen aller Zahlen zu haben, welche man sich nur vorstellen wil.

§. 180. Man würde wenig Richtiges erhalten, wenn man sich zur Verfertigung dieser Tafel des Cirkels und der Eintheilung der Linien bedienen, und die Tafel also aus der Figur abnehmen wolte. Man müste zu dem Ende folgender gestalt verfahren. Wenn man aus den angenommenen Logarithmen, die Zahlen finden wolte, so müste man den Logarithmus einer Verhältniß A:F zum Exempel von beliebiger Grösse nehmen, als 24, und in so viele gleiche Theile müste man die Linie AF eintheilen. Wolte man so dann die Zahl haben, deren Logarithmus 11 ist, so müste man von A nach F eilf Theile der Linie AF tragen. Diese 11 Theilchen machen in unserer Figur die Linie AG aus. Man müste so dann durch G eine Linie der Aa parallel ziehen, und dieselbe aus der A als der Einheit messen. Die Zahl, welche die Linie G ausdrücket, würde die gesuchte Zahl seyn, die zu den Logarithmus AG=11 in einer Tafel gehöret, in welcher der Logarithmus der Zahl, welche F aus der Einheit A ausdrücket, 24 ist.

§. 181. Im Gegentheil müste man aus einer gegebenen Verhältniß *m*:*n* den dazu gehörigen Logarithmus also finden. Man müste wieder den Logarithmus einer andern Verhältniß A:F nach Belieben nehmen, als=24: so dann müste man zu *m*, *n*, und der A die vierte Proportionalzahl finden, welche wir G nennen; diese G müste man zwischen der VY und XZ der Aa parallel legen: so wäre der Logarithmus der Verhältniß *m*:*n* die Zahl welche sich zu der 24 eben so verhält wie AG zu AF, und folgends in unserer Figur 11. Ein kleines Nachdenken kan diese Sachen vollkommen klar machen, und zugleich zeigen, daß diese Art, die Logarithmen der gegebenen Zahlen, und die Zahlen aus den gegebenen Logarithmen zu finden, zwar leicht, aber doch allzeit mit Fehlern verknüpft sey, welche bey der Eintheilung und Messung der Linien nicht zu vermeiden sind.

§. 182. Indessen siehet man hieraus deutlich, daß in einerley Logarithmentafel der Logarithmus der Verhältniß A:D sich zu den Loga-

Logarithmus der Verhältniß A:F verhalte, wie sich AD zu AF verhält. Und daß in zwo verschiedenen Tafeln sich die Logarithmen, die zu einerley Verhältniß A:D gehören, wie die Zahlen der Theile verhalten, die man sich in der AD vorstellet. Nemlich, der Logarithmus der Verhältniß A:D in der ersten Tafel, verhält sich zu den Logarithmus eben der Verhältnis A:D in der andern, wie die Zahl der Theile, welche man der AD bey Verfertigung der ersten Tafel gegeben hat, zu der Zahl der Theile von eben der Grösse, welche man der AD bey Verfertigung der zweyten Tafel gegeben. Und eben so verhalten sich auch die Logarithmen einer jeden andern Verhältniß als A:F in den zwo Tafeln. Denn wenn n die Zahl der Theile ist, welche man der AD in der ersten Tafel gegeben hat, und man machet $AD:AF=n:m$, so ist m die Zahl der Theile der AF in der ersten Tafel, und folgends der Logarithmus der Verhältniß A:F in dieser Tafel. Ist nun N die Zahl der Theile, die man der AD in der andern Tafel gegeben, und man machet wieder $AD:AF=N:M$, so ist M der Logarithmus der Verhältniß A:F in der andern Tafel. Vergleichet man diese Verhältnisse, so findet man $n:m=N:M$, und folgends $n:N=m:M$, welches dasjenige ist, so wir erweisen solten, daß nemlich jede zween Logarithmen, die zu einerley Verhältnissen und zwo verschiedenen Tafeln gehören, einerley Verhältniß gegen einander haben.

XIII. Abschnitt.

§. 183. Es können nach diesen Sätzen aus einer Logarithmentafel deren so viele verfertiget werden, als man nur haben wil. Dieses wäre eine ziemlich unnöthige Arbeit, wenn man sie würklich unternehmen wolte: indessen kan man sich ohne der Einsicht derselben eines vollkommenen Verstandes dieser Dinge nicht rühmen. Und sie trägt auch würklich etwas zur Berechnung der Logarithmen bey. Diese Berechnung selbst aber gründet sich unmittelbar auf nachfolgende Betrachtung. Nachdem man Aa, Dd und Ff an eine Logarithmische Linie nach Belieben gezogen, und AD in eine grosse Menge gleicher Theile getheilet hat, deren Zahl m ausdrücket, von welchen Theilchen das erste AI ist, so theile man auch AF in eben so viele Theilchen, und das erste dieser Theilchen sey AK. Weil nun $AD=m\times AI$, und $AF=m\times AK$; so ist $AD:AF=m\times AI:m\times AK$. Da nun aber AD zu AF sich verhält, wie der Logarithmus der Verhältniß Aa:Dd zu den Logarithmus der Verhältniß Aa:Ff, XIII, 82. so verhält sich auch AI zur AK wie der Logarithmus der Verhältniß Aa: Dd zu den Loga-

F. 385.

 rith-

XIII. Abschnitt. rithmus der Verhältniß Aa: Ff. Man ziehe durch a die gerade Linie aL mit der AF parallel, welche die Linien Kk und Ii in L und M schneidet, so ist kaL kaum von einen geradlinichten Dreyeck zu unterscheiden, und zwar desto weniger, je kleiner AK angenommen worden ist. Denn indem Ak abnimt, wird auch der Bogen ak immer kleiner und kleiner, wodurch er auch seine Krümmung nach und nach verlieret, und einer geraden Linie immer näher kommt. Ist aber kaL ein geradlinichtes Dreyeck, so ist Mi: Lk = aM: aL = AI: AK; weil in demselben Mi der Seite kL parallel lieget, VII, 12. und aM der AI, wie auch aL der Ak gleich ist. Da sich also AI zur Ak verhält, wie der Logarithmus der Verhältniß Aa: Dd zu dem Logarithmus der Verhältniß Aa: Ff, so wird, wenn man in die Stelle AI: Ak die Verhältniß Mi: Lk setzet, auch nachfolgende Proportion Mi: Lk = $l.\overline{Aa:Dd}$: $l.\overline{Aa:Ff}$, richtig seyn: in welcher $l.\overline{Aa:Dd}$ den Logarithmus der Verhältniß Aa: Dd und $l.\overline{Aa:Ff}$ den Logarithmus der Verhältniß Aa: Ff, bedeutet.

§. 184. Wenn man demnach die Linie Mi findet, oder durch eine Zahl ausdrücket, und eben dergleichen in Ansehung der Lk verrichtet, indem man die Einheit beybehält die man angenommen hat, die Linie Mi auszudrücken, so hat man so gleich zwo Zahlen, welche sich gegen einander, wie die Logarithmen der Verhältnisse Aa: Dd und Aa: Ff verhalten. Nimt man so dann den Logarithmus der Verhältniß Aa: Dd nach Belieben an, wie man denn zu Verfertigung einer jeden Logarithmentafel den Logarithmus einer Verhältniß nach Belieben bestimmen muß: XIII, 184. so kan man so gleich den Logarithmus der Verhältniß Aa: Ff finden, wenn man schliesset Mi: Lk = $l.\overline{Aa:Dd}$: $l.\overline{Aa:Ff}$.

§. 185. Wir könten ohne Anstand weiter gehen, wenn wir bloß vorhätten zu zeigen, wie die Logarithmen gefunden werden. Da aber auch mit nicht viel grösserer Mühe zu zeigen ist, wie sie viel leichter zu finden sind, als nach einer Regel, welche bloß aus dem fliesset, so bisher gezeiget worden; so haben wir nicht umgehen wollen, die Kleinigkeiten, die noch dazu erfordert werden, mit anzuhängen: welche fast bloß in einer Wiederholung der letztern Betrachtungen, mit etwas wenig veränderten Umständen bestehen.

§. 186. Man muß zu dem Ende die Logarithmische Linie auf der

anders

andern Seite der Aa nach X fortgezogen haben. Ist dieses geschehen, so nehme man AE dergestalt, daß, wenn man durch E die Ee der Aa parallel ziehet, diese Ee von der Aa so viel unterschieden sey, als Aa von der Ff unterschieden ist, das ist, daß Aa — Ee = Ff — Aa. Man theile so dann EA wieder in eine Zahl gleicher Theile, welche der vorigen m gleich ist, in welche man AD und AF getheilet hat; und das erste dieser Theilchen sey RA, so ist wieder EA : AF = m × RA : m × AK = RA : AK, und weil auch EA : AF = $l.\overline{Ee : Aa} : l.\overline{Aa : Ff}$: so ist RA : AK = $l.\overline{Ee : Aa} : l.\overline{Aa : Ff}$. Man verlängere die Rr und La, bis sie einander in s erreichen: so fliesset aus der Aehnlichkeit der Dreyecke Sar, kaL die Proportion sr : Lk = as : aL = RA : AK. Und wenn man diese Proportion mit der vorigen vergleichet, so findet man sr : Lk = $l.\overline{Ee : Aa} : l.\overline{Aa : Ff}$. Dieses ist die Proportion, welche wir noch suchten.

XIII. Abschnitt.

§. 187. Man nenne Aa nunmehro a und den Unterschied der Linien Aa und Ee, welches zugleich der Unterschied der Linien Aa und Ff ist, weil XIII, 186. angenommen worden, daß Aa — Ee = Ff — Aa, nenne man d, so ist Ee = $a - d$ und Ff = $a + d$. Und demnach ist $l.\overline{a - d : a} : l.\overline{a : a + d}$ = sr : Lk:. Und man hat nunmehro bloß die kleinen Linien sr, Lk durch Zahlen auszudrucken, wenn man die Verhaltniß dieser Logarithmen würklich darstellen wil: woraus so dann die Logarithmen leicht gefunden werden. Wir wollen bey dem letztern Lk anfangen.

Würkliche Berechnung der Logarithmen.

§. 188. Es wird diese Lk folgender gestalt gefunden. Es ist Kk = Aa + Lk. Und indem man AF in eine Zahl von gleichen Theilen getheilet, die man sich unter m vorstellet, so siehet man, daß, wenn man auf alle Theilungspuncte der AF gerade Linien bis an die XZ zöge, gleichwie man sich Kk an das erste dieser Theilungspuncte gezogen vorstellet, die Linien Aa, Kk und so fort bis an Ff, eine geometrische Reihe ausmachen würden, deren letztes Glied Ff von dem ersten um so viel Glieder entfernet ist, als viele Einheiten in m enthalten sind, in welcher Reihe Kk das zweyte Glied abgiebt. Da wir nun Aa mit a und Ff mit $a + d$ bezeichnet haben, so ist Kk = $\overline{a + d}^{\frac{1}{m}}$;

dem

XIII. Abschnitt.

dem zu folge so bey der Betrachtung der geometrischen Reihen XIII, 132. gezeiget worden ist, und also $Lk = \overline{a+d}^{\frac{1}{m}} - a$.

§. 189. Auf eben die Art findet man auch sr. Wenn man auf alle Theilungspuncte der EA sich gerade Linien vorstellet die der Aa parallel laufen, und bis an XZ reichen, so hat man eine absteigende geometrische Progression, deren Glieder an der Zahl m sind, deren erstes Glied Aa oder a, und das letzte $Ee = a - d$ ist, und bey welcher Rr die Stelle des zweyten Gliedes vertritt. Es wird demnach dieses zweyte Glied Rr hier $\overline{a-d}^{\frac{1}{m}}$ und folgends $sr = sR - rR = a - \overline{a-d}^{\frac{1}{m}}$.

§. 190. Wir haben aber oben gewiesen, wie ein Glied einer geometrischen Reihe, welches durch $\overline{a+d}^{\frac{1}{m}}$ oder $\overline{a-d}^{\frac{1}{m}}$ ausgedrücket wird, durch eine Reihe von Zahlen so nahe angegeben werden kan, als man wil. Weil nemlich hier m gar sehr groß ist, so bedienet man sich der Regul des 138 und 139 Absatzes, in welcher $\overline{a+b}^{\frac{r}{t}} = a^{\frac{r}{t}} \times (1 + \frac{r}{t} \times \frac{b}{a} - \frac{r}{2t} \times \frac{b^2}{a^2} + \frac{r}{3t} \times \frac{b^3}{a^3}$ &c. und $\overline{a-b}^{\frac{r}{t}} = a^{\frac{r}{t}} \times (1 - \frac{r}{t} \times \frac{b}{a} - \frac{r}{2t} \times \frac{b^2}{a^2} - \frac{r}{3t} \times \frac{b^3}{a^3}$ &c. In welchen man nur an statt b die Buchstaben d, an statt t aber m, und an statt r die 1 zu setzen hat, um $\overline{a+d}^{\frac{1}{m}}$ oder $\overline{a-d}^{\frac{1}{m}}$ durch eine Reihe von Ziffern darzustellen. Es wird also:

$$\overline{a+d}^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} \times (1 + \frac{1}{m} \times \frac{d}{a} - \frac{1}{2m} \times \frac{d^2}{a^2} + \frac{1}{3m} \times \frac{d^3}{a^3} - \frac{1}{4m} \times \frac{d^4}{a^4} + \text{\&c.})$$

und

$$\overline{a-d}^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} \times (1 - \frac{1}{m} \times \frac{d}{a} - \frac{1}{2m} \times \frac{d^2}{a^2} - \frac{1}{3m} \times \frac{d^3}{a^3} - \frac{1}{4m} \times \frac{d^4}{a^4} - \text{\&c.})$$

§. 191. Es ist demnach

$$sr = a - \overline{a-d}^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}} \times (-1 + \frac{d}{ma} + \frac{d^2}{2ma^2} + \frac{d^3}{3ma^3} + \text{\&c.}) + a,$$

und

und $Lk = \overline{a+d}^{\frac{1}{m}} - a = a^{\frac{1}{m}} \times (1 + \frac{d}{ma} - \frac{d^2}{2ma^2} + \frac{d^3}{3ma^3}$ &c.$) - a$, folgends die Verhältniß $sr : Lk$ gleich der Verhältniß der Summe der Glieder der Reihe $a + a^{\frac{1}{m}} \times (-1 + \frac{d}{ma} + \frac{d^2}{2ma^2} + \frac{d^3}{3ma^3}$ &c. zu der Summe der Glieder dieser zweyten Reihe $-a + a^{\frac{1}{m}} \times (1 + \frac{d}{ma} - \frac{d^2}{2ma^2} + \frac{d^3}{3ma^3}$ &c.) Und eben so verhält sich der Logarithmus der Verhältniß $a - d : a$ zu dem Logarithmus der Verhältniß $a : a + d$. Man wird sich nach einem kleinen Nachsinnen in die Veränderung der Zeichen leicht finden können. Es gründet sich alles auf dasjenige, so wir gewiesen, und es kommet in diesen Dingen hier gar nichts neues vor.

§. 192. Multipliciret man alle Glieder der Reihen, welche die Verhältniß $sr : Lk$ ausdrücken durch m und dividiret sie durch $a^{\frac{1}{m}}$, so wird dadurch die Verhältniß nicht geändert. Die dergestalt veränderte Reihen aber, welche diese Verhältniß $sr : Lk$ ausdrucken, sind:

$$+\frac{ma}{a^{\frac{1}{m}}} - m + \frac{d}{a} + \frac{d^2}{2a^2} + \frac{d^3}{3a^3} \text{ \&c. und}$$

$$-\frac{ma}{a^{\frac{1}{m}}} + m + \frac{d}{a} - \frac{d^2}{2a^2} + \frac{d^3}{3a^3} \text{ \&c.}$$

Und weil $sr : Lk = l.\,\overline{a-d} : a : l.\,a : \overline{a+d}$, so verhält sich auch die Summe der Glieder der ersten Reihe, zu der Summe der Glieder der zweyten, wie $l.\,\overline{a-d : a}$ zu $l.\,a : a + d$.

§. 193. Weil man nun bey Verfertigung einer Logarithmen Tafel einen Logarithmus nach Belieben annehmen muß, so setze man die erste Reihe sey selbst der Logarithmus der ersten Verhältniß $\overline{a-d : d}$, so wird auch die zweyte Reihe der Logarithmus der zweyten Verhältniß, und man hat demnach:

XIII. Abschnitt.

$$l.\,\overline{a-d}:a = \frac{ma}{\frac{1}{a^m}} - m + \frac{d}{a} + \frac{d^2}{2a^2} + \frac{d^3}{3a^3} + \frac{d^4}{4a^4}\ \&c.$$

$$l.\,a:\overline{a+d} = -\frac{ma}{\frac{1}{a^m}} + m + \frac{d}{a} - \frac{d^2}{2a^2} + \frac{d^3}{3a^3} - \frac{d^4}{4a^4}\ \&c.$$

woraus man diese Logarithmen selbst finden kan. Es wird aber insonderheit alles viel leichter, wenn man a der Einheit gleich setzet. Dadurch wird der Logarithmus der Verhältniß $a-d:a = d + \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} + \frac{d^4}{4}$ &c. und der Logarithmus der Verhältniß $1:\overline{1+d}$ oder der Zahl $1+d$ wird: $d - \frac{d}{2} + \frac{d^3}{3} - \frac{d^4}{4} + \frac{d^5}{5}$ und so immer fort bis man auf Kleinigkeiten kommt, welche hier vor nichts gehalten werden können. Die Logarithmen, welche heraus gebracht werden, indem man selbst die Summe der Glieder $\frac{ma}{\frac{1}{a^m}} - m + \frac{d}{a}$ &c. vor dem Logarithmus der Verhältniß $a-d:a$ annimmet, heissen die natürlichen Logarithmen.

§. 194. Allein ob zwar diese Anweisung ungemein leichter ist als diejenige, der sich die ersten Berechner der Logarithmen bedienet haben, welche eine ungemein oft wiederholte Ausziehung der Quadratwurzel erfordert; so ist sie doch noch zu schwer, so lang eine leichtere vorhanden ist. Diese aber erhält man, wenn man die zwo Reihen, die wir eben heraus gebracht haben, vereiniget. Nemlich wenn man den Logarithmus einer Verhältniß $a-d:a$ zu den Logarithmus einer andern Verhältniß $a:a+d$ hinzu setzet, so erhält man dadurch den Logarithmus der Verhältniß, welche aus diesen beyden zusammen gesetzet ist, XIII, 184. welche in dem gegebenen Fall, da das erste Glied der ersten Verhältniß mit dem zweyten Glied der andern einerley ist, keine andere seyn kan als $a-d:a+d$. VIII, 2. Es wird demnach der Logarithmus der Verhältniß $a-d:a+d$ durch die Addition der Reihen des 192 Absatzes gefunden. Diese Addition aber bringt die Summe $\frac{2d}{a} + \frac{2d^3}{3a^3} + \frac{2d^5}{5a^5} + \frac{2d^7}{7a^7}$ &c. weil die übrigen Glieder einander aufheben.

§. 195. Es

XIII. Abschnitt.

§. 195. Es lassen sich aber jede zwo Zahlen durch $a-d$, $a+d$ ausdrucken. Denn a ist eigentlich die halbe Summe der Zahlen $a-d$ und $a+d$, weil diese Zahlen, wenn man sie addiret $2a$ geben, und d ist der halbe Unterschied derselben. Denn wenn man $a-d$ von $a+d$ abziehet, so bleibt $2d$. Wil man demnach zum Exempel den Logarithmus der Verhältniß $5:9$ nach dieser Regel finden, so ist $a = \frac{5+9}{2} = 7$, und $d = \frac{9-5}{2} = 2$. Man darf also nunmehro nur in der letzten Regel an statt des a überall 7, und an statt des d die 2 setzen, so wird der Logarithmus von $5:9$ so genau als man wil heraus gebracht.

§. 196. Man kan aber auch unter d sich den ganzen Unterschied zwoer Zahlen vorstellen, und unter a ihre ganze Summe. Denn der Bruch $\frac{d}{a}$ bedeutet nichts anders, wenn d und a zweymal mehr bedeuten, als sie vorher bedeutet, weil $\frac{2d}{2a} = \frac{d}{a}$, und also wird auch die Bedeutung der übrigen Brüche $\frac{d^3}{a^3}$, $\frac{d^5}{a^5}$, und so weiter nicht geändert, wenn man d den ganzen Unterschied und a die ganze Summe bedeuten läst. Man kan auch die 2 aus den Zehlern der Brüche der Reihe gar weglassen, und setzen, der Logarithmus der Verhältniß $\frac{a-d}{2} : \frac{a+d}{2}$ sey $= \frac{d}{a} + \frac{d^3}{3a^3} + \frac{d^5}{5a^5} + \frac{d^7}{7a^7}$ &c. Denn ob zwar dadurch ein jeder Logarithmus nur halb so groß heraus gebracht wird, als nach der vorigen Regel; so bleibt doch die Verhältniß der Logarithmen, in beyden Berechnungen einerley: worauf doch alles ankommet. Wir bleiben indessen bey der erstern Reihe, XIV, 194. Uebrigens thut man bey der würklichen Berechnung der Logarithmen am besten, wenn man die Zahlen so annimt, daß d eins werde. Dadurch wird die Arbeit ungemein erleichtert, wie ein Exempel zeigen wird.

§. 197. Es sey der Logarithmus der Verhältniß $1:2$ oder der Zahl 2 zu finden, so ist $d = 1$ und $a = 3$, und die Reihe $\frac{2d}{a} + \frac{2d^3}{3a^3} + \frac{2d^5}{5a^5} + \frac{2d^7}{7a^7} + \frac{2d^9}{9a^9}$ &c. verwandelt sich in diese nachfolgende:

XIII. Abschnitt.

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3^3} + \frac{2}{5 \cdot 3^5} + \frac{2}{7 \cdot 3^7} \ \&c.$$

Diese Glieder können folgender Gestalt nach und nach aus dem ersten heraus gebracht werden. Man theile das erste Glied $\frac{2}{3}$ durch $3 \times 3 = 9$, so ist der Quotient $\frac{2}{3^3}$, diesen theile man wieder durch 3×3 oder 9, so kommt $\frac{2}{3^5}$, und durch eine wiederholte Division durch eben die 9 entstehet $\frac{2}{3^7}$. Man bekommt also nach und nach folgende Reihe, $\frac{2}{3}, \frac{2}{3^3}, \frac{2}{3^5}, \frac{2}{3^7}$ &c. Und man siehet, daß man aus derselben Reihe vor den Logarithmus von 1 : 2 würklich heraus bringe, wenn man das erste Glied dieser Reihe noch durch 1, das zweyte durch 3, das dritte durch 5, und so ferner dividiret. Es ist aber in zehentheilschen Brüchen:

$\frac{1}{3} = 0,333\ 333\ 333$ folgends $\frac{1}{3 \times 1} = 0,333\ 333\ 333$

$\frac{1}{3^3} = 0,037\ 037\ 037$ - - $\frac{1}{3^3 \times 3} = 0,012\ 345\ 679$

$\frac{1}{3^5} = 0,004\ 115\ 226$ - - $\frac{1}{3^5 \times 5} = 0,000\ 823\ 045$

$\frac{1}{3^7} = 0,000\ 457\ 247$ - - $\frac{1}{3^7 \times 7} = 0,000\ 065\ 321$

$\frac{1}{3^9} = 0,000\ 050\ 805$ - - $\frac{1}{3^9 \times 9} = 0,000\ 005\ 645$

$\frac{1}{3^{11}} = 0,000\ 005\ 645$ - - $\frac{1}{3^{11} \times 11} = 0,000\ 000\ 513$

$\frac{1}{3^{13}} = 0,000\ 000\ 627$ - - $\frac{1}{3^{13} \times 13} = 0,000\ 000\ 048$

$\frac{1}{3^{15}} = 0,000\ 000\ 069$ - - $\frac{1}{3^{15} \times 15} = 0,000\ 000\ 004$

Die Summe hiervon gedoppelt giebt 0,346 573 588

den Logarithmus von 2 = 0,693 147 176

§. 198.

§. 198. Hieraus kan man so gleich den natürlichen Logarithmus XIII. zu 4 haben, wenn man den gefundenen Logarithmus verdoppelt, und Abschnitt. es ist demnach der Logarithmus von 4 dieser 1, 386294352. Auf eben die Art aber wie wir den Logarithmus der Verhältniß 1 : 2 gefunden, findet man auch den Logarithmus der Verhältniß 4 : 5. Es ist in diesem Fall $s = 9$ und $d = 1$, folgends verwandelt sich nunmehro die Reihe in diese nachfolgende: $\frac{2}{9} + \frac{2}{3.9^3} + \frac{2}{5.9^5} + \frac{2}{7.9^7}$ &c. und also

$$\frac{2}{9} = 0,\ 222\ 222\ 222 \text{ folgends } \frac{2}{1.9} = 0,\ 222\ 222\ 222$$

$$\frac{2}{9^3} = 0,\ 002\ 743\ 484 \text{ - - - } \frac{2}{3.9^3} = 0,\ 000\ 914\ 494$$

$$\frac{2}{9^5} = 0,\ 000\ 033\ 870.4 \text{ - - - } \frac{2}{5.9^5} = 0,\ 000\ 006\ 774$$

$$\frac{2}{9^7} = 0,\ 000\ 000\ 418 \text{ - - - } \frac{2}{7.9^7} = 0,\ 000\ 000\ 059$$

Die Summe hievon, nemlich 0, 223 143 549

ist der gesuchte Logarithmus der Verhältniß 4 : 5. Also ist:

$l.\ 1 : 4 = 1,\ 386294352$
$l.\ 4 : 5 = 0,\ 223143549$ } addirt

$l.\ 1 : 5 = 1,\ 609437901$

§. 199. Und da die Zahl 10 das Product aus 5 und 2 ist, so findet man ihren Logarithmus XIII, 164. wenn man die bereits gefundene Logarithmen von 2 und 5 addiret. Es war

$l.\ 2 = 0,\ 693147176$
$l.\ 5 = 1,\ 609437901$ } addirt

$l.\ 10 = 2,\ 302585077$

Wir achten dieses zu unserm Zweck hinlänglich, welcher bloß war zu zeigen, wie die Logarithmen gefunden werden. Denn wenn man sie genau finden wil, so muß man dieselbe in viel mehrern Ziffern angeben, welches geschiehet, wenn man nur die Division weiter fortsetzet, wie aus den Exempeln zu sehen, die der selige Professor Hausen in seinen vortreflichen Elementen angebracht. Es sind diese Logarithmen alle natürlich, und von denjenigen verschieden, die wir gemeiniglich haben. Um diese zu erhalten, müssen die gefundenen Logarithmen annoch in

 solche

XIII. Abschnitt. solche verwandelt werden, die sich in die gemeine Briggische Tafel schicken.

200. Es ist XIII, 182. gezeiget worden, wie dieses zu thun ist. Man muß, den Logarithmus einer Verhältniß der Briggischen Tafel wissen, und dazu schickt sich am besten der Logarithmus der Zahl 10 oder der Verhältniß 1 : 10, welcher in dieser Tafel die Einheit, oder 1, 000 0000 ist. Wil man nun zum Exempel den Logarithmus von 2 in dieser Tafel finden, so sage man wie der natürliche Logarithmus von 10 zu dem natürlichen Logarithmus von 2, so der Briggische Logarithmus von 10 zu den Briggischen Logarithmus von 2. Eben so findet man auch den Briggischen Logarithmus zu einer jeden andern Zahl, wenn man nemlich die Briggischen Logarithmen mit L und die natürlichen nach wie vor mit l bezeichnet, und man wil den Briggischen Logarithmus der Zahl n haben, so ist $l.\,10 : l.\,n = L.\,10 : L.\,n$, folgends der gesuchte $L.\,n = \frac{L.\,10}{l.\,10} \times l.\,n$. Und man siehet also, daß man den natürlichen Logarithmus $l.\,n$, bloß mit dem Bruch $\frac{L.\,10}{l.\,10}$ multipliciren müsse, um den Briggischen Logarithmus eben der Zahl zu erhalten. Dieses geschiehet am leichtesten, wenn man den Bruch $\frac{L.\,10}{l.\,10}$ oder $\frac{1,\,000\,000}{2,\,302\,585}$ durch einen Decimalbruch ausdrücket, und hernach durch diesen Bruch multipliciret. Es ist aber in Decimalbrüchen $\frac{L.\,10.}{l.\,10.} = 0,\,43429\,448\ldots$: Durch diese Zahl also muß man den natürlichen Logarithmus einer Zahl multipliciren, wenn man den Logarithmus der gewöhnlichen Briggischen Tafel heraus bringen wil.

§. 201. Da übrigens in der Briggischen Tafel der Logarithmus von 10 die 1, 0000000 ist, so ist nothwendiger Weise der Logarithmus von 100, 2, 0000000, und der Logarithmus von 1000 ist 3, 0000000, der Logarithmus aber von 10 000, 4, 0000000, und so fort XIII, 164. Die Logarithmen aller Zahlen aber von 1 bis an 10, fangen von der 0 an, wie zum Beyspiel der Logarithmus von 6, welcher dieser ist: 0, 7781513. Die Logarithmen aller Zahlen von 10 bis 100 fangen mit der 1 an, wie der Logarithmus von 48. welcher ist, 1, 6812412; die Logarithmen aller Zahlen von 100 bis an 1000 fangen mit der 2 an; die von 1000 bis an 10000 mit der 3, und so fort.

Diese

Diese Zahl wird die Characteristick des Logarithmus genennet, und deswegen gemeiniglich von den übrigen Ziffern des Logarithmus abgesondert.

§. 202. Es sind bey dieser Einrichtung die Logarithmen aller Zahlen, welche mit einerley Ziffern geschrieben werden, einerley, was auch diese Ziffer vor Ordnungen von Einheiten bedeuten mögen: Bloß die Characteristicken sind verschieden. Als zum Beyspiele der Logarithmus der Zahl 2849 ist 3. 4546924. Der Logarithmus aber der Zahl 28490 ist 4, 4546924, und der Logarithmus der Zahl 284900 ist 5, 4546924, und so immer fort. Im Gegentheil ist der Logarithmus der Zahl 284, 9, dieser 2, 4546924, der Logarithmus der Zahl 28, 49 aber ist, 1, 4546924 und so weiter. Man siehet dieses vollkommen ein, wenn man erweget, daß der Logarithmus einer Zahl $10n$, welche zehenmal grösser ist, als eine andere n aus dem Logarithmus ln entstehe, wenn man zu diesem Logarithmus ln den Logarithmus von 10, welcher 1, 0000000 ist, hinzu setzet XIV, 164. Und daß hinwiederum aus dem Logarithmus der Zahl $10n$ der Logarithmus der Zahl n, welche zehenmahl kleiner ist, heraus gebracht werde, wenn man von $l. 10n$ den $l. 10.$ abziehet XIV. 165.

§. 203. Ob zwar also die Logarithmen in den Tafeln, welche bey uns am meisten zu haben sind, nicht über 10000 gehen, so kan man doch aus diesen Tafeln die Logarithmen aller Zahlen, dergleichen wir eben beschrieben haben, nehmen; und ein Exempel kan am deutlichsten zeigen, wie dieses bequem zu verrichten ist. Es sey der Logarithmus der Zahl 0, 02849 zu finden. So schläget man in der Tafel den Logarithmus zu 2849 auf, welcher ist, 3, 4546924. Weil nun die Zahl 0,02849, deren Logarithmus gesucht wird, aus dieser Zahl 2849 entstehet, wenn man sie durch 100000 dividiret, oder, wenn man das Zeichen der einfachen Einheiten um 5 Stellen zurück nach der Linken setzet: so muß von der Characteristick des gefundenen Logarithmus 3, die Zahl 5 als die Characteristick von 100000, abgezogen werden XIII, 202. Dadurch erhält man — 2, 4546924, und dieses ist der Logarithmus der Zahl 0, 02849. Auf eben die Art verfähret man in allen dergleichen Fällen. Nemlich nachdem man den Logarithmus einer Zahl gefunden hat, welche in der Tafel stehet, und eben die Ziffer hat, als diejenige, deren Logarithmus man suchet; so setzet man der Characteristick des gefundenen Logarithmus so viele Einheiten zu, oder ziehet von derselben so viele Einheiten ab, als viele der Stellen sind, um welche man das Zeichen der einfachen Einheiten nach der Rechten fortsetzen, oder nach der Linken zurück rücken muß, damit aus der angenommenen die gegebene Zahl werde.

XIII. Abschnitt.

§. 204. Hieraus aber lässet sich ferner zeigen, wie aus der Logarithmen der Zahlen bis 10000 die Logarithmen der übrigen Zahlen bis zu 10 000000, und aller andern Zahlen, die aus sieben Ziffern bestehen, zu finden seyn. Denn weiter kan man bey den gewöhnlichen Logarithmen nicht gehen; weil in so wenigen Ziffern als dieselben haben, der Unterscheid der Logarithmen sehr grosser Zahlen, die nicht weit von einander entfernet sind; kaum mehr zu merken ist: und, wenn zum Exempel die Logarithmen der Zahlen 5327954384 und 5327954300 angegeben werden solten, ihr Unterschied weit kleiner seyn würde, als zween Logarithmen, die aus nicht mehr als acht Ziffern bestehen, von einander unterschieden seyn können. Zumalen, da man sich nicht einmal auf die letzten Ziffer der Logarithmen, verlassen kan, weil sie meistentheils etwas zu groß oder zu klein sind.

F. 385.

§. 205. Gesetzt, es sey Ee die Einheit, und Aa werde aus derselben durch eine Zahl ausgedrücket, die noch in der Logarithmentafel stehet, als durch 7532. Kk aber werde durch die Zahl 7533 ausgedruckt, die zu nächst auf die vorige folget. Es sey aber der Logarithmus der Zahl 7532, 643 zu finden, die zwischen beyden vorigen stehet, indem der kleinern noch der Bruch 0, 643 zugesetzet worden ist. So stelle man sich vor daß Ii durch diese mittlere Zahl ausgedrücket werde: Es ist EA der Logarithmus zu Aa so wol als EK der Logarithmus zu Kk aus der Tafel bekant, und EI der Logarithmus zu Ii wird gesuchet. Diesen nun zu erhalten, verfähret man also. Man ziehet die Zahl AA von der Zahl Kk ab, so bleibet Lk übrig: und diese ist die Einheit, weil die Zahlen Aa, Kk unmittelbar auf einander folgen. Ferner ziehe man auch Aa von der Ii ab: so bleibet der Bruch übrig, um welchen die mittlere Zahl die kleinere übertrift, und dieser Bruch drücket die iM aus. Endlich ziehe man auch den Logarithmus der kleinern ganzen Zahl EA von dem Logarithmus der grössern ganzen Zahl EK ab, so bleibet AK = aL, der Unterschied der Logarithmen. In dem angenommenen Exempel ist,

$$\left.\begin{aligned} EK &= l.\,7533 = 3,8769680 \\ EA &= l.\,7532 = 3,8769103 \end{aligned}\right\} \text{Subt.}$$

$$AK = aL = \ldots\ldots 577$$

§. 206. Nun sehe man KaL als ein geradelinichtes Dreyeck an, weil in der That der Bogen ak so wenig gekrümmet ist, daß diese Krümmung kaum gemerket werden kan, so ist kL; iM = aL; aM oder

Al.

AI. Das ist, wie die Einheit zu dem Bruch, 0, 643 um welchen die gegebene Zahl 7532, 643 die kleinere 7532 übertrift, so der gefundene Unterschied der Logarithmen 577, zu AI dem Ueberschuß des gesuchten Logarithmus über den kleinern. Wenn man derohalben 577 durch 0, 643 multiplicirt, so ist das Product 371, 011 der gesuchte Unterschied, welcher dem kleinern Logarithmus 3, 8769103 zugesetzet werden muß, damit der Logarithmus 3, 8769474 heraus komme, der zu der Zahl 7532, 643 gehöret.

XIII. Abschnitt.

§. 207. Aus diesem Logarithmus der Zahl 7532, 643 ist nunmehro der Logarithmus der Zahl 7532643 leicht zu machen. Man vermehre nur XIII, 403. die Characteristic des gefundenen Logarithmus um drey Einheiten, so erlanget man denselben. Er ist nemlich 6, 8769474. Und auf die Art verfähret man allzeit, wenn der Logarithmus einer Zahl zu finden ist, die nicht mehrere Ziffer hat, als oben XIII, 204. angezeiget worden. Ist der Logarithmus der Zahl 1 793248 zu finden, so suche man erstlich den Logarithmus der Zahl 7932, 48, wie gewiesen worden, und mache so dann aus demselben den Logarithmus zu 793248. Und eben so verfahre man auch wenn der Logarithmus zu 0, 0793248, oder einer jeden andern dergleichen Zahl zu finden ist.

§. 208. Auf eben die Art findet man auch die Zahl, so zu einem Logarithmus gehöret, der nicht in der Tafel angetroffen wird. Wir wollen dieses wieder mit einem Beyspiel weisen. Der Logarithmus sey 3, 8769474, dieser stehet nicht in der Tafel, denn der unmittelbar kleinere ist 3, 8769103, und der unmittelbar grössere, 3, 8769680. Der Unterschied aber dieser Logarithmen ist 577. Da also zu den ersten dieser Logarithmen die Zahl 7532 gehöret, und zu dem zweyten die Zahl 7533, so ist die Zahl, so zu dem gesuchten Logarithmus gehöret, grösser als 7532, und kleiner als 7533. Wil man nun den Ueberschuß dieser Zahl über die kleinere 7532 genau haben: so suche man auch den Ueberschuß des gegebenen Logarithmus 3, 879474 über den kleinern, welcher 371 ist. Stellet man sich nun vor, daß aL, wieder den Unterschied der zwey Logarithmen EA und EK bedeute, zwischen welchen der gegebene EI stehet, und folgends AI = aM den Ueberschuß dieses gegebenen Logarithmus über den kleinern; Aa, aber Ii und Kk die Zahlen, die zu diesen Logarithmen gehören: so siehet man, daß man sagen müsse, wie aL zu aM so Lk zu Mi. Das ist, in unserm Exempel, wie 577 zu 371, so die Einheit zu dem Ueberschuß der gesuchten Zahl Ii

 über

XIII. Abschnitt. über die kleinere Aa. Es ist also dieser Ueberschuß 0,643; und demnach die gesuchte Zahl 7532,643.

§. 209. Auf eben die Art findet man auch die Zahl zu einem Logarithmus, welcher grösser ist, als der gröste Logarithmus der Tafel: zum Exempel zu 6,8769474. Man vermindert erstlich die Characteristic so sehr als es erfordert wird, daß sie in die Tafel falle: und merket die abgezogene Einheiten an, deren hier 3 sind: Der Logarithmus wird dadurch 3,8769474. So dann suchet man die Zahl, so zu diesem Logarithmus gehöret 7532,643, woraus dann leicht die Zahl zu finden ist, welche zu den Logarithmus gehöret, welcher eben die Ziffer hat, aber dessen Characteristic um drey Einheiten grösser ist: welches eben der Logarithmus 6,8769474 ist, so im Anfang gegeben worden. Es ist nemlich diese Zahl 7532643.

§. 210. Ist der Logarithmus —2,8769474 gegeben, so setze man seiner Characteristic fünf Einheiten zu, damit derselbe in die Tafel falle, indem er wieder 3,8769474 wird; suche so dann die Zahl, so zu diesen Logarithmus gehöret, nemlich die vorige 7532,643. rücke aber in derselben das Zeichen der einfachen Einheiten um fünf Einheit zurück, so ist die Zahl 0,07532643 diejenige, die zu dem Logarithmus —2,8769474 gehöret. Alles dieses kan eine wiederholte Anwendung auf verschiedene Exempel, so mit einigem Nachsinnen verknüpfet ist, deutlicher machen als viele Worte.

§. 211. Da 3,4043205 der Logarithmus der Zahl 2537 ist: so ist —3,4043205 der Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{2537}$ XIII,158. Will man diesen Bruch in einen Zehentheilichten verwandeln; so darf man nur den Zehler desselben durch den Nenner dividiren: Folgends kommet der Logarithmus des zehentheilichten Bruchs welcher dem Bruch $\frac{1}{2537}$ gleich ist, wenn man den gegebenen Logarithmus 3,4043205, von dem Logarithmus der Einheit; das ist, von 0,0000000, das ist von —10 + 9,9999999 . . . . . . abziehet. XIII,165. Man erhält dadurch —4,5956795, und dieses ist der Logarithmus des verlangten Decimalbruches. Nun ist die Zahl, welche zu dem Logarithmus 4,5956795 gehöret 39416,64; folgends ist der Bruch selbst 0,000394166 4. Eben so verfähret man in allen übrigen dergleichen Fällen.

Vier-

Vierzehender Abschnitt.

Berechnung der Cirkel und Winkel.

Ein wichtiger Grundsatz.

§. 1.

Nunmehro können wir uns zu der Berechnung des Cirkels und der übrigen krummen Flächen, welche wir in der Geometrie betrachtet haben, wenden. Es wird aber hier alles hauptsächlich darauf ankommen, daß man eine gerade Linie zu schaffen wisse, welche so groß sey als der Umkreis eines gegebenen Cirkels. Sind wir dieses zu thun im Stande, so folget das übrige alles gar leicht. Dieses also muß vor allen Dingen ausgemacht werden.

§. 2. Man kan aber diese Untersuchung am besten auf folgenden Satz gründen, dessen wir bereits oben XIII, 131. erwehnet, und seinen Nutzen angepriesen. Man stelle sich nemlich eine beliebige Grösse unter T vor, und vermehre sie um eine Kleinigkeit, welche in Ansehung der ganzen T in gar keine Betrachtung kommen kan. Diese sey t, und die vermehrte Grösse sey also $T+t$. Man erhebe T zu einer beliebigen Dignität, deren Exponenten man sich unter m vorstellet, und welche folgends durch T^m bedeutet wird, oder welches auf eben das hinaus komt, man stelle sich in einer geometrischen Reihe, die von der Einheit anfängt, und deren zweytes Glied T ist, das Glied T^m vor, welches von dem ersten um so viele Glieder entfernt ist, als viele Einheiten die Zahl m enthält. Eben dieses thue man bey der vermehrten Grösse $T+t$, und mache $\overline{T+t}^m$: so wird diese $\overline{T+t}^m = T^m + m\,T^{m-1}t$. Also ist bey den gesetzten Bedingungen, wenn nemlich t so klein ist, daß es in Ansehung der T in keine Betrachtung kommen kan, der Ueberschuß der $\overline{T+t}^m$ über T^m dieser $m\,T^{m-1}t$. Und indem T um die Grösse t angewachsen, so ist die Dignität derselben, deren Exponent m ist, um $m\,T^{m-1}t$ vergrössert worden.

§. 3. Man findet also aus dem t, um welches die Wurzel oder das zweyte Glied der Reihe T vermehret worden, und aus dem Exponenten

XIV. Abschnitt.

ten der Dignität oder des Gliedes T^m, die Grösse, um welche diese Dignität angewachsen, indem die Wurzel um t vergrössert worden ist, gar leicht. Man gebe dem T einen Exponenten, der um eins kleiner ist als m, und multiplicire diese Dignität T^{m-1} so wohl durch den vorigen Exponenten m als auch durch t, um welches die Wurzel angewachsen, so hat man $mT^{m-1}t$, welches man suchte.

§. 4. Wil man also hinwiederum aus dieser Grösse $mT^{m-1}t$, um welche die Dignität angewachsen, die Dignität T^m selbst finden, welche dergestalt gewachsen ist, so hat man nur den Exponenten des T^{m-1} mit der Einheit zu vermehren, und also $mT^{m-1}t$ in mT^mt zu verwandeln, so dann aber diese Grösse mT^mt so wohl durch den Exponenten m als auch durch t zu dividiren, so erhält man T^m, welche man suchte.

§. 5. Es sey $m = 2$, so wird $T^m = T^2$, und $mT^{m-1}t$ wird $2T^1t = 2Tt$. Vermehret man nun in dieser Grösse den Exponenten der Dignität der T um 1, und dividiret dieselbe durch $2t$, so hat man wieder T^2. Es sey $m = 3$, so wird $T^m = T^3$, und $mT^{m-1}t$ wird $3T^2t$. Wenn man nun hier wieder den Exponenten 2 mit 1 vermehret, und mit $3t$ dividiret, so bringt man aus $3T^2t$ wieder die T^3 heraus, welche um $3T^2t$ vermehret worden ist, indem T selbst um t angewachsen.

§. 6. Ist zu zwo gegebenen Grössen n, r und zu der Dignität T^m die vierte Proportionalgrösse gefunden worden, welche $\frac{r}{n} \times T^m$ ausdrücket, und ist wieder T um die Kleinigkeit t vermehret worden; so ist $\frac{r}{n} \times \overline{T+t}^m = \frac{r}{n} \times T^m + \frac{r}{n} \times mT^{m-1}t$, wie man leicht siehet. Der Ueberschuß dieser letztern Dignität über die erstere ist demnach $\frac{r}{n} \times mT^{m-1}t$. Daß also denselben heraus zu bringen, man erstlich eben der Regel, vermittelst welcher der Ueberschuß des $\overline{T+t}^m$ über T^m dargestellet wird, folgen, so dann aber, das also gefundene $mT^{m-1}t$, mit dem Bruch $\frac{r}{n}$ multipliciren muß. Und hinwiederum komt $\frac{r}{n} \times T^m$ aus dem Ueberschuß $\frac{r}{n} \times mT^{m-1}t$, wenn man sich Anfangs an den Bruch $\frac{r}{n}$ nicht kehret, sondern aus $mT^{m-1}t$ die T^m nach den gegebenen Regeln heraus bringt, und derselben so dann den Bruch $\frac{r}{n}$ vorschreibet.

§. 7. Es

§. 7. Es sey nunmehro die Dignität zu finden, deren Wurzel, wenn sie um t vermehret wird, die Dignität selbst um T^3t vermehret: so stelle man sich vor, daß diese Grösse mit der $\frac{r}{n}\times mT^{m-1}t$ einerley bedeute, welches seyn wird, wenn m der Zahl 4 gleich ist, und $\frac{r}{n}=\frac{1}{4}$. Denn wenn man diese Bedeutung an gehörigen Ort setzet, so wird $\frac{r}{n}\times mT^{m-1}t=\frac{1}{4}\times 4T^3t=T^3t$. Da nun aber die Dignität, welche um $\frac{r}{n}\times mT^{m-1}t$ zugenommen, indem die Wurzel zu $T+t$ angewachsen, $\frac{r}{n}\times T^m$ ist, so kan man dieselbe, bey der bestimten Bedeutung des Bruchs $\frac{r}{n}$, und des Exponenten m, leicht finden. Sie ist $\frac{T^4}{4}$. Und auf die Art kan man immer verfahren. Wird die Grösse gesucht, welche um T^et angewachsen, indem die Wurzel T und t vermehret worden, so setze man wieder $T^et=\frac{r}{n}\times mT^{m-1}t$, so ist $e=m-1$, folgends $m=e+1$, und $\frac{r}{n}\times m=1$, weil vor der T^et kein anderer Factor stehet, als die Einheit. Dividiret man nun beyderseits durch m; so wird $\frac{r}{n}=\frac{1}{m}$. Da nun bekannt ist, daß $\frac{r}{n}\times T^m$ die Grösse ist, welche man suchet, so setze man nur in derselben an statt m, $e+1$, und an statt $\frac{r}{n}$ schreibe man $\frac{1}{m}$, das ist $\frac{1}{e+1}$, so wird eben die Grösse aus derjenigen, so gegeben worden, unmittelbar bestimmet. Nemlich die dergestalt heraus zu bringende $\frac{1}{e+1}\times T^{e+1}$ ist die Grösse, welche, wenn man in derselben T um t, vermehret, dadurch um die gegebene T^et vermehret wird.

§. 8. Dieser Satz ist allgemein: betrachtet man ihn aber etwas genauer, so findet man, daß sich auch auf denselben die Anfangs XIV, 4. gegebene Regel schicke. Sol aus dem T^et die $\frac{1}{e+1}\times T^{e+1}$ heraus gebracht werden, so muß man erstlich den Exponenten e um die Einheit vermehren, und so dann $T^{e+1}t$ so wohl durch $e+1$ als auch durch t dividiren. Dasjenige so von den Brüchen XIV, 6. gewie-

XIV. Abschnitt.

wiesen worden, bleibt übrigens in seinem Werth, wie man leicht siehet: Wenn $\frac{r}{n} \times T^{e_r}$ gegeben ist, und man sol die wachsende Grösse finden, so wird dieselbe $\frac{r}{n} \times \frac{T^{e+1}}{e+1}$. Man bekümmert sich nemlich im Anfang um den Bruch nicht, sondern schreibt ihn nur zuletzt vor die gefundene $\frac{T^{e+1}}{e+1}$, wie man ihn vor der gegebenen T^{e_r} findet.

§. 9. Dieses sind die Sätze auf welche sich die neuern Geometrä gründen, so oft sie die krummen Linien durch Zahlen ausdrücken wollen, welche ihre Verhältniß gegen gerade Linien genau, oder doch so nahe darstellen, als nöthig ist: wenn diese Verhältniß nicht genau in Zahlen oder geraden Linien anzugeben ist. Wir werden dieselbe so gleich auf die Cirkelbogen anwenden.

Berechnung des Umkreises eines Cirkels.

F. 383. §. 10. Es sey AB ein Cirkelbogen, dessen Mittelpunct in C fält, AC sey ein Radius desselben, und AD berühre den Bogen in A. Man ziehe CBD nach Belieben, und nachdem man den Bogen etwas weniges bis in b fortgezogen, und zugleich die Tangente AD so viel nöthig ist, verlängert hat, so ziehe man auch Cbd, und beschreibe durch D den Bogen DE um den Mittelpunct C. Weil man nun Bb gar klein genommen, so ist dieser Bogen Bb von einer geraden Linie kaum verschieden, und zwar destoweniger, je kleiner man ihn genommen: so daß, wenn man ihn so sehr vermindert, daß er fast gar nichts ist, auch seine Krümmung unbegreiflich klein wird, und man also diesen Bogen Bb so wohl als DE, vor eine gerade Linie halten kan. So bald man dieses angenommen, muß man DEd als ein geradlinichtes Dreyeck ansehen, dessen Winkel bey E gerade ist, weil ein jeder Cirkelbogen mit seinem Halbmesser einen geraden Winkel machet. V, 47. Da nun aber auch der Winkel d dieses Dreyecks demselben, und dem ebenfals geradwinklichten Dreyeck dAC gemeinschaftlich ist, und da also die Dreyecke DEd und dAC ähnlich sind, VII, 23. so ist Dd : DE = DC : AC. Ausser dem aber verhalten sich die Bogen DE, Bb, wie die Halbmesser, mit welchen sie beschrieben worden sind. VII, 53. Es ist nemlich DE : Bb = DC : BC, oder DE : Bb = DC : AC. Vergleichet man nun diese Proportion mit der vorigen Dd : DE = DC : AC, so siehet

het man, daß die Verhältniß Dd:Bb aus der Verhältniß DC:AC entstehe, wenn man diese verdoppelt. VIII, 9. Demnach verhält sich Dd zur Bb, wie sich das Quadrat aus DC zu dem Quadrat aus AC verhält, oder kurz, es ist $DC^q : AC^q = Dd : Bb$. IX, 69.

§. 11. Man nenne nunmehro den Radius AC der Kürze halber R, und die Tangente AD nenne man T, so ist IX, 66. $CD^q = AD^q + AC^q = R^q + T^q$. Die Dd ist das Theilchen, um welches die Tangente T angewachsen, indem der Cirkelbogen AB um Bb grösser worden, und dieses Theilchen ist in Ansehung der ganzen T so klein, daß es mit demselben in keine Vergleichung zu ziehen ist. Man benenne diese Dd mit t, so wird die Proportion, die wir eben erwiesen haben, unter diesen Benennungen also stehen: $RR + TT : RR = t : Bb$. Demnach ist $Bb = \frac{RR}{RR + TT} \times t$.

§. 12. Der Bruch $\frac{RR}{RR + TT}$, durch welchen t zu multipliciren ist, damit Bb erhalten werde, ist von der Summe aller Glieder einer geometrischen Progression, welche beständig absteiget, destoweniger unterschieden, je weiter man die Progression fortführet, wie wir oben gesehen haben, als wir von solchen Progressionen handelten. XIII, 99. Und zwar ist diese Progression $1 - \frac{T^2}{R^2} + \frac{T^4}{R^4} - \frac{T^6}{R^6} + \frac{T^8}{R^8} -$ &c. Denn wenn a das erste Glied einer geometrischen Progression bedeutet, welche mit verwechselten Zeichen absteiget, und b das zweyte: so ist die Summe aller Glieder derselben $\frac{aa}{aa + bb}$ XIII, 99. Setzet man aber vor a die 1, und vor b, $\frac{T^2}{R^2}$; so wird $\frac{aa}{aa + bb} = \frac{1}{1 + \frac{TT}{RR}} = \frac{RR}{RR + TT}$. Und wenn man also in dem Ausdruck der Bb an statt des Bruchs $\frac{RR}{RR + TT}$ diese Reihe setzet; so findet man $Bb = t - \frac{T^2 t}{R^2} + \frac{T^4 t}{R^4} - \frac{T^6 t}{R^6} + \frac{T^8 t}{R^8} -$ &c.

§. 13.

XIV. Abschnitt.

§. 13. Wir haben also das unendlich kleine Theilchen, Bb aus der ABD oder T, und aus dem Theilchen derselben Dd dergestalt ausgedrückt, daß wir eine Reihe von unendlich kleinen Grössen $t, -\frac{T^2t}{R^2}+\frac{T^4t}{R^4}$ gefunden, welche zusammen die Bb ausmachen. Wir wissen aber auch, XIV, 7. wie aus solchen Theilchen als $t, \frac{T^2t}{R^2}$ die wachsenden Grössen T, $\frac{T^3}{3R^2}$ &c. selbst zu finden sind, und man siehet vor sich, daß die Grösse, welche um Bb angewachsen ist, der Bogen AB sey.

§. 14. Nun aber ist klar, erstlich daß, wenn zwo Grössen, welche im Anfang beyde nichts gewesen sind, nach und nach dergestalt anwachsen, daß die Theile, um welche sie zugleich anwachsen, immer gleich sind; auch die ganzen Grössen, welche dergestalt zugleich angewachsen sind, immer gleich seyn werden. AB wächset von nichts, denn bey A ist der Bogen von keiner Grösse. Ein Theilchen um welches es angewachsen ist, ist Bb. Ein jedes solches Theilchen ist der Summe aller Glieder der Reihe $t-\frac{T^2t}{R^2}+\frac{T^4t}{R^4}$ &c. gleich. Also ist auch ein jedes AB selbst der Grösse gleich, welche in der Zeit um $t-\frac{T^2t}{R^2}\pm\frac{T^4t}{R^4}$ &c. anwächset, in welcher zu der AB das Theilchen Bb hinzukomt.

§. 15. Zweytens ist klar, daß, wenn eine Grösse s von nichts anwächset, und ihr Wachsthum s ist aus verschiedenen Theilen $o-p+q$ zusammen gesetzt: auch die ganze Grösse s welche dergestalt angewachsen, aus den Grössen $O-P+Q$ bestehen werde, deren erstere O aus der Kleinigkeit o angewachsen, und die zweyte P entstanden, indem das Ganze immer um p abgenommen, die dritte Q aber durch den beständigen Zuwachs der q heraus gekommen. Denn gesetzt jemand, welcher gar nichts hat, bekäme täglich geschenkt 5, welches unser o seyn sol, er gebe täglich aus $7=p$, und er verdiene $3=q$, so ist kein Zweifel, daß nach sieben Tagen er haben werde $7o-7p+7q$. Und so ist es immer, man mag diese oder jene Zahl der Tage annehmen. Wird nun die Zahl der Tage durch N ausgedrückt, und bedeutet s die Summe

seines

seines Vermögens nach dieser Zeit, so ist ohnstreitig $S = No - Np + Nq$. Und weil No dasjenige ist, welches aus dem o angewachsen, und Np dasjenige, welches entstanden, indem das Ganze immer um p abgenommen, wie auch Nq dasjenige, so durch den täglichen Zuwachs q heraus gebracht worden; so muß man, wenn man sich der vorigen Zeichnung bedienen wil, No nennen O, und Np wird P, wie auch $Nq = Q$. Folgends ist $S = O - P + Q$. Man siehet leicht, daß eben dieses richtig seyn müsse, wenn die Einnahme und Ausgabe täglich ungleich sind. S ist auch in diesem Fall gewiß gleich der Summe alles geschenkten o, und der Summe alles verdienten q, weniger der Summe alles ausgegebenen p.

§. 16. Wenden wir nun dieses auf unsere Reihe an, da Bb, das Wachsthum der AB, aus den verschiedenen Theilen $t - \frac{T^2 t}{R^2} + \frac{T^4 t}{R^4}$ bestehet: so siehet man, daß die ganze AB welche dergestalt angewachsen ist, aus $T - \frac{T^3}{3R^2} + \frac{T^5}{5R^4}$ &c. bestehen werde, und man hat also:

$$AB = T - \frac{T^3}{3R^2} + \frac{T^5}{5R^4} - \frac{T^7}{7R^6} + \frac{T^9}{9R^8} - \frac{T^{11}}{11R^{10}} \text{ \&c.}$$

Oder wenn der gemeinschaftliche Factor T abgesondert wird, und man nimmet den Halbmesser R vor die Einheit an, so ist:

$$AB = T \times (1 - \frac{T^2}{3} + \frac{T^4}{5} - \frac{T^6}{7} + \frac{T^8}{9} - \frac{T^{10}}{11} \text{ \&c.}$$

Und man kan aus dieser Reihe AB so nahe finden als man wil, wenn nur bekant ist, wie sich T oder AD gegen den Halbmesser AC verhalte, damit man nemlich T aus diesem, das ist, aus der angenommenen Einheit, ausdrücken könne.

§. 17. Dieses zu erhalten, sey der Bogen AB der dritte Theil eines Quadranten, oder der sechste Theil des halben Umkreises, und man ziehe BF auf AC perpendicular. Diese BF wird dadurch die Helfte der Sehne eines Bogens, welcher zweymal so groß als AB, und folgends der sechste Theil des ganzen Umkreises ist. Und da die Sehne des sechsten Theils des Umkreises dem Halbmesser des Cirkels AC gleich ist, V, 89. und dieser vor die Einheit angenommen worden, so ist $BF = \frac{1}{2}$ und $BF^2 = \frac{1}{4}$. Da nun in dem geradewinklich-

XIV. Abschnitt.

ten Dreyeck BCF, $FC^q = BC^q - BF^q$, IX, 66. so ist $FC^q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Und weil CF : FB = AC : AD = AC : T, und also auch $CF^q : FB^q = AC^q : AD^q$, IX, 73. das ist, $\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = 1 : T^q$, so ist $T^q = \frac{1}{3}$, und folgends $T = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Man hat also AD oder T aus dem Halbmesser des Cirkels bestimmet, und die Verhältniß des Bogens AB zu den halben Cirkel ist ebenfals bekannt. Also ist weiter nichts nöthig, als daß man an statt des T^2 in der heraus gebrachten Reihe überall $\frac{1}{3}$ schreibe, wenn der sechste Theil des halben Umkreises AB würklich aus dem Radius ausgedrucket werden sol, welchen man vor 1 angenommen hat. Es wird dadurch:

$$AB = T \times (1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3.3.5} - \frac{1}{3.3.3.7} + \frac{1}{3.3.3.3.9} - \frac{1}{3.3.3.3.3.11}, \text{ und so fort.}$$

§. 18. Es ist nicht ohne Bedacht geschehen, daß wir den gemeinschaftlichen Factor T stehen lassen, da wir an die Stelle desselben hätten $\sqrt{3}$ schreiben können. Wil man den halben Umkreiß auf die Art ausdrücken, so hat man nur beyderseits mit 6 zu multipliciren, so wird, wenn man den ganzen Umkreiß sich unter P vorstellet, und S die Summe aller Glieder der Reihe bedeuten läßt, die durch T zu multipliciren sind, $6AB = \frac{1}{2}P = 6T \times S$, folgends $\frac{1}{4}PP = 36TT \times SS$. Da nun $TT = \frac{1}{3}$, so ist $\frac{1}{4}PP = 36 \times \frac{1}{3} \times SS = 12.SS$. Und wenn man also wieder beyderseits die Quadratwurzel nimt, so ist $\frac{1}{2}P = \sqrt{12} \times S$. Denn man kan die Quadratwurzel von 12 nicht genau schaffen. Schreibt man nun an die Stelle des S wiederum die Reihe, so wird $\frac{1}{2}P = \sqrt{12} \times (1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{3.3.5} - \frac{1}{3.3.3.7} + \frac{1}{3.3.3.3.9} - \frac{1}{3.3.3.3.3.11}$, und so fort. Diese Reihe kan man nachfolgender massen am bequemsten rechnen.

§. 19. Man fänget an, III, 50. die Quadratwurzel von 12 in Decimalbrüchen so nahe zu schaffen, als man es nöthig erachtet, und dividiret diese Wurzel mit 3, und den Quotienten von dieser Division wieder mit 3. Eben dieses thut man mit dem neuen Quotienten, und so immer fort bis man auf unbetrachtliche Kleinigkeiten kommt. Dadurch erhält man die Reihe $\sqrt{12}, \frac{\sqrt{12}}{3}, \frac{\sqrt{12}}{3.3}, \frac{\sqrt{12}}{3.3.3}$ &c. Nach diesem dividiret man die dergestalt berechneten Glieder dieser Reihe, wie sie in der

der Ordnung auf einander folgen, das erste durch 1, das zweyte durch 3, das dritte durch 5, und so fort, so erhält man die Glieder der Reihe, welche den halben Umkreiß ausdrücket, selbst, nemlich $\frac{\sqrt{12}}{1}$, $\frac{\sqrt{12}}{3.3}$, $\frac{\sqrt{12}}{3.3.5}$, $\frac{\sqrt{12}}{3.3.3.7}$, $\frac{\sqrt{12}}{3.3.3.3.9}$ &c. Nur muß man sich erinnern, daß das erste dieser Glieder das Zeichen + habe, das zweyte aber —, das dritte wieder +, und so immer abgewechselt, und daß man also die Summe des zweyten, vierten, sechsten und aller übrigen Glieder, deren Entfernung von dem ersten eine gerade Zahl ausdrücket, von der Summe der übrigen Glieder abziehen müsse, wenn man den Umkreiß würklich erhalten wil. Aus dieser Ursach thut man wohl, wenn man so gleich, indem man diese Glieder machet, diejenigen besonders schreibt, welche + haben, und die übrigen auch besonders, wodurch die Rechnung folgendes Ansehen bekommt:

$\frac{\sqrt{12}}{1} = 3{,}46410161$	$\frac{\sqrt{12}}{1} = 3{,}46410161$	
$\frac{\sqrt{12}}{3} = 1{,}15470053$	- - - -	$\frac{\sqrt{12}}{3.3} = 0{,}38490017$
$\frac{\sqrt{12}}{3.3} = 0{,}38490017$	$\frac{\sqrt{12}}{5.3^2} = 0{,}07698003$	- - - -
$\frac{\sqrt{12}}{3^3} = 0{,}12830005$	- - - -	$\frac{\sqrt{12}}{7.3^3} = 0{,}01832858$
$\frac{\sqrt{12}}{3^4} = 0{,}04276668$	$\frac{\sqrt{12}}{9.3^4} = 0{,}00475185$	- - - -
$\frac{\sqrt{12}}{3^5} = 0{,}01425556$	- - - -	$\frac{\sqrt{12}}{11.3^5} = 0{,}00129596$
$\frac{\sqrt{12}}{3^6} = 0{,}00475185$	$\frac{\sqrt{12}}{13.3^6} = 0{,}00036553$	- - - -
$\frac{\sqrt{12}}{3^7} = 0{,}00158395$	- - - -	$\frac{\sqrt{12}}{15.3^7} = 0{,}00010559$
$\frac{\sqrt{12}}{3^8} = 0{,}00052798$	$\frac{\sqrt{12}}{17.3^8} = 0{,}00003105$	- - - -
$\frac{\sqrt{12}}{3^9} = 0{,}00017599$	- - - -	$\frac{\sqrt{12}}{19.3^9} = 0{,}00000926$

$\frac{\sqrt{12}}{3^{10}} = 0,00005866$	$\frac{\sqrt{12}}{21.3^{10}} = 0,00000279$	- - - -
$\frac{\sqrt{12}}{3^{11}} = 0,00001955$	- - - -	$\frac{\sqrt{12}}{23.3^{11}} = 0,00000085$
$\frac{\sqrt{12}}{3^{12}} = 0,00000652$	$\frac{\sqrt{12}}{25.3^{12}} = 0,00000026$	- - - -
$\frac{\sqrt{12}}{3^{13}} = 0,00000217$	- - - -	$\frac{\sqrt{12}}{27.3^{13}} = 0,00000008$
$\frac{\sqrt{12}}{3^{14}} = 0,00000072$	$\frac{\sqrt{12}}{29.3^{14}} = 0,00000002$	- - - -
$\frac{\sqrt{12}}{3^{15}} = 0,00000024$	- - - -	$\frac{\sqrt{12}}{31.3^{15}} = 0,00000000$
	+ 3,54623314	0,40464049
	− 0,40464049	
	3,14159265	

§. 20. Es enthält also der halbe Umkreiß den Halbmesser dreymal, und über dieses 0,14159265 Theilchen desselben, oder wenn man den Radius in 100000000 Theilchen theilet, so enthält der halbe Umkreiß dieser Theilchen 3,14159265, und wie sich die erste dieser Zahlen zu der zweyten verhält, so verhält sich der halbe Durchmesser zu dem halben Umkreiß. Eben diese Verhältniß hat auch der ganze Durchmesser zu dem ganzen Umkreiß. Man kan aber auch diese Verhältniß in mehrern Ziffern noch genauer schaffen, wenn man sich nur der Quadratwurzel von 12 durch kleinere Brüche noch mehr nähert, als wir der Kürze wegen gethan haben. Thut man dieses, oder siehet auch nur die Rechnungen geschickter Männer nach, so findet man, daß alle Ziffern richtig sind, die wir gefunden haben, da man sonst wegen der zwey letzten in Zweifel stehen müste, weil die Brüche, welche zusammen gerechnet werden musten, um Kleinigkeiten fehlen. Es haben aber diese Fehler einander durch die Subtraction des einen fehlerhaften von dem andern, wie öfters geschiehet, aufgehoben.

§. 21. Es erfordert aber die Ausübung selten und vielleicht gar niemals, daß man die Verhältniß des Diameters eines Cirkels gegen seinen Umkreiß genauer bestimme, als wir gethan, ja man braucht selbst die Ziffern, welche dergestalt gefunden worden sind, gar selten.

Man lässet meistentheils in der Zahl, welche den Umkreiß ausdrücket, die letzten Ziffern als Kleinigkeiten weg, und nimt nur die erstern an. Man setzet zum Exempel, der Durchmesser verhalte sich zu dem Umkreiß wie 1 zu 3,14 wenn man nicht sonderlich genau rechnen wil, oder wie 1 zu 3,141 wenn man etwas genauer zum Zweck zu kommen verlangt. Noch genauer ist die Verhältniß 1 zu 3,14159, und an dieser kan man sich meistentheils begnügen. Die nachstehende Verhältniß des Durchmessers zu dem Umkreiß ist ohnstreitig überflüssig genau: 1 : 3,14159265358979323 8.

Verschiedene Berechnungen, die sich auf die Ausmessung des Umkreises eines Cirkels gründen.

§. 22. Da ein Grad der 180ste Theil des halben Umkreises ist, so bekommet man die Verhältniß der Länge desselben gegen den Halbmesser seines Cirkels, wenn man die Zahl, welche den halben Umkreiß aus den Halbmesser ausdrücket, durch 180 theilet. Es kommt durch diese Division der Quotient 0,0174532925, und dieses ist also die Zahl der Theilchen, deren der Halbmesser 1,00000000 enthält, die einen Grad des Cirkels ausmachen. Theilet man diese Zahl nochmals durch 60, so bekommt man die Zahl der Theilchen eben des Cirkels, die eine Minute ausmachen. Der Quotient von dieser Theilung ist: 0,0002908882, und diese Zahl bestimmet also die Grösse einer Minute. Eben so findet man, daß, wenn der Halbmesser 1,00000000 Theilchen hat, eine Secunde 0,0000048481 dergleichen Theilchen enthalte. Auch von diesen Ziffern kan man nur die erstern nehmen, wenn es nicht nöthig ist, daß man die Verhältniß so gar genau bestimme.

§. 23. Es wird vermittelst dieser Zahlen aus einem jeden Durchmesser, der zu derselben gehörige Umkreiß, und aus einem jeden Umkreiß hinwiederum desselben Durchmesser gefunden. Denn alle Durchmesser haben gegen ihre Umkreise einerley Verhältniß, diejenige nemlich, welche die gegebene Zahlen gar nahe angeben, welche wir uns der Kürze und Deutlichkeit halben unter den Buchstaben d, p vorstellen wollen, daß also d : p die Verhältniß eines jeden Durchmessers zu seinem Umkreiß, und p : d die Verhältniß eines jeden Umkreises zu seinem Durchmesser ausdrückt. Ist nun der Diameter eines Cirkels in Zahlen gegeben, oder man hat ihn durch einen beliebigen Maßstab gemessen und gefunden, daß derselbe zum Exempel 92,34 Theile hat, welche Zahl wir uns unter D vorstellen wollen, so mache

 man

XIV. Abschnitt. man $d : p = D : P$, so ist $P = \frac{p \times D}{d}$ der gesuchte Umkreis zu dem Durchmesser D: und wird demnach in unserm Exempel gefunden, wenn man D = 92, 34 durch 3, 14159 multipliciret, weil d = 1 nicht dividiret. Es ist also P = 290, 0944, wenn man nemlich die unnöthigen Kleinigkeiten weglässet. Und umgekehrt wird aus dem gegebenen Umkreis P der Durchmesser D des Cirkels gefunden, wenn man machet $p : d = P : D$. Es ist also $D = \frac{P \times d}{p}$ und kommt, wenn man den gegebenen Umkreis P durch die Zahl p = 3, 14159 &c. dividiret, weil wider die Einheit d nicht multipliciret. Es sey der Umkreis 290, 0944 gegeben, so ist $\frac{290,0944}{3,1459} = 92, 34$, und dieses ist der gesuchte Durchmesser.

§. 24. Fast auf eben die Art verfähret man, wenn die Verhältniß eines Bogens gegen den Umkreis durch die Zahl der Grade, Minuten und Secunden ausgedruckt wird, welche er hält, und man sol entweder aus dem Bogen den Radius, oder aus dem Radius den Bogen finden. Denn weil man weiß, wie viel Theile des Radius auf einen Grad, eine Minute und eine Secunde gehen: so kan man leicht berechnen, wie viel Theile des Radius so viel Grade, Minuten und Secunden ausmachen, als deren der Bogen hält, von welchen die Frage ist. Hat man dieses dergestalt gefunden, so hat man die Verhältniß dieses Bogens zu dem Radius, mit welcher man sodann eben so verfahren muß, wie wir bey dem ganzen Umkreis und den Durchmesser gewiesen.

§. 25. Es sey ein Bogen von 38°, 24′, 15″, und dieser sey lang 32, 7 wie groß ist dessen Radius.

Es hält 1 Grad 0, 01745329 Theilchen des Radius, folgends
30 multipl.

halten 30 Grade 0, 52359870

Es hält 1 Minute 0, 00029088} Theilchen des Radius
24 multipl.

0116352
58176

folgends halten 24′. 0, 00698112
Es hält 1 Sec. 0,00000484
15 multipl.

2420
484

folgends halten 15″ . . 0,00007260

Da nun also 30° = 0,52359870
24′ = 0, 00698112
15″ = 0, 00007260

so ist 30°, 24′, 15″ = 0, 53065242

Folgends verhält sich ein Bogen von 30°, 24′, 15″ zu seinem Halbmesser, wie sich 0, 53065242 zu der 1 verhält, und es ist nunmehro leicht, aus dem gegebenen Radius die Länge eines solchen Bogens, und aus dem gegebenen Bogen den Radius zu finden. Bey dem gegebenen Exempel, da der Bogen 32, 7 hält, sage man wie 0, 53065242 zu 1, so 32, 7 zu dem Radius, und so in den übrigen Fällen.

§. 26. Hat man nun auf die Art aus dem Durchmesser den Umkreis, oder aus dem Umkreis den Durchmesser eines Cirkels gefunden, oder sind sonst diese beyden Dinge bekannt: so kan der Inhalt des Cirkels selbst leicht gefunden werden. Da ein jeder Cirkel einem Dreyeck gleich ist, dessen Grundlinie der Umkreis des Cirkels und dessen Höhe der Radius desselben ist, IX, 36. so darf man nur den Umkreis durch den Radius multiplieiren. Die Helfte des Products ist die Zahl, welche den Inhalt des Cirkels aus dem Quadrat misset, welches man zur Einheit angenommen hat. Es sey der Durchmesser eines Cirkels 92,34, folgends dessen Radius 46,17, so haben wir gesehen, daß dessen Umkreiß seyn werde 290,0944. Multiplieiren wir nun diese Zahlen in einander, und nehmen die Helfte des Products, oder multiplieiren wir, auf einmal die Helfte des Products zu erhalten, die Zahl, wel-

XIV. Abschnitt.

welche den Radius ausdrücket, durch die Helfte der Zahl, welche den Umkreis ausdrücket, oder die Zahl, welche den Umkreis ausdrücket, durch die Helfte derjenigen, welche den Radius darstellet, so ist das Product 145, 0472×46, 17, oder 290,0944×23,085 = 669, 6829224 der Inhalt des Cirkels.

§. 27. Auf eben die Art verfähret man mit einem jeden Ausschnitt, nachdem man den Bogen desselben so wohl als den Radius gemessen oder XIV, 25 berechnet: so multipliciret man hernach die Zahl, welche den Bogen ausdrücket durch die Helfte derjenigen, welche den Radius misset. Die Sache hat keine Schwierigkeit, und braucht nach dem Beyspiel, welches wir von einem ganzen Cirkel gegeben, keine weitere Erläuterung.

§. 28. Man siehet aus demjenigen, so wir IX, 36. in der Geometrie gewiesen, so wohl als aus der gegenwärtigen Berechnung desselben, daß der Cirkel einem geradewinklichten Viereck gleich seyn werde, dessen eine Seite dem Durchmesser gleich ist, welche wir die Grundseite nennen wollen, und die andern, die wir nunmehro als die Höhe ansehen müssen, dem vierten Theil des Umkreises. Ein Quadrat, dessen Seite der Durchmesser ist, ist ebenfals ein geradewinklichtes Viereck, dessen Grundseite mit der Grundseite des vorigen übereinkommt, die Höhe aber von der Höhe desselben verschieden ist. Da nun jede zwey Parallelogramme, die gleiche Grundlinien haben, sich wie ihre Höhen verhalten: so verhält sich das Viereck so dem Cirkel gleich ist, zu dem Quadrat des Durchmessers, wie der vierte Theil des Umkreises sich zu den Durchmesser verhält. Und es ist demnach diese Verhältniß durch Zahlen, welche gar wenig fehlen, leicht auszudrücken. Die Verhältniß des Umkreises zu dem Durchmesser ist 3, 14159265 : 1, theilet man die erstere Zahl durch 4, so erlanget man den vierten Theil des Umkreises 0, 78539816. Wie sich also diese Zahl zu der Einheit verhält, so verhält sich der Cirkel zu dem Quadrat seines Durchmessers. Auch hier kan man die kleinern Brüche weglassen, wenn es nicht nöthig ist alles so genau zu nehmen, und dieses hat überhaupt bey allen dergleichen Zahlen statt.

§. 29. Diese Zahlen können uns dienen den Inhalt eines Cirkels aus seinem Durchmesser auf eine andere Art zu finden. Es sey der Durchmesser eines Cirkels 9, 2, so berechne man das Quadrat desselben, welches 84, 64 ist, und sage sodann wie 1 zu 0, 78539 . . . so

das

das gefundene Quadrat 84, 64 zu dem Inhalt des Cirkels, dessen Durchmesser 9, 2 war. Dieser Inhalt ist also 66, 47 5409.

§. 30. Man kan aber auch vermittelst dieser Zahlen den Durchmesser eines Cirkels finden, dessen Inhalt gegeben ist. Es sey der gegebene Inhalt 66, 47 5409, so darf man nur auf eben den Weg, welchen wir gegangen, und vermittelst, welches wir aus dem Durchmesser den Cirkel heraus gebracht haben, zurück gehen, so erlanget man den Durchmesser wiederum. Man sage erstlich wie 0, 78539 . . . zu 1, das ist, wie ein jeder Cirkel zu dem Quadrat seines Durchmessers, so der gegenwärtige 66, 47 5409 zu 84, 64, welches demnach das Quadrat des Durchmessers dieses Cirkels seyn wird. Die Quadratwurzel dieser Zahl 9, 2 drücket also den Durchmesser selbst aus.

§. 31. Es ist nunmehro etwas leichtes die krummen Oberflächen der Cörper der ersten, andern und dritten Art zu berechnen, nachdem wir einen Cirkelbogen in eine gerade Linie zu verwandeln wissen. Denn so bald wir eine gerade Linie annehmen, welche einen Theil des Umkreises eines Cirkels, oder auch dem ganzen Umkreis gleich ist: können wir diese Oberflächen mit geradelinichten Figuren vergleichen, und wir haben XIII, 12 gewiesen, wie die geradelinichten Figuren zu berechnen sind.

§. 32. Da nemlich XI, 108. die krumme Oberfläche einer geraden Walze einem rechtwinklichten Viereck gleich ist, dessen Seiten sind, die Höhe der Walze, und eine gerade Linie, die dem Umkreis seiner Grundfläche gleich ist: so siehet man, daß diese Oberfläche gemessen werde, wenn man erstlich aus dem Durchmesser der Grundfläche der Walze, deren Umkreis suchet, und so dann die Zahl, welche dieselbe ausdrücket, durch diejenige multipliciret, welche die Höhe des Cylinders angiebt. Auf eben die Art findet man auch einen jeden Theil der krummen Oberfläche eines geraden Cylinders, welcher von zweyen Bogen der Umkreise seiner Flächen, und von zween geraden Linien, die der Axe parallel sind, beschlossen wird: wenn man nur an statt des ganzen Umkreises den Theil des Umkreises der Grundfläche nimmt, welcher zu dem Theil der Oberfläche gehöret, die man suchte.

§. 33. Und da die Oberfläche eines geraden Kegels einem Dreyeck gleich ist, dessen Grundlinie dem Umkreis der Grundfläche des Kegels gleich ist, und dessen Höhe so groß ist, als die Seite des Kegels XI, III. so kan es wohl mit der Berechnung dieser Oberfläche so wohl als

XIV. Abschnitt. mit der Berechnung der Theile derselben, welche wir betrachtet, und mit geradelinichten Figuren verglichen haben, keine Schwierigkeit setzen.

§. 34. Die Oberfläche der Cörper der dritten Art, welche in Betrachtung gezogen werden konten, konten wir XI, 125 mit Cylindrischen Oberflächen vergleichen, und also ist auch bey dieser Berechnung nichts weiter zu sagen. Und da die Oberfläche einer Kugel mit unter die Classe dieser Oberflächen gehöret, und dieselbe einem geradewinklichten Viereck gleich ist, dessen Höhe der Diameter der Kugel ist, und seine Grundfläche der Umkreis eines der grösten Cirkels derselben, so wird die Oberfläche der Kugel so gleich gefunden, wenn man nur den Durchmesser derselben durch seinen Umkreis multiplicirет.

§. 35. Was nun aber die Cörper der ersten, der andern und dritten Art anlanget, welche Cirkel oder Theile desselben zu ihrer Grundfläche haben, so ist die Berechnung derselben von der Berechnung der Cörper eben dieser Art, deren Grundflächen geradelinichte Figuren sind, gar nicht unterschieden, ausser daß man die Grundflächen nach den Regeln der Cirkelmessung berechnen muß, und es ist gar nicht nöthig, daß wir uns bey diesen leichten Dingen aufhalten.

Berechnung der Seiten und Winkel der Dreiecke.

§. 36. Wir wenden uns also zu einer andern Berechnung der ausgedehnten Grössen, welche die Dreyecke betrift, da wir zeigen wollen, wie aus drey Theilen eines Dreyecks die drey übrigen durch Rechnung gefunden werden. Wir haben uns dieser Redensart bereits bedienet, und die sechs Theile eines Dreyecks genennet seine drey Seiten und seine drey Winkel. Wie man aus dreyen dieser Dinge die übrigen finden sol, indem man die Dreyecke verzeichnet, ist gleich im Anfang der Geometrie gelehret worden. Nur muste unter den drey gegebenen Theilen, sich wenigstens eine Seite befinden. Unter eben den Umständen wollen wir weisen, wie man durch Rechnungen auf eben das kommen könne. Denn aus den drey Winkeln werden die Seiten eines Dreyecks niemals bestimmet; sondern es können unendlich viele Dreyecke seyn, deren drey Winkel einerley Grösse haben, nemlich alle, die einander ähnlich sind, haben diese Gleichheit der Winkel, ob zwar im übrigen ihre Seiten der Grösse nach von einander noch so sehr verschieden sind.

Sinus.

Sinus. Cosinus.

§. 37. Es kommt das meiste hiebey auf den richtigen Verstand gewisser Kunstwörter an, welche man hat erfinden müssen, damit man sich, auch ohne Figur, deutlich erklären könte. Man beschreibe auf dem nach Belieben angenommenen Durchmesser AB, um den Mittelpunct C einen halben Cirkelkreis ADB, und theile denselben vermittelst des Halbmessers DC in zween Quadranten AD, DB. Man nehme in einem dieser Quadranten das Punct E nach Belieben, und ziehe von demselben EF auf den Radius AC perpendicular. Diese Perpendicularlinie heisset der **Sinus des Bogens** AE, welcher zwischen A und E lieget.

F. 386.

§. 38. Man kan aber diesen Bogen auf verschiedene Art durch Worte ausdrücken, wenn man ihn nicht, wie wir gethan, ohne Umschweif bezeichnen wil. Es machet der Bogen AE mit dem ED einen Quadranten, und AE ist also die Ergänzung des Bogens ED zu einem Quadranten, gleichwie hinwiederum ED den Bogen AE zu einem Quadranten ergänzet. Demnach kan auch EF der Sinus der Ergänzung des Bogens ED zu einem Quadranten genennet werden. Eine solche Ergänzung nennet man auch das Complement eines Bogens: man wird also, wenn man dieses Wort gebrauchen wil, EF den Sinus des Complements des Bogens ED nennen müssen.

§. 39. Ziehet man von eben dem Punct E auch eine gerade Linie EG perpendicular auf den Radius DC, so ist diese EG der Sinus des Bogens ED, und folgends der Sinus des Complements des Bogens AE. Das Viereck FEGC ist geradewinklicht, wie leicht zu sehen ist, und es sind demnach in demselben die einander entgegen gesetzten Seiten gleich, EF = GC, und EG = FC. Demnach ist auch FC der Sinus des Complements des Bogens AE, und CG ist der Sinus des Complements des Bogens ED.

§. 46. Man ziehe EC, welche dem Radius AC gleich seyn wird, so misset VII, 66. der Bogen AE den Winkel ACE, und der Bogen ED misset den Winkel ECD, welcher die Ergänzung des vorigen zu einem geraden Winkel ist. Man nennet aus der Ursach auch EF den Sinus des Winkels ACE; und also wird auch EG der Sinus des Winkels ECD genennet. Dieser Winkel ECD ist dem Winkel FEC gleich, wie gar leicht einzusehen ist, und ECA ist = CEG. Demnach ist auch EG oder FC der Sinus des Winkels FEC, oder der Sinus des Complements des Winkels FCE: und EF oder CG

XIV. Abschnitt. ist der Sinus des Winkels CEG=ACE, oder der Sinus des Complements des Winkels ECG. Und man kan mit einem Wort hier an statt des Bogens allzeit den Winkel nennen, welcher von dem Bogen gemessen wird, welches in der Anwendung desto weniger Schwierigkeit machet, weil die Winkel durch die Zahl der Grade und deren Theile ausgedrückt werden, die in dem Bogen enthalten sind, XIII, 9.

§. 41. Der Sinus des Complements eines Bogens oder eines Winkels wird auch der Cosinus desselben Winkels genennet. Also ist der Cosinus des Bogens AE, oder des Winkels ACE die gerade Linie FC=EG, und der Cosinus des Bogens ED ist EF oder CG. Und wenn man in einem jeden rechtwinklichten Dreyeck, dergleichen EFC ist, die Seite, welche dem geraden Winkel F entgegen stehet, EC, vor den Radius annimmet; so wird die Seite FE, welche dem Winkel ECF entgegen gesetzt ist, der Sinus dieses Winkels, und FC, welche an diesem Winkel FCE lieget, und denselben mit der grösten Seite EC einschliesset, wird dieses Winkels Cosinus. Denn man kan allzeit die Seite CF in A verlängern, und um den Mittelpunct C durch E den Bogen EA beschreiben, wodurch diejenige Figur erhalten wird, aus welcher wir diese Benennungen des Sinus und Cosinus hergenommen haben.

F. 387. §. 42. Hat man aber in dem rechtwinklichten Dreyeck BCD den Bogen EA mit einem Radius beschrieben, der grösser oder kleiner ist als die gröste Seite desselben DC, und so dann den Sinus des Winkels C, nemlich EF gezogen, wodurch auch eben desselben Winkels Cosinus FC abgeschnitten wird, so siehet man doch, daß EF sich zu EC verhalte, wie DB zu DC, wie auch, daß FC: EC=BC:DC, und FC: FE=BC:BD. Diese letztern Proportionen werden uns bloß dienen, künftig ein und anderes zu erweisen, und es ist also nur die erste derselben hauptsächlich zu merken, welche man sich unter diesen Worten bekant machen kan: In einem jeden geradwinklichten Dreyeck BCD verhält sich eine der Seiten, die den geraden Winkel einschliessen DB, zu der grösten Seite DC, wie der Sinus des Winkels C, welcher der ersten Seite entgegen stehet, sich zu dem Radius verhält.

§. 43. Diese Proportion ist bey einer jeden beliebigen Grösse des Radius richtig. Und wenn man also zu dem Winkel C noch einen Bogen ea mit einem andern Radius eC beschrieben, und so dann den

Sinus

Sinus ef verzeichnet hat, so ist ef : eC = DB : DC, nun war auch EF : EC = DB : DC, folgends ist ef : eC = EF : EC, und ef : EF = eC : EC. Das ist, die Sinus von einerley Winkel C, welche zu verschiedenen Halbmessern CE, Ce gehören, verhalten sich gegen einander, wie diese Halbmesser. Eben dieses ist auch von den Cosinen fC, FC zu sagen.

XIV. Abschnitt.

F. 386.

§. 44. Uebrigens ist leicht einzusehen, daß, wenn der Bogen AE und der Winkel C, welchen er misset, sehr klein ist, auch der Sinus desselben sehr klein, und dem Bogen ohne einigen merklichen Fehler gleich seyn werde, und daß, indem der Bogen und der Winkel wächst, auch der Sinus mit wachsen werde, bis der Bogen ein Quadrant, und der Winkel gerade wird: in welchem Fall der Sinus DC so groß ist als der Radius. Dieses ist der gröste Sinus unter allen, und man kan aus der Ursach auch den Halbmesser eines Cirkels, den grösten Sinus nennen. Im Latein nennet man ihn Sinus totus. Will man aber den Sinus eines stumpfen Winkels ECB, oder den Sinus eines Bogens EDB, welcher grösser ist als ein Quadrant nehmen, so wird derselbe von dem Sinus des Winkels ECA nicht verschieden. Und man muß demnach sagen, daß der Winkel ECA und seine Ergänzung zu zweyen geraden Winkeln ECB, oder der Bogen AE, und seine Ergänzung zu einem halben Cirkel EDB einerley Sinus EF haben. Dieses ist in der Anwendung wohl zu merken. Man würde sich in einigen Fällen öfters verstossen, wenn man dieses nicht beobachten wolte. Man pflegt die Ergänzung eines Bogens zu einem halben Cirkel, oder die Ergänzung eines Winkels zu zween geraden, auch des Bogens oder des Winkels Supplement zu nennen, und es ist also EDB das Supplement des Bogens AE, und AE ist das Supplement des Bogens EDB.

§. 45. Was aber den Cosinus FC eines spitzigen Winkels ECA, oder des Bogens AE, welcher ihn misset, anlangt, so ist derselbe im Anfang, wenn der Winkel oder der Bogen gar klein ist, fast so groß als der Radius AC, und wird immer kleiner und kleiner, indem der Bogen AE mit dem Winkel ACE wächset, bis er endlich gar verschwindet, wenn der Bogen AE bis zur Grösse des Quadranten AD erwachsen, und der Winkel gerade worden. Der Cosinus des stumpfen Winkels ECB, und des Bogens EDB welcher ihn misset, ist mit dem Cosinus des Supplements derselben EA oder ECA einerley, und kein anderer als FC, und es ist also mit dem Cosinus eben so be-

XIV. Abschnitt.

schaffen, wie mit dem Sinus. Der Cosinus eines Bogens, und seines Supplements ist in allen Stücken einerley.

§. 46. Wir können noch anmerken, daß das Stück des Radius AF zwischen dem Sinus und dem Umkreis, der *Sinus versus* des Bogens AE, oder des Winkels ACE genennet werde. Wir werden aber in unserer Abhandlung dieses Wort nicht gebrauchen. Ferner können wir anmerken, daß EG, welche der Sinus ist des Bogens ED, die Helfte der Sehne EH sey, welche zu dem Bogen EDH gehöret, der doppelt so groß ist als ED. Denn weil die Sehne EH auf den Halbmesser CD perpendicular stehet, so ist so wohl ED = DH, als auch EG=GH. V, 19.

Tangenten.

§. 47. So viel von der ersten Benung, die man bey der vorhabenden Berechnung gebrauchet. Die zweyte Linie, welche hier einen besondern Namen bekommet, ist die Tangente. Man beschreibe wieder auf den Durchmesser AB, um den Mittelpunct C einen halben oder ganzen Cirkel, nehme in dessen Umkreis das Punct E nach Belieben, und ziehe durch dasselbe CE ohne Ende. Man ziehe eine andere gerade Linie FAG, welche den Cirkel in A berühre, und die erst gezogene CE in F schneide: welches V, 42. geschiehet, wenn man auf AC durch das Punct A eine Perpendicularlinie ziehet, welches eben die verlangte FG seyn wird. Und damit die Figur, wie wir sie gebrauchen, gleich Anfangs vollkommen werde, so setze man auf CF die CG perpendicular, welche die Tangente in G, und den Umkreis in H schneiden wird. Auch ziehe man durch C den Radius CD auf AB perpendicular. So misst der Bogen AE den Winkel ACE, und der Bogen AH misst den Winkel ACH, welcher das Complement des erstern Winkels ECA zu einem rechten Winkel ist. Demnach ist auch der Bogen AH das Complement des Bogens AE zu einem Quadranten die AF nunmehro, welche den Circul in A berühret, und zwischen den Radius AC und der Linie CEF lieget, die den Bogen AE abschneidet; heisset die Tangente dieses Bogens AE, wie auch die Tangente des Winkels FCA, welchen die FC mit dem Radius AC machet. Und AG ist die Tangente des Winkels ACG, oder des Bogens AH, welcher auf der andern Seite auf eben die Art, vermittelst der CG, abgeschnitten wird.

F. 388.

XIV. Abschnitt.

§. 48. Weil der Bogen AH das Complement ist des Bogens AE, so kan man auch die Tangente AG, die Tangente des Complements des Bogens AE nennen, und die Tangente des Winkels ACG ist auch die Tangente des Complements des Winkels ECA. Und wiederum ist AF die Tangente des Complements des Bogens AH oder des Winkels ACG. Die Tangenten der Complemente werden auch Cotangenten genannt, und also ist AG die Cotangente von AE oder FCA; und AF ist die Cotangente des AH oder ACH.

§. 49. Man siehet hieraus so gleich, daß jederzeit der Radius die mittlere Proportionallinie sey zwischen der Tangente eines Winkels, und der Cotangente eben desselben Winkels. Denn es ist in dem Dreyeck FCG der Winkel FCG gerade, und aus dessen Spitze fällt CA auf die gröste Seite FG perpendicular. Es ist aber VII, 78. erwiesen, daß in diesem Fall diese Proportion FA:AC=AC:AG allezeit richtig, und also AC die mittlere Proportionallinie sey, zwischen AF und AG. Man gebe diesen Linien AF, AC, AG die Namen, welche wir eben erkläret haben, so hat man dasjenige, so wir angegeben.

§. 50. Das Dreyeck FAC ist ebenfals bey A rechtwinklicht. Man kan auch in einem jeden rechtwinklichten Dreyeck, um C als den Mittelpunct, mit dem Radius CA, einen Bogen AE beschreiben, welcher den Winkel ACE messen wird. Und demnach kan man allezeit eine der Seiten, welche den rechten Winkel A in einem solchen Dreyeck einschliessen, AC, vor den Radius annehmen, und es wird dadurch die andere Seite AF die Tangente des Winkels ACF, welcher ihr entgegen stehet: oder die Tangente des Bogens AE, welcher diesen Winkel misset. Und ziehet man auf FC die CG perpendicular, und verlängert auch die Seite FA bis an diese Linie in G, so hat man auch die Tangente des Winkels F. Denn der Winkel ACG ist dem Winkel F gleich, weil so wohl ACF+F als ACF+ACG einen geraden Winkel ausmachet: also kan die Tangente des F von der Tangente des Winkels ACG nicht verschieden seyn, wenn man zu beeden einerley Halbmesser CA annimt.

§. 51. Hat man aber bey dem geradwinklichten Dreyeck DBC den Radius AC grösser oder kleiner angenommen als die Seite BC, und so dann den Bogen AE, und FA die Tangente desselben und des Winkels C, beschrieben; so hat doch der Radius AC gegen die Tangente AF eben die Verhältniß, welche die Seite CB gegen die Seite

F. 389.

BD

XIV Abschnitt. BD hat, die dem Winkel C entgegen stehet. Denn weil so wohl FA als DB auf BC perpendicular stehen, so ist allerdings AC : AF = BC : BD. VII, 12. Und wenn man zu einem andern Radius Ca, und zu dem Bogen ae, welcher eben den Winkel C misset, die Tangente af ziehet, so ist auch aC : af = BC : BD, und demnach aC : af = AC : AF, wie auch aC : AC = af : AF. Das ist, die Tangenten von einerley Winkel C, zu verschiedenen Halbmessern aC, AC verhalten sich gegen einander wie diese Halbmesser.

§. 52. Und weil auch BC sich zur BD verhält, wie der Cosinus des Winkels C zu seinem Sinus, XIV, 42. so kan man allzeit sagen, wie der Cosinus eines Winkels C sich zu dem Sinus eben des Winkels C verhält; so verhält sich der Radius zu der Tangente eben des Winkels. Wenn man nemlich den Sinus des Winkels C nennet ſC, stellet sich aber die Ergänzung dieses Winkels zu einem geraden Winkel unter cC vor, indem man nemlich das c vor das Wort Complementum setzet, und nennet also den Cosinus von C, ſcC, und den Radius r, und bezeichnet die Tangente eben des Winkels C mit tC: so ist ſcC : ſC = BC : BD, aber auch r : tC = BC : BD, folgends ſcC : ſC = r : tC, und weil dieses überhaupt von einem jeden Winkel richtig ist, so kan man auch nur schreiben ſc : ſ = r : t.

§. 53. Wir wollen ferner tcC die Cotangente des Winkels C bedeuten lassen, so haben wir gesehen, daß die Verhältniß r : tC der Verhältniß tcC : r gleich sey. Denn es ist tC : r = r : tcC, XIV, 49. folgends umgekehrt r : tC = tcC : r. Setzet man diese Verhältniß an die Stelle der vorigen, so bekommet man ſcC : ſC = tcC : r. Diese zwo Proportionen werden uns bey demjenigen, so künftig zu beweisen seyn wird, wohl zu statten kommen.

F. 390. §. 54. Noch müssen wir folgendes anmerken. Wenn zwey geradwinklichte Dreyecke ABC, DBC auf einer Grundlinie BC dergestalt stehen, daß ihre Seiten BA, BD in einem fort gehen, oder welches auf eben das hinaus komt, wenn in dem Dreyeck ACD, die gerade Linie BC auf AD perpendicular stehet: so verhält sich allzeit AB : BD, wie die Tangente des Winkels ACB, zur Tangente des Winkels BCD, wenn nemlich diese Tangenten zu gleichen Halbmessern gehören. Denn es ist BC : AB = r : t.ACB, oder BC : r = AB : t.ACB, und auch BC : r = BD : t.BCD, XIV, 51. Weil also die Halbmesser r einander gleich sind, so ist auch AB : t.ACB = BD : t.BCD, und AB : BD = t.ACB : t.BCD. Man siehet leicht daß eben dieses richtig sey, wenn der Winkel DCB an die andere Seite der BC in dCB fällt.

§. 55.

XIV. Abschnitt. F. 388.

§. 55. Wenn der Bogen AE sehr klein ist, so ist auch seine Tangente AF sehr klein. Ja sie ist in diesem Fall von dem Bogen AE selbst gar nicht merklich verschieden. Sie kommet demnach auch mit dem Sinus dieses Bogens ohne merklichen Fehler überein. Wächset sodann der Bogen mit dem Winkel ECA, welchen er misset, so wächset auch die Tangente, und wird letztens, wenn der Bogen AE groß wird, gar groß. Wird AE ein Quadrant, und dem AD gleich, und kommt also CE in CD zu liegen, so endiget sich die Tangente niemals, oder das Punct F, welches es endigen solte, ist nirgends anzutreffen. Denn dieses Punct ist allzeit da, wo die verlängerten AF und CE einander schneiden. Nun können AF und CD einander nicht schneiden, weil sie beyde auf der AC perpendicular stehen, und einander also parallel laufen.

§. 56. Ist aber der Winkel grösser als ein gerader, so ist seine Tangente mit der Tangente seines Supplements zu zween geraden Winkeln einerley. Der Winkel ECB zum Exempel, kan keine andere Tangete haben, als die AF, welche auch die Tangente seines Supplements ECA ist. Wie wolte man sonst die Tangente dieses stumpfen Winkels ziehen? Also haben zween Winkel, die mit einander zween gerade Winkel ausmachen, und zween Bogen die zusammen einen halben Cirkel geben, gleiche Tangenten, gleichwie sie gleiche Sinus haben. Und eine jede Tangente gehöret zu zween Winkeln.

§. 57. Die Linie FC welche den Umkreis in E schneidet, und sich mit der Tangente in F endiget, heisset die schneidende Linie, Secans, des Bogens AE, oder des Winkels ECA. Wir werden aber diese Benennung nicht gebrauchen, und halten uns also auch dabey nicht auf, sondern gehen nunmehro zur Anwendung dieser Benennungen, und der kleinen Sätze, welche wir daraus gezogen haben, über.

Vorbereitung zur Berechnung der Sinus und Tangenten.

§. 58. Diese Anwendung bestehet in zweyerley. Wir haben zu weisen, wie die Sinus und Tangenten aller Bogen, von einer Minute bis auf neunzig Graden, in Zahlen zu finden: oder wie ihre Verhältniß gegen den Radius durch Zahlen auszudrücken sey, welche so wenig fehlen, als man zur genausten Ausübung nur wünschen mag. Und wir haben zu lehren, wie die dergestalt durch Zahlen ausgedrückte Si-

XIV. Abschnitt.

nus und Tangenten zu gebrauchen sind, um aus dreyen Theilen eines Dreyecks die drey übrigen zu berechnen. Es ist wahr, die Sinus und Tangenten sind längst berechnet, und wir haben uns hierinne keine weitere Mühe zu geben: allein man verstehet die Berechnung der Dreyecke ungemein besser, und verfähret bey derselben mit einer viel grössern Gewißheit, wenn man die Art eingesehen hat, wie die Sinus und Tangenten der Bogen heraus zu bringen sind, als wenn man dieselbe gänzlich auf Treu und Glauben anzunehmen gezwungen ist.

§. 59. Wir werden uns bey den Beweisen, die zu dem Ende zu geben sind, und überhaupt bey der Berechnung der Dreyecke, öfters auf einen Satz gründen, welcher bereits verschiedentlich von uns gebrauchet worden ist, doch so, daß wir den Beweiß desselben noch immer in das übrige eingewebet haben. A und B sind zwo beliebige Grössen von einerley Art, und B ist grösser als A. Es kan erwiesen werden, daß die Grössen B aus der halben Summe der Grössen $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$, und aus ihrem halben Unterschiede $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$ zusammen gesetzt sey, und daß die kleinere A übrig bleibe, wenn man von der halben Summe $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$, den halben Unterschied $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$ abziehet. Man siehet dieses gar leicht ein. Denn setzet man $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$ zu $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$, so wird die Summe $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B$, das ist, B, weil $-\frac{1}{2}A$ das $+\frac{1}{2}A$ aufhebet. Ziehet man aber den halben Unterschied $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$ von der halben Summe $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$ ab, welches geschiehet, wenn man jenen zu dieser mit verwechselten Zeichen hinzu setzet, so erhält man $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$, und dieses ist $= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = A$, weil das übrige einander wieder aufhebet.

§. 60. Ist demnach die halbe Summe zwoer Grössen gegeben, zusamt ihrem halben Unterschied, so kan man daraus die Grössen leicht finden. Man setze den halben Unterschied zur halben Summe, so hat man das grössere, und man ziehe den halben Unterschied von der halben Summe ab, so hat man das kleinere. Wird man gefragt, was das vor Zahlen sind, deren halber Unterschied 3 und deren halbe Summe 7 ist, so ist die Antwort, die grössere dieser Zahlen sey $7 + 3 = 10$, und die kleinere $7 - 3 = 4$. Der Unterschied dieser Zahlen 10 und 4 ist 6, und also ihr halber Unterschied 3, und die Summe eben der Zahlen $10 + 4$ ist $= 14$, und ihre halbe Summe 7. Keine andere Zahlen haben diese Eigenschaften, als die zwo, welche dergestalt gefunden worden.

§. 61.

XIV. Abschnitt.

§. 61. Man siehet hieraus so gleich, daß hinwiederum die halbe Summe zwoer Grössen $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A$ komme, wenn man zu dem halben Unterschied derselben $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A$ die kleinere A hinzusetzet. Denn es ist allerdings $\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A+A=\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A$. Eben so wird der halbe Unterschied heraus gebracht, wenn man von der halben Summe der Grössen $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A$ die kleinere A abziehet, weil $\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}A-A=\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}A$.

F. 391. 392.

§. 62. Wir können uns nunmehro zur Betrachtung der Figur wenden, auf welche wir das hauptsächlichste, so wir zu weisen vorhaben, gründen werden. ABC ist ein Quadrant, und in dem Bogen desselben, welcher in der 392 Zeichnung verlängert worden ist, sind die Puncte D und E nach Belieben angenommen worden. Man hat durch diese Puncte die Sehne DE gezogen, und beyderseits verlängert, bis sie die, nach Nothdurft, verlängerte Halbmesser CA, CB in F und G erreichet. Aus dem Mittelpunct C ist auf diese Sehne die CH perpendicular gezogen worden, welche dieselbe in I in zwey gleiche Theile DI=IE geschnitten, und den Bogen derselben DHE in H ebenfals gleich getheilet hat. V, 19. Aus den Puncten D, H, I, E hat man auf den Halbmesser AC die Perpendicularlinien DK, HL, IM, EN fallen lassen; und durch die Puncte D und I sind DO und IQ mit eben der AC parallel gezogen worden. Die DO schneidet die IM in O, und IQ die EN in P, und die BC in Q. Ferner sind die Halbmesser CD und CE sichtlich gemacht. Durch diese Zeichnung sind die Dreyecke FIM, EIP, DIO, GIQ, HCL, ICM einander alle ähnlich worden. Denn daß FIM dem IDO ähnlich sey, siehet man daraus, weil DO der Seite FM des Dreyecks IFM parallel lieget. Und fast eben so leicht siehet man, daß IFM dem IEP, und IEP dem GIQ ähnlich sey. Es ist aber auch das Dreyeck FIC bey I rechtwinklicht, und aus I ist IM auf die gröste Seite desselben perpendicular gefallen: demnach ist auch FIM dem ICM ähnlich, VII, 78. und daß ICM dem HCL ähnlich sey, siehet man gar leicht. Dieses aber sind die Dreyecke, deren Aehnlichkeit wir angegeben, alle. Es kommen noch mehrere ähnliche Dreyecke in der Figur vor, welche zu betrachten unser Zweck nicht erfordert. Dieses aber haben wir noch zu bemerken, daß weil die Dreyecke IDO, EIP ähnlich, und ihre Seiten DI, IE einander gleich sind; auch die übrigen Seiten einander gleich seyn müssen DO=IP, und IO=EP.

§. 63. Die bemerkten ähnlichen Dreyecke aber enthalten eine gute Anzahl Proportionen, welche meistentheils von Nutzen seyn können.

XIV. Abschnitt. Wir wollen nur diejenigen anmerken, die wir nöthig haben, und die übrigen denenjenigen überlassen, die sich ihrer in einer andern Absicht bedienen wollen. Aus der Aehnlichkeit der Dreyecke IFM, EIP folget:

1) FI: IE = IM: EP,

und weil auch die Dreyecke GIQ, IDO ähnlich sind, so ist auch

2) IG: DI = IQ: DO.

Aus der Aehnlichkeit der Dreyecke ICM, HCL schliessen wir

3) HC: IC = HL: IM, und

4) HC: IC = CL: CM.

Und aus der Aehnlichkeit der Dreyecke HCL, IDO.

5) HC: DI = HL: DO, und

6) HC: DI = CL: IO.

Dieses ist zu unserm Zweck genug.

§. 64. Um nun diese Proportionen anzuwenden, müssen wir bemerken, daß wenn man den Bogen AD mit A, und den Bogen AE mit B bezeichnet: DE der Unterschied dieser Bogen B—A seyn werde. Bezeichnen wir aber auch BD, das Complement des erstern Bogens AD mit cA, und BE, das Complement des zweyten B, oder auch den Ueberschuß desselben über einen Quadranten, nachdem er nemlich kleiner oder grösser ist als ein Quadrant, mit cB: so wird eben dieser Bogen DE auch cA — cB. Weil auch DE in H in zwey gleiche Theile getheilet wird, so ist DH = HE = $\frac{B-A}{2}$, und zugleich = $\frac{cA-cB}{2}$ in der 391 Figur, und $\frac{cA+cB}{2}$ in der 392 Figur. Ferner ist der Bogen AH, welcher aus dem kleinern AD und aus DH dem halben Unterschied der Bogen AD, AE zusammen gesetzet ist, die halbe Summe dieser Bogen AD und AE, XIV, 61. und folgends AH = $\frac{A+B}{2}$. Und aus eben der Ursache ist BH = BE + EH = $\frac{cB+cA}{2}$ in der 391 Figur: aber in der 392 Figur ist BH = $\frac{cA-cB}{2}$, weil dieser Bogen übrig bleibt, wenn man von der halben Summe HE den kleinern Bogen BE wegnimmet. XIV, 61. Die Buchstaben A, B, cA, cB können auch die Winkel bedeuten, welche die Bogen messen, die wir mit diesen Buchstaben bezeichnet haben.

§. 65

XIV. Abschnitt.

§. 65. Wenn wir nun wieder die Sinus dieser und dergleichen Bogen und Winkel dadurch ausdrücken, daß wir den Buchstaben, mit welchen wir die Winkel bezeichnen, ein ſ vorsetzen, so wird ſA den Sinus des Bogens oder Winkels A, und ſB den Sinus des Winkels oder Bogens B, ingleichen $ſ\frac{A+B}{2}$ den Sinus der halben Summe der Bogen A und B, und $ſ\frac{B-A}{2}$ den Sinus des halben Unterschiedes dieser Bogen bedeuten. Und da cA das Complement des Bogens oder Winkels A, und cB das Complement des Bogens oder Winkels B bedeutet: so kan wieder — ſcA nichts anders, als den Sinus des Complements zu A oder den Cosinus von A, bedeuten. In eben dem Verstand ist ſcB zu nehmen, und so in allen ähnlichen Fällen. t sol nach eben den Umständen eine Tangente anzeigen, und also tA die Tangente des Bogens A und tcA die Tangente seines Complements. Den Radius oder grösten Sinus wollen wir ferner mit einem R oder r ausdrucken.

§. 66. Nun ist DK der Sinus des Bogens DA, und KC ist der Cosinus desselben, also ist DK = ſA, KC = ſcA. Ferner ist EN der Sinus des Bogens AE und NC ist sein Cosinus, also EN = ſB, und NC = ſcB. Da auch KD + IO + EP die EN giebet, so ist IO + EP der Unterschied der Sinus DK und EN: und da diese Linien IO und EP einander gleich sind, so ist IO = EP der halbe Unterschied derselben, oder $IO = EP = \frac{ſB - ſA}{2}$. Und weil IM aus dem kleinern dieser Sinus DK und aus deren halben Unterschied IO zusammen gesetzet werden kan: so ist diese IM die halbe Summe dieser Sinus, XIV, 61. das ist, $IM = \frac{ſA + ſB}{2}$. Weil aber auch DO = IP, und folgends KM = MN, und weil in der 391 Figur KN = KM + MN der ganze Unterschied der Cosinus CN und CK ist, so ist KM oder MN der halbe Unterschied derselben, und folgends $KM = DO = IP = MN = \frac{ſcA - ſcB}{2}$. Woraus man wieder leicht schliesset, daß MC = IQ die halbe Summe dieser Sinus seyn müsse, oder daß $MC = IQ = \frac{ſcA + ſcB}{2}$. In der 392 Figur aber ist KN = KC + CN die Summe der Cosinus der Bogen AD und AE, und folgends, da auch hier KM = MN, so ist KM = MN = DO = IP, der halben Summe dieser Co-

 sinus

XIV. Abschnitt.

sinus $ſcA + ſcB$ gleich. Und weil in eben dieser Figur CM entstehet, indem man von der halben Summe der Cosinus MN den kleinern CN wegnimt, so ist $MC = IQ = \frac{ſcA - ſcB}{2}$.

§. 67. Ferner ist HL der Sinus der halben Summe der Bogen AE und AD, und also $HL = ſ\frac{A+B}{2}$, und LC ist der Cosinus dieser halben Summe der Bogen AE und AD, das ist, des Bogens AH, oder $LC = ſc\frac{A+B}{2}$. Aber $DI = IE$ ist der Sinus des Bogens DH, welcher der halbe Unterschied ist der Bogen AE und AD, folgends $DI = IE = ſ\frac{B-A}{2}$. Endlich ist IC der Cosinus dieses Bogens DH, und also $IC = ſc\frac{B-A}{2}$. Die Verhältniß aber $FI : IE$ ist die Verhältniß der Tangente des Winkels FCI zu der Tangente des Winkels ICE, XIV, 54. oder die Verhältniß der Tangente des Bogens AH zur Tangente des Bogens HE, und weil $AH = \frac{B+A}{2}$, und $HE = \frac{B-A}{2}$, so ist $FI : IE = t\frac{B+A}{2} : t\frac{B-A}{2}$. Und eben so ist $IG : ID = t\,HB : t\,DH = t\frac{cA+cB}{2} : t\frac{cA-cB}{2}$ in der 391 Figur. In der 392 Figur aber ist $IG : ID = t\,HB : t\,DH = t\frac{cA-cB}{2} : t\frac{cA+cB}{2}$.

§. 68. Wenn wir nun diese Benennungen an die Stelle der Buchstaben in den Proportionen setzen, welche wir aus der gegenwärtigen Figur XIV, 63. gezogen haben; so wird die erste derselben $FI : IE = IM : EP$, dergestalt ausgedrucket:

$$t\frac{B+A}{2} : t\frac{B-A}{2} = \frac{ſB + ſA}{2} : \frac{ſB - ſA}{2} = ſB + ſA : ſB - ſA.$$

Und man kan also allezeit sagen: wie die Tangente der halben Summe zweyer Bogen oder Winkel, zu den Tangenten des halben Unterschiedes eben der Bogen oder Winkel: so die Summe der Sinus derselben Bogen oder Winkel, zu dem Unterschied dieser Sinus.

§. 69. Die andere Proportion XIV, 63. $IG : ID = IQ : DO$, wird auf gleichmässige Art, in dem Fall, welchen die 391 Figur vorstellet, also ausgedrucket:

tcA

$$\mathrm{t}\,\frac{\mathrm{c}A+\mathrm{c}B}{2} : \mathrm{t}\,\frac{\mathrm{c}A-\mathrm{c}B}{2} = \frac{\mathrm{sc}A+\mathrm{sc}B}{2} : \frac{\mathrm{sc}A-\mathrm{sc}B}{2} = \mathrm{sc}A+\mathrm{sc}B : \mathrm{sc}A-\mathrm{sc}B.$$

XIV. Abschnitt.

In der 392 Figur aber verwandelt sich diese Proportion in die nachfolgende:

$$\mathrm{t}\,\frac{\mathrm{c}A-\mathrm{c}B}{2} : \mathrm{t}\,\frac{\mathrm{c}A+\mathrm{c}B}{2} = \frac{\mathrm{sc}A-\mathrm{sc}B}{2} : \frac{\mathrm{sc}A+\mathrm{sc}B}{2} = \mathrm{sc}A-\mathrm{sc}B : \mathrm{sc}A+\mathrm{sc}B,$$

welche mit der vorigen auf eins hinaus kommet.

§. 70. Die dritte Proportion XIV, 63. $HC:IC = HL:IM$, wird unter eben dergleichen Benennungen diese:

$\mathrm{r}:\mathrm{sc}\frac{B-A}{2} = \mathrm{s}\frac{A+B}{2} : \frac{\mathrm{s}A+\mathrm{s}B}{2}$, und die vierte $HC:IC=LC:MC$, wird

$$\mathrm{r}:\mathrm{sc}\frac{B-A}{2} = \mathrm{sc}\frac{A+B}{2} : \frac{\mathrm{sc}A+\mathrm{sc}B}{2}.$$

Es verhält sich nemlich der Radius zu dem Cosinus des halben Unterschiedes zweyer Bogen B und A, wie sich der Sinus der halben Summe derselben zu der halben Summe der Sinus verhält. Ingleichen verhält sich der Radius zu dem Cosinus des Unterschieds zweyer Bogen, wie sich der Cosinus der Summe derselben zu der Summe ihrer Cosinus verhält. Dieses ist wieder in allen Fällen so.

§. 71. Auf eben die Art kan man auch bey der fünften und sechsten Proportion XIV, 63. verfahren. Die fünfte war $HC:DI = HL:DO$. Schreibt man hier wieder vor HC, r, vor DI, $\mathrm{s}\frac{B-A}{2}$, vor HL, $\mathrm{s}\frac{B+A}{2}$, und vor DO, $\frac{\mathrm{sc}A-\mathrm{sc}B}{2}$ so wird dieselbe: $\mathrm{r}:\mathrm{s}\frac{B-A}{2} = \mathrm{s}\frac{B+A}{2} : \frac{\mathrm{sc}A-\mathrm{sc}B}{2}$. Und die sechste Proportion $HC:DI=CL:IO$, wenn man ausser den vorigen vor CL schreibt $\mathrm{sc}\frac{B+A}{2}$ und vor IO, $\frac{\mathrm{s}B-\mathrm{s}A}{2}$, wird:

$$\mathrm{r}:\mathrm{s}\frac{B-A}{2} = \mathrm{sc}\frac{B+A}{2} : \frac{\mathrm{s}B-\mathrm{s}A}{2}.$$

Diese Regeln sind bloß aus der 391 Figur genommen, denn in der 392 Figur ist $DO=\frac{\mathrm{sc}B+\mathrm{sc}A}{2}$. Indessen werden wir diese Proportion nicht anders als auf dergleichen Fälle anwenden, welche die 391 Figur darstellet, aus welcher sie genommen worden, und wir finden also nicht nöthig uns hierbey aufzuhalten: sondern wir wollen zeigen, wie vermittelst dieser Regeln die Sinus aller Bogen zu finden sind.

§. 72. Man

XIV. Abschnitt.

§. 72. Man kan sich darzu entweder der beyden mittlern oder der beyden letztern Regeln bedienen. Uns scheinen die letztern die bequemsten, welche man auch dergestalt setzen kan, wenn man die zweyten und die letzten Glieder derselben verdoppelt:

$$r : 2\,s\,\frac{B-A}{2} = s\,\frac{B+A}{2} : sc\,A - sc\,B,$$

$$r : 2\,s\,\frac{B-A}{2} = sc\,\frac{B+A}{2} : s\,B - s\,A.$$

Berechnung der Sinus.

F. 393.

§. 73. Es sey nunmehro der an den Mittelpunct C beschriebene Quadrant DL in eine beliebige Zahl gleicher Theile DE, EF, FG... HI, IK.. getheilet, und eines dieser Theile sey die Einheit, vermittelst welcher man einen jeden andern Theil dieses Quadranten misset, so sich von D anfänget, und bis an eines der Theilungspuncte erstrecket, zum Exempel, DI. Es bedeute n die Zahl dieser Einheiten, so in dem Bogen DI enthalten sind, welche n folgends die Grösse des Bogens aus der angenommenen Einheit ausdrücket. Es sey aber DH ein anderer Bogen, welcher um ein Theilchen weniger hat als der vorige, so daß die Zahl aller Theile desselben $n-1$ ist. Dieser Bogen sey derjenige, welchen wir uns sonst in dieser Betrachtung unter A vorgestellet haben. B aber bedeute hier den Bogen DK, welcher um ein Theilichen mehr hat, als AI, und welcher also durch die Zahl $n+1$ ausgedrücket wird. So ist die halbe Summe dieser Bogen $\frac{B+A}{2} = \frac{n+1+n-1}{2} = n$. Und der halbe Unterschied derselben $\frac{B-A}{2} = \frac{n+1-n+1}{2}$ ist $= 1$. Die Verhältnisse aber, welche wir eben heraus gebracht haben, verwandeln sich unter diesen Benennungen in die nachfolgende:

$$r : 2\,s\,1 = s\,n : sc\,\overline{n-1} - sc\,\overline{n+1} \text{ und}$$

$$r : 2\,s\,1 = sc\,n : s\,\overline{n+1} - s\,\overline{n-1}$$

§. 74. Vermittelst dieser Regeln findet man die Sinus und Cosinus aller Bogen, so aus Graden zusammen gesetzet sind, wenn nur erst der Sinus wie auch der Cosinus eines Bogens bekannt ist, der nur einen Grad hält. Und eben dieses erlanget man auch, wenn man die Bogen aus Minuten zusammen setzet: es muß aber hier der Sinus, wie auch der Cosinus einer Minute bekannt seyn. Man kan aber

aber den Sinus einer Minute leicht haben, nachdem der ganze Umkreis des Cirkels berechnet ist. Denn bey so kleinen Bogen ist der Sinus von dem Bogen ganz nicht merklich unterschieden. Und da wir also XIV, 22. gefunden, daß der Bogen von einer Minute 0,0002908882 hält, wenn der Radius 1 ist; so drücket eben diese Zahl auch den Sinus einer Minute aus. Wenn aber der Sinus bekannt ist, so ist auch der Cosinus leicht zu finden. Denn weil überall $Rq = Sq + Cq$, und folgends $Rq - Sq = Cq$, XIV, 39. so bleibt das Quadrat des Cosinus übrig, wenn man von dem Quadrat des Halbmessers das Quadrat des Sinus abziehet, aus welchem man so dann den Cosinus selbst durch Ausziehung der Quadratwurzel erhalten kan. Verrichtet man diese Arbeit, so findet man den Cosinus von einer Minute, oder den Sinus von 89°, 59′ = 0,9999999577.

XIV. Abschnitt.

§. 75. Nun kan man die Arbeit selbst anfangen, wenn man nur erst noch bemerket, daß der Cosinus eines Bogens, welcher sich bey D anfängt und endiget, und welcher also eigentlich nichts ist, der Radius DC sey. Setzet man nun die Einheit, durch welche die Bogen von D an gemessen werden, sey eine Minute, und n bedeute ebenfals Zahlen von Minuten, und lässet erstlich n diese Einheit bedeuten, welche wir uns unter dem Bogen DE vorstellen können, so wird die Regel:

$$r : 2s\,1' = s\,1' : sc\,0' - sc\,2' \text{ und}$$
$$r : 2s\,1' = sc\,1' : s\,2'$$

Weil nun in diesen Proportionen die drey ersten Glieder bekannt sind, so findet man aus denselben den Sinus von 2′, wie auch $sc\,0 - sc\,2'$ oder $r - sc\,2'$; und wenn man dieses von dem Radius r abziehet: so bleibet $r - r + sc\,2' = sc\,2'$, das ist, der Sinus des Complements zu zweyen Minuten, oder der Sinus zu 89°, 58′, übrig.

§. 76. Nun setze man zweytens $n = 2$, und stelle sich diesen Bogen, grösserer Deutlichkeit halber, unter DF vor: so wird die Regel nunmehro:

$$r : 2s\,1' = s\,2' : sc\,1' - sc\,3', \text{ und}$$
$$r : 2s\,1' = sc\,2' : s\,3' - s\,1'.$$

Weil nun die drey ersten Glieder dieser Proportionen wieder bekannt sind, so findet man auch die vierten; und aus $sc\,1' - sc\,3'$ erhält man $sc\,3$, wenn man $sc\,1' - sc\,3'$ von $sc\,1'$ abziehet: aus $s\,3' - s\,1'$ aber wird $s\,3'$, wenn man demselben $s\,1'$ zusetzet.

 §. 77. Auf

XIV. Abschnitt.

§. 77. Auf eben die Art gehet man weiter. Man setze drittens n bedeute 3, und drücke also den Bogen DG aus: so werden die Regeln, vermittelst welcher der Sinus und Cosinus des Bogens 4 gefunden wird, diese:

$$r : 2 s 1 = s 3 : s c 2 - s c 4$$

$$r : 2 s 1 = s c 3 : s 4 - s 2.$$

Und dieses ist zu unserm Zweck hinlänglich: insonderheit da wohl schwerlich jemand eine neue Berechnung einer Tafel unternehmen wird, die bereits verfertiget ist, und es uns nur darum zu thun war, daß wir zeigten, wie sie habe verfertiget werden können.

§. 78. Wolte man die Sinus von Secunden zu Secunden oder wenigstens von zehen zu zehen Secunden haben, so könte man zwar nach eben der Anweisung verfahren, und es könte nicht schaden, wenn man es würklich bey den erstern 5 oder 6 Graden thäte; überhaupt aber wäre es zu weitläuftig. Man kan, wenn die Sinus der einzeln Minuten gefunden worden sind, hernach die Sinus der Secunden ohne merklichen Fehler, viel leichter haben, und wie dieses geschiehet, ist noch zu weisen, weil in den gemeinen Tafeln die Sinus der Secunden nicht anzutreffen sind, und man sie doch öfters gebrauchet; in welchem Fall man sie erst selbst berechnen muß. Es sey AB der Sinus des Bogens IA von einer beliebigen Zahl von Minuten, CD sey der Sinus des Bogens IC, von einer Zahl Minuten, die um eine grösser ist als die vorige, und der Bogen AC betrage also eine Minute: so kan man CE leicht haben, wenn man den Sinus AB von dem Sinus CD abziehet; und in guten Tafeln stehen gemeiniglich diese Unterschiede neben dem Sinus. Nun sey AF von einer beliebigen Zahl Secunden; zum Exempel von 17. Weil nun AC 60″ beträgt, so sage man AC : AF = 60″ : 17″ = CE : FG. Es wird dadurch FG gefunden, und wenn man diese FG zur AB = GH hinzusetzet, so bekommt man FH, den Sinus des Bogens IF, welcher um 17 Secunden grösser ist als IA. Denn wenn AC eine gerade Linie wäre, so wäre die Proportion AC : AF = CE : FG gewiß vollkommen richtig VII, 12. Nun ist AC von einer unmerklichen Krümme, da dieser Bogen nicht mehr als eine Minute hält; also kan auch diese Proportion, nicht merklich fehlen.

F. 394.

§. 79. Hat man nun den Cosinus, wie auch den Sinus eines Winkels, so findet man die Tangenten eben des Winkels, wenn man spricht, wie der Cosinus des Winkels zu seinem Sinus, so der Radius

dius zu der Tangente eben dieses Winkels XIV, 52. Diese Rechnung begreift man leicht, und wir haben uns also dabey nicht aufzuhalten. XIV. Abschnitt.

§. 80. In den gemeinen Tafeln wird der Radius von 1000 0000 Theilchen genommen, und in solchen Theilchen werden die Sinus und Tangenten aller Winkel ausgedrückt. Man kan aber auch die letztern zwo Ziffer derselben weglassen, und also die Sinus und Tangenten aus einem Radius ausdrücken, welcher nur 100000 Theilchen hat, welches zu der gemeinen Ausübung überflüssig genug ist. Wer die Anleitung wohl verstehen wil, so wir nunmehr zu derselben geben wollen, muß sich mit solchen Tafeln oder dem so genannten Canone triangulorum, oder Canone sinuum & tangentium versehen.

§. 81. Allein, da die Sinus und Tangenten durch gar grosse Zahlen ausgedruckt werden, so würden sie in der Anwendung eine weitläuftige und beschwerliche Rechnung geben, wenn man dieselbe wie vor dem geschehen müssen, unmittelbar gebrauchen wolte. Man ist derowegen bedacht gewesen diese Arbeit zu erleichtern, und dieses konten die Logarithmen vollkommen leisten. Man hat derowegen die Logarithmen aller Zahlen gefunden, welche die Sinus und Tangenten ausdrücken, und dieselbe gehörig in Ordnung gebracht. Dieses kan auf eben die Weise geschehen, wie die Logarithmen anderer Zahlen gefunden worden.

§. 82. Dergleichen Tafeln sind gleichsam das Instrument, dessen man sich bey der Berechnung der Dreyecke bedienet. Wir können uns nunmehro würklich zu denselben wenden. Es gründet sich alles auf gar wenige Sätze, welche wir wiederholen, und sodann zeigen wollen, wie sie auf die würkliche Berechnung anzuwenden sind. Der erste dieser Sätze, und welcher am meisten gebraucht wird, ist nachfolgender.

Nähere Gründe zur Berechnung der Seiten und Winkel der Dreyecke.

§. 83. In einem jeden Dreyeck verhalten sich jede zwo Seiten gegen einander, wie die Sinus der Winkel, welche ihnen entgegen stehen. Es sey das Dreyeck ABC, in welchem man zween Winkel A und B nach Belieben angenommen, so ist: $\mathfrak{f}A : \mathfrak{f}B = BC : AC$. Denn wenn man aus der Spitze des dritten Winkels C auf die ihm entgegen gesetzte Seite AB die gerade Linie CD F. 395.

XIV. Abschnitt.

CD perpendicular fallen läßt, so bekommt man dadurch zwey rechtwinklichte Dreyecke CAD, CBD, ausser wenn der Winkel bey B gerade ist, in welchem Fall CD mit der CB zusammen fällt. Es verhält sich aber, wie wir XIV, 42. gesehen, in einem jeden geradwinklichten Dreyeck die gröste Seite zu einer der übrigen, wie der Radius oder der gröste Sinus, zu dem Sinus des Winkels, welcher der letztern Seite entgegen stehet. Also hat man in den zwey rechtwinklichten Dreyecken ABC, CDB, wenn R wieder den Radius bedeutet:

$AC : CD = R : sA$

$CB : CD = R : sB$, und folgends VIII, 32. weil die mittlern Glieder dieser Proportionen gleich sind: $AC : CB = sB : sA$, oder verkehrt: $sA : sB = BC : AC$.

Bey rechtwinklichten Dreyecken aber kommt dieser Satz mit demjenigen überein, so hier zum Grunde geleget wird; denn der Sinus des Winkels B ist der Radius, wenn B gerade ist, und es verwandelt sich also in diesem Fall die gegenwärtige Proportion in die folgende $AC : CB$, oder $CD = R : sA$, welche von der zum Grund gelegten Proportion nicht verschieden ist. Man siehet aus dem Beweiß, daß auf die Grösse des Winkels C nichts ankommt. Und solte man bey den stumpfen Winkel B noch einigen Zweifel haben, so hat man sich nur zu erinnern, daß zween Winkel die neben einander auf einer geraden Linie stehen, gleiche Sinus haben XIV, 44.

§. 84. Aus dieser Proportion $AC : CB = sB : sA$ folgern wir, wie allzeit geschehen kan VI, 92. $AC + CB : AC - CB = sB + sA : sB - sA$. Nun haben wir XIV, 68. gesehen, daß die Verhältniß $sB + sA : sB - sA$ der Verhältniß $t.\frac{B+A}{2} : t.\frac{B-A}{2}$ gleich sey. Man wird also diese Verhältniß vor jene setzen, und also schliessen können: $AC + CB : AC - CB = t.\frac{B+A}{2} : t.\frac{B-A}{2}$. Es verhält sich nemlich in einem jeden Dreyeck die Summe zwoer Seiten $AC + CB$ zu ihrem Unterschied $AC - CB$, wie die Tangente der halben Summe der Winkel A und B, deren keiner zwischen diesen Seiten liegt, zu der Tangente des halben Unterschiedes eben dieser Winkel. Der Winkel C liegt zwischen den zwo erwehnten Seiten, und dessen wird in der gegebenen Proportion nicht erwehnet.

§. 85. Diese zwey Sätze sind zur Auflösung aller der Aufgaben hinlänglich, bey welchen unter den Theilen der Dreyecke, welche gegeben

geben sind, wenigstens ein Winkel vorkommet. Nur muß man sich dessen erinnern, daß in einem jeden Dreyeck, wenn zween Winkel bekannt sind, auch der dritte nicht unbekannt seyn könne. Denn man kan ihn allezeit finden, wenn man die Summe der zwey bekannten Winkel von zweyen geraden Winkeln abziehet IV, 229. welches durch Zahlen geschiehet, wenn man die Summe der Maaße zweyer Winkel, von dem Maaße zweyer geraden, oder von 180° wegnimmt. Es sey der Winkel A des Dreyecks ABC = 65°, 30 und B enthalte 59°, 26, so ist die Summe dieser Maaße = 124°, 56. Dieses von 180°, das ist, von 179°, 60 abgezogen lässet 55°, 10; und dieses ist das Maaß des Winkels C. Aus eben dem Grund, und auf eben die Art wird auch die Summe der zwey übrigen Winkel eines Dreyecks gefunden, wenn ein Winkel dieses Dreyecks bekannt ist. Es sey in dem Dreyeck ABC der Winkel C bekannt, und sein Maaß sey 55°, 10. Man ziehe dieses von 180°, oder welches eben so viel ist, 179°, 60 ab, so bleibt 124°. 56. Dieses ist die Summe der beyden Winkel A+B, und die Helfte ihrer Summe ist demnach 62°, 25.

XIV. Abschnitt.

F. 396.

§. 86. Es können bey den Dreyecken, deren Berechnung wir nunmehro ohne weitern Anstand geben können, nachfolgende Aufgaben vorkommen, welche darinnen verschieden sind, daß immer andere und andere Theile derselben gegeben werden. Drey Theile eines Dreyecks müssen gegeben seyn, und wir haben zu weisen, wie aus denselben alle übrige Theile dieser Figuren zu berechnen sind, aber unter den gegebenen Theilen muß wenigstens eine Seite vorkommen XIV, 36. Ist nun nur eine Seite des Dreyecks gegeben, so müssen zween Winkel desselben gegeben seyn, sonst hätte man nicht drey bekannte Theile. Allein zween Winkel eines Dreyecks geben auch den dritten, und man siehet also, daß wenn eine Seite des Dreyecks bekannt ist, alle drey Winkel desselben bekannt seyn müssen. Und demnach lieget die bekannte Seite in Ansehung der bekannten Winkel in diesem Fall immer auf einerley Art. Sie lieget immer zwischen bekannten Winkeln, und ist einem bekannten Winkel entgegen gesetzt.

§. 87. Sind aber zwo Seiten in einem Dreyeck bekannt, so darf nur ein Winkel bekannt seyn. Dieser Winkel lieget nun entweder zwischen den bekannten Seiten, oder er ist einer derselben entgegen gesetzt. Und man hat also hier zwey verschiedene Fälle, deren Auflösungen besonders zu weisen sind. Es seyen in dem Dreyeck ABC die

XIV. Abschnitt. zwo Seiten AC und AB gegeben, so ist ausser denselben entweder der Winkel A bekannt, welcher zwischen AC und AB lieget, oder B, welcher der AC entgegen stehet. Denn wenn man vor B den Winkel C als bekannt annehmen wil, so hat man eben das. Der Winkel C ist so wohl einer bekannten Seite AB entgegen gesetzt, als der Winkel B der bekannten Seite AC entgegen stehet.

§. 88. Endlich können in einem Dreyeck alle drey Seiten gegeben seyn. Ein jeder Winkel desselben lieget in diesem Fall zwischen bekannten Seiten, und ist einer bekannten Seite entgegen gesetzt, und man kan sich also wieder bey dieser Aufgabe keine Fälle, die in der Auflösung von einander unterschieden wären, vorstellen. Bey allen diesen Umständen, sind alle Winkel der Dreyecke, und alle Seiten, die nicht gegeben werden, durch die Rechnung heraus zu bringen.

Würkliche Berechnung der Dreyecke.

§. 89. Ist in einem Dreyeck eine Seite zusamt zweyen, das ist wie wir XIV, 86. gesehen, allen dreyen Winkeln, gegeben: so bleibt nichts zu suchen übrig, als die übrigen Seiten. Diese aber findet man vermittelst des einzigen Satzes von der Proportion der Sinus zweyer Winkel zu den ihnen entgegen gesetzten Seiten XIV, 83. Gesetzt AB sey die gegebene Seite, so sage man:

$$\mathfrak{s}C : \mathfrak{s}A = AB : CB \text{ und}$$
$$\mathfrak{s}C : \mathfrak{s}B = AB : AC.$$

Weil nun die Winkel alle bekannt, und ihre Sinus aus den Tafeln zu haben sind, so kan man vermittelst dieser Proportionen beyde Seiten CB und AC finden.

§. 90. Es sey der Winkel C von 55°, 16 so ist der Logarithmus seines Sinus aus der Tafel = 9,9142464, und wenn der Winkel A 65°, 36 hält, so ist der Logarithmus seines Sinus = 9,9590229. Wenn nun AB nach einem beliebigen Maaßstab 57, 32 Theilchen hat, von welcher Zahl der Logarithmus 3,7583062 ist, so ist $CB = \frac{\mathfrak{s}A}{\mathfrak{s}C} \times AB$, folgends XIII, 160 $l\mathfrak{s}A + lAB - l\mathfrak{s}C = lCB$. Die Rechnung selbst aber vermittelst welcher lCB gefunden wird, stehet also:

$$\left.\begin{array}{l} l\mathfrak{s}C = 9,9142464 \\ \left.\begin{array}{l} l\mathfrak{s}A = 9,9590229 \\ lAB = 3,7583062 \end{array}\right\} \text{add.} \\ \hline \quad 13,7173291 \\ \hline \quad 3,8030827 \end{array}\right\} \text{subt.}$$

Neben

Neben diesem Logarithmus stehet in der Tafel die Zahl 63545, und demnach hält CB 63,545 Theilchen, dergleichen AB 57,32 enthält.

§. 91. Sind in einem Dreyeck zwo Seiten gegeben und nur ein Winkel, so muß man allzeit die übrigen Winkel finden, ehe man weiter gehen kan. Man darf zu dem Ende nur einen der übrigen Winkel finden, so hat man den dritten. Es liegt aber der gegebene Winkel entweder zwischen den gegebenen Seiten oder nicht. Der letztere Fall ist etwas leichter aufzulösen und wir wollen also von demselben anfangen.

§. 92. Es sey in dem Dreyeck ABC der Winkel A wie auch die Seite AB und BC gegeben, und A sey von 65°,30′ AB = 57,32 und BC = 63,545, so findet man den Sinus des Winkels C wenn man schliesset: CB : AB = ſA : ſC, und es ist also der Logarithmus des Sinus dieses Winkels, oder $l ſC = l ſA + l AB - l CB$. Setzet man nun wieder wie vorher:

$$\left.\begin{array}{l} l\,CB = 3,8030827 \\ \left.\begin{array}{l} l\,AB = 3,7583062 \\ l\,ſA = 9,9590229 \end{array}\right\}\text{add.} \\ \overline{\quad 13,7173291} \end{array}\right\}\text{subt.}$$

so ist $l\,ſC = 9,9142464$, und schlägt man denselben unter den Logarithmen der Sinus auf, so stehet der Winkel 55°, 10′ darneben. Ist nun der Winkel C dergestalt gefunden worden, und A vorher bekant gewesen; so findet man auch den dritten Winkel B, wie gewiesen worden ist.

§. 93. Wir haben hier BC grösser angenommen als AB, in welchem Fall nur ein Dreyeck aus den Seiten AB, BC und aus dem Winkel A beschrieben werden kan. IV, 256. Der Winkel C ist in diesem Fall allzeit spitzig. Denn wenn A gerade oder stumpf ist, so ist C nothwendig spitzig. Ist aber A spitzig, so ist doch C kleiner als A, weil die Seite AB die dem Winkel C entgegen stehet, kleiner ist, als die Seite BC, die dem Winkel A entgegen stehet: IV, 240. also ist C auch nunmehro spitzig. Und man findet also bey dem Umstand, wenn BC > AB, den Winkel C allzeit aus den Tafeln unmittelbar. Denn in denselben stehen neben denen Sinus allzeit die spitzigen Winkel, zu welchen sie gehören.

§. 94. Ist aber wieder der Winkel A zusamt den Seiten AB und BC F. 397.

XIV. Abschnitt. BC gegeben, und ist AB grösser als BC: so kan man aus dem Winkel A, und aus den Seiten AB und BC nicht allein das Dreyeck ABC, sondern auch ein anders ABD verfertigen: IV, 254. Und der Winkel C des erstern ist das Supplement des Winkels D des Dreyecks ADB. Denn das Dreyeck BDC ist gleichschenklicht, weil BC=BD, und also ist der Winkel DCB dem Winkel BDC gleich. Nun ist BCD + BCA ohnstreitig zweyen geraden Winkeln gleich, also giebt auch C mit BDA eine Summe, die zweyen geraden Winkeln gleich ist. Wenn man also den Winkel C oder D eines solchen Dreyecks berechnen sol, so muß man zum voraus wissen, ob er spitzig oder stumpf sey. Ausser dem kan man von demselben nichts gewisses sagen. Man kan seinen Sinus wie vorher finden, aber ein jeder Sinus gehöret zu zween Winkeln, die mit einander zween gerade Winkel ausmachen, dergleichen die Winkel D und C sind. In diesem Fall ist also nichts übrig, als daß man die Winkel alle beyde berechne.

§. 95. Es sey $A=32°, 14'$, und also $l\,sA=9.7270273$, CB sey von 10, 00 und AB enthalte solcher Theile 15, 15. Wenn man nun auch hier schliesset:

$$BC:AB=sA:sC \text{ (oder } sD)$$

und rechnet wie vor:

$$\left.\begin{array}{l} l.BC= 3.0000000 \\ \left.\begin{array}{l} l.AB= 3.1804126 \\ l.sA= 9.7270273 \end{array}\right\}\text{add.} \\ \quad\quad\;\; 12.9074399 \end{array}\right\}\text{subtr.}$$

so ist $l.sC = 9.9074399$, welcher so wohl zu dem Winkel C als D gehöret. Der spitzige Winkel dieses Sinus ist $53°, 54'$, und der stumpfe bleibt übrig, wenn man den spitzigen von 180° abziehet. Demnach ist der Winkel $D=53°, 54'$, und $ACB=126°, 6'$. Und hieraus findet man den Winkel $CBA=21°, 40'$, und den Winkel $DBA=93°, 52'$.

§. 96. Hat man dergestalt die Winkel eines Dreyecks alle berechnet, so wird die dritte Seite nach der vorigen Aufgabe gefunden. Ist man nicht vermögend gewesen den Winkel bey B ganz und gar zu bestimmen, wie dieses in dem Fall der 397 Figur vorkommet, so kan auch die demselben entgegen gesetzte Seite nicht vollkommen bestimmet werden. Das einzige, so man thun kan, ist, daß man so wohl die Seite AD aus dem Winkel ABD und den übrigen, als auch die Seite AC aus dem Winkel ABC und den übrigen, berechne. So wohl die

die eine als die andere dieser Seiten kan bey der gegebenen Grösse des Winkels A, und der Seiten AB, BC statt haben, und dieses weiset die Rechnung. Es stehet aber in derselben Gewalt nicht zu weisen, welche von den beyden Seiten AD, AC in dem Dreyeck würklich vorkomme, welches man aus dem gegebenen Winkel A, und den zwo Seiten AB, BC=BD zusammen gesetzet hat. Man muß also in der Anwendung sich um andere Merkmale bekümmern, aus welchen man schliessen kan, ob ein Dreyeck, welches vor uns lieget, von der Beschaffenheit des ACB oder des ADB sey, das ist, ob der Winkel desselben, welcher der Seite AB entgegen stehet, spitzig oder stumpf sey. Dieses ist selten etwas schweres, und das Augenmaß ist meistentheils hinlänglich, es uns zu zeigen.

XIV. Abschnitt.

§. 97. Ist aber der Winkel C gegeben, welcher zwischen zwo bekanten Seiten AC und BC lieget, und sind die übrigen Winkel des Dreyecks A und B zu finden, so müssen die zwo Seiten AC, CB ungleich seyn. Denn wenn sie gleich wären, und wäre also das Dreyeck gleichschenklicht, so brauchte man die übrigen Winkel nicht weitläuftig zu suchen: weil in einem gleichschenklichten Dreyeck alle Winkel gegeben sind, so bald deren einer bekant ist. IV, 233. Sind nun aber die Seiten ungleich, so ist der gegebene Winkel C entweder gerade, wie in der 398 Figur, oder nicht. In dem ersten Falle findet man den Winkel A leicht aus der Proportion die unter den ersten XIV, 51. da gewesen ist

F. 398.

$$AC : CB = R : tA.$$

Es sey CA von 87,32 und CB von 52,70 Theilen, so wird weil lR allzeit 10.0000000 ist, die Rechnung also stehen:

$$\left.\begin{array}{l} l.AC = 3.9411137 \\ \left.\begin{array}{l} l.CB = 3.7218106 \\ l.\ R\ = 10.0000000 \end{array}\right\} \text{add.} \\ \overline{\quad 13.7218106} \end{array}\right\} \text{subtr.}$$

$$ltA = 9.7806969$$

und wenn man diesen Logarithmus unter den Logarithmen der Tangenten aufsuchet, so findet man das Maaß des Winkels A, nemlich 31°, 6′ und einige Secunden, darneben.

§. 98. Ist aber der Winkel C schief, er mag übrigens spitzig oder stumpf seyn: so kan man doch, wie XIV, 85. gewiesen worden ist, die Summe der übrigen Winkel A+B, und die halbe Summe $\frac{A+B}{2}$

F. 396.

 finden,

XIV. Abschnitt.

finden, und den Logarithmus der Tangente derselben $t\frac{A+B}{2}$ aus den Tafeln nehmen. Nun ist auch: XIV, 84.

$$AC+CB : CB-CA = t\frac{A+B}{2} : t\frac{A-B}{2}$$

Da nun also AC, CB, und folgends auch AC+CB, AC−CB ebenfals bekant sind, so findet man vermittelst der Tafel $l\,t\frac{A-B}{2}$: und schlägt man diesen Logarithmus unter den Logarithmen der Tangenten in der Tafel nach, so stehet das Maaß von $\frac{A-B}{2}$ darneben. Also hat man die halbe Summe der zwey gesuchten Winkel $\frac{A+B}{2}$, und ihren halben Unterschied $\frac{A-B}{2}$. Hieraus aber kan man den grössern Winkel durch die Addition, und den kleinern durch die Subtraction finden. XIV, 52.

§. 99. Es sey $C = 55°, 10'$; so ist $A+B = 180° - 55°, 10' = 124°, 50'$ und folgends $\frac{A+B}{2} = 62°, 25'$. Der Logarithmus der Tangente dieses Bogens, oder $l\,t\frac{A+B}{2}$ ist $= 10,2819827$. Es sey $AC = 60, 06$ und $= 62, 53$, in welchem Fall der Winkel A grösser ist als B, weil ihm die grössere Seite entgegen stehet, so ist $CB + AC = 122, 59$, und $CB - AC = 2, 47$; folgends

$$\left.\begin{array}{l} l.\,\overline{CB+CA} = 4,0884550 \\ \left.\begin{array}{l} l.\,\overline{CB-CA} = 2,3926970 \\ l\,t.\frac{A+B}{2} = 10,2819827 \end{array}\right\}\text{ add.} \\ \qquad\qquad\quad 12,6746797 \end{array}\right\}\text{ subtr.}$$

$$l\,t.\frac{A-B}{2} = 8,6862247.$$

Bey diesem Logarithmus stehet in der Tafel der Logarithmen der Tangenten, der Bogen $2°, 46'$, welcher folgends das Maaß ist des Winkels $\frac{A-B}{2}$. Und also ist der Winkel $A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = 62°, 25' + 2°, 46'$

2°,46′ = 65°, 11′, und der Winkel B = $\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$ = 62°, 25′ — 2°, 46′ = 59°, 39′. Hat man dergestalt wieder alle Winkel des Dreyecks ABC, so ist es leicht die übrige Seite AB zu finden.

XIV. Abschnitt.

§. 100. Nun ist nichts übrig, als daß wir weisen wie aus dreyen Seiten eines Dreyecks seine Winkel zu finden sind. Es müssen diese Seiten alle ungleich seyn, wenn die Sache einige Schwierigkeit haben sol. Denn wenn das Dreyeck ABC dessen drey Seiten gegeben sind, gleichschenklicht ist, und man ziehet auf die Grundlinie desselben BC durch die Spitze A die Perpendicularlinie CD, welche BC in zwey gleiche Theile theilen wird: so ist DB, die Helfte von BC, gegeben, weil BC gegeben ist, und man kan XIV, 92. in dem Dreyeck ADB, dessen Winkel D gerade, und folgends bekant ist, und dessen Seiten AB, BD gegeben sind, den Winkel BAD, und folgends auch den Winkel B finden. Hat man aber einen Winkel eines gleichschenklichten Dreyecks, so hat man auch alle übrige.

F. 399.

§. 101. Sind aber die drey Seiten eines Dreyecks ABC alle ungleich, und ist BC die gröste, AB die mittlere, und AC die kleinste dieser Seiten, so beschreibe man um die Spitze des Winkels A, welcher der grösten Seite BC entgegen gesetzt ist, durch C den Cirkelkreis DEF, welcher die gröste Seite in E, and die mittlere in F schneiden wird, und verlängere BA bis an den Umkreis in D, so ist AD = AF = AC, und BD = BA + AD ist die Summe der zwo kleinern Seiten des Dreyecks, BF aber = BA — AC ist der Unterschied dieser zwo Seiten: folgends sind diese Linien BD und BF beyde gegeben. Nun aber ist, wie an seinem Orte VII, 70. erwiesen worden, BC : BD = BF : BE. Da nun die drey ersten Glieder dieser Proportion bekant sind, so kan man das vierte finden. Dadurch wird BE bekant, und wenn man BE von BC abziehet, so bekomt man auch EC. Nun ziehe man AE, so ist das Dreyeck AEC gleichschenklicht, und man hat dessen Seiten AC = AE und EB. Es kan also der Winkel ACE, wie gewiesen worden, gefunden werden. Man ziehe nemlich AG auf EC perpendicular, so ist GC = $\frac{1}{2}$ EC, und folgends bekant. Nun sage man AC : GC = R : fGAC, so findet man den Winkel GAC, und sein Complement ACB kan also nicht unbekant seyn. Auf eben die Art findet man aus AB und BG den Winkel B: man kan ihn aber auch, nachdem C bekant ist, nach der oben gegebenen Anweisung finden. XIV, 92.

F. 400.

 §. 102.

XIV. Abschnitt.

§. 102. Dasjenige so von den gemeinen Dreyecken gewiesen worden ist, wird auch bey den dreyseitigen Ecken, oder den so genanten sphärischen Dreyecken aufgegeben, und nichts hat in der Sternkunst einen grössern Nutzen, als daß man aus drey Theilen einer solchen Ecke, die drey übrigen Theile zu finden wisse. Wir nennen die Theile einer solchen Ecke wieder die drey Seiten derselben und ihre Winkel. Und zwar mögen hier die Theile gegeben seyn wie sie wollen. Denn es werden aus den Winkeln einer dreyseitigen Ecke ihre Seiten so wohl bestimmet, als sich aus den schicklich angenommenen Seiten ihre Winkel geben; wie wir gesehen, als wir diese Ecken betrachtet haben. XII, 71.

Vorbereitung zur Erfindung der Regeln, nach welchen die dreyseitigen Ecken zu berechnen sind.

§. 103. Die Regeln nach welchen diese Auflösungen geschehen, fliessen aus den Regeln vor die gemeinen Dreyecke gar leicht, wenn man sich nur die Sache geschickt vorstellet. Vors erste müssen die Regeln ausfündig gemacht werden, nach welchen sich die geradewinklichten Ecken auflösen lassen; so dann aber diejenigen, welche vor die schiefwinklichten Ecken von dreyen Seiten gelten.

§. 104. Es kan aber die Hypotenuse einer dreyseitigen Ecke, die einen geraden Winkel hat, entweder spitzig oder stumpf seyn. Den ersten Fall stellet die 401 Figur vor, da die Ebene NRr auf der RMr perpendicular stehet, und mit dieser bey R, r gerade Winkel einschliesset; und NCM die Hypotenuse vorstellet, welche den zwo dreyseitigen Ecken NCMR und NCMr gemeinschaftlich ist. In diesem Fall sind die beyden Seiten, welche den rechten Winkel einschliessen, entweder beyde spitzig wie NCR und MCR, oder sie sind beyde stumpf wie NCr und MCr. XII, 89. Und zwar sind die Seiten des Dreyecks NCMR die Ergänzungen der Seiten des Dreyecks NCMr zu zween geraden Winkeln, oder zu 180°. Die Winkel aber bey N und M sind in der Ecke NCMR ebenfals spitzig; in der Ecke NCMr aber sind diese Winkel stumpf: XII, 82. und es ergänzet der Winkel bey M der Ecke NCMR den Winkel bey M der nebenstehenden Ecke NCMr; und der Winkel bey N der erstern Ecke NCMR ergänzet den Winkel bey N der zweyten NCMr zu zweyen geraden Winkeln. Demnach haben so wohl die Seiten dieser zwo Ecken, welche auf einerley Art liegen NCR und NCr, wie auch MCR und MCr einerley Sinus und Tangenten,

F. 401.

als

als auch die Winkel der beyden Ecken bey M und N: und da also die Hypotenuse NCM den beyden Ecken gemeinschaftlich, und die Winkel R, r beyderseits gerade sind, so kan man nicht anders, man muß die Sinus und Tangenten der Seiten und Winkel der Ecke NCMR, deren Seiten und Winkel spitzig sind nehmen, wenn man die Sinus und Tangenten der Seiten und Winkel in der Ecke NCMr anzeigen wil. XIV, 44, 56. Und wenn man also die Ecke NCMR berechnet, und aus drey Theilen derselben die übrigen findet, so thut man in der That eben dieses auch mit der Ecke NCMr. Es kan die eine nicht ohne die andere berechnet werden: und wenn wir demnach zeigen, wie bey der Ecke NCMR zu verfahren sey, wenn man aus drey Theilen derselben die übrigen finden wil, so wird eben dadurch auch gewiesen, wie die Ecke NCMr zu berechnen ist.

XIV. Abschnitt.

§. 105. Die andere Art einer geradwinklichten dreyseitigen Ecke, deren Hypotenuse stumpf ist, ist in der 402 Figur gezeichnet. In derselben muß man sich NRC auf MRm perpendicular vorstellen; wodurch die Winkel bey R beyde gerade werden. Die Fläche MNm aber machet mit der Fläche MRm einen spitzigen Winkel, den wir mit M und m bezeichnen. Dadurch wird auch die diesem Winkel M oder m entgegen gesetzte Seite NCR spitzig. XII, 82. Hat man nun RCm mit Fleiß stumpf angenommen, so ist auch die Seite NCm stumpf. Denn diese Seite stehet in der dreyseitigen Ecke NCRm dem geraden Winkel R entgegen, und ist folgends die Hypotenuse, welche stumpf seyn muß, weil eine von den Seiten, die den geraden Winkel R einschliessen, nemlich NCR spitzig ist, und die andere RCm stumpf. XII, 84. Man siehet aber auch hier leicht, daß die fortgeführten Seiten dieser Ecke NCRm eine andere dergleichen Ecke NCRM machen, welche die Seite NCR, wie auch den Winkel M=m mit der vorigen NCRm gemeinschaftlich hat, und deren übrige Seiten und Winkel, die Seiten und Winkel der vorigen zu 180° ergänzen. Denn die Seite NCM ergänzet augenscheinlich die Seite NCm zu zweyen geraden Winkeln, und MCR thut eben das in Ansehung der RCm. Die zween Winkel bey N aber machen zusammen gesetzt ebenfals zween gerade Winkel. Also haben wieder die Seiten und Winkel der dreyseitigen Ecken NCRM und NCRm, welche an einander liegen, gleiche Sinus und Tangenten: und wenn das eine dieser Dreyecke berechnet wird, so wird das andere zugleich berechnet; weil so wohl die als bekant angenommenen, als auch die gesuchten, Sinus und Tangenten, sich vor die

 eine

XIV. Abschnitt. eine Ecke so wohl als für die andere schicken. Wir haben uns also wieder bey der Ecke NCRm nicht aufzuhalten, sondern nur zu zeigen, wie die Ecke NCRM zu berechnen sey, in welcher so wohl die Seiten NCM, MCR, NCR als auch die den zwo letztern bey N und M entgegen gesetzte Winkel spitzig sind.

§. 106. Es kan uns dabey nicht aufhalten, daß es geradwinklichte Ecken gebe, bey welchen auch eine Seite einen rechten Winkel hält, oder bey welchen ausser dem bey R noch ein gerader Winkel anzutreffen ist. Denn man kan überhaupt einen geraden Winkel als den grösten unter allen spitzigen, oder als den kleinsten unter allen stumpfen Winkeln betrachten, und unter dieser Benennung und den Einschränkungen, welche dieselbe an die Hand giebet, hernach dasjenige auf ihn anwenden, was von den spitzigen oder stumpfen Winkeln erwiesen wird.

§. 107. Damit wir nun die Regeln heraus bringen, welche wir suchen, und welche uns anleiten sollen, aus jeden drey Theilen einer geradwinklichten dreyseitigen Ecke, den vierten Theil zu finden: so stelle man sich vor, daß man in den beyden letztern Figuren eine vierte Fläche NRM dergestalt geleget habe, daß die gerade Linie CM auf derselben perpendicular stehe; und daß diese Fläche von den drey Seiten der Ecke NCRM geschnitten, und durch diese Schnitte das Dreyeck NMR hervor gebracht werde. So sind die Winkel CMR, CMN beyde gerade, weil die Linie CM, die auf der Fläche NMR perpendicular stehet, mit allen Linien in dieser Fläche, die durch M gehen, gerade Winkel machet, X, 30. und der Winkel NMR misset also die Neigung der Fläche NMC auf die Fläche MCR, und ist dem Winkel M der dreyseitigen Ecke NCMR gleich. X, 42. Ausser dem aber ist die Fläche CMR auf die Fläche NMR perpendicular, weil sie durch die Linie CM gehet, die auf NMR perpendicular ist; X, 47. und also stehet hinwiederum NMR auf CMR gerade. Da nun aber auch die Fläche NCR auf eben der CMR gerade stehet, und diese Flächen NRM, NRC einander in NR schneiden, so ist auch diese Linie NR auf die Fläche MCR perpendicular, X, 49. und der Winkel NRM in dem Dreyeck NRM, ist so wohl als der Winkel NRC, gerade. X, 30. F. 401. 402.

§. 108. Wir haben also durch diesen Schnitt, vermittelst der Fläche NMR die Seiten der geradwinklichten dreyseitigen Ecke NCMR alle zu geradwinklichten Dreyecken gemacht, und über dieses das vierte geradwinklichte Dreyeck NMR erhalten, dessen Winkel NMR dem Win-

Winkel der Ecke M gleich ist, ob zwar der Winkel MNR des Dreyecks, von dem Winkel N der dreyseitigen Ecke verschieden ist, weil NC auf NR und NM schief stehet. Wir können also nunmehro zu desto grösserer Deutlichkeit die Seiten einer solchen Ecke neben einander in eine Ebene legen. Und dieses zwar folgender gestalt. Wobey man allzeit die mit einerley Buchstaben bezeichnete Linien und Winkel sich das erste mal in der 403, und das zweyte mal in der 401 oder 402 Zeichnung, vorstellen muß. Man ziehe MC und mache sie der MC gleich. Durch M ziehe man auf MC die Linie NR perpendicular, und mache MN = MN und MR = MR; so kan man von N und R nach C die Linien NC und RC ziehen, wodurch das geradwinklichte Dreyeck NCM der Seite NCM, und das ebenfals geradwinklichte Dreyeck MCR der Seite MCR gleich und ähnlich wird. Demnach ist der Winkel NCM der Seite NCM, und der Winkel MRC der Seite MCR gleich, aber auch NC = NC und RC = RC. Es ist aber NCM in den beyden dreyseitigen Ecken die Hypotenuse, weswegen wir diesen Winkel mit einem H bezeichnet haben.

XIV. Abschnitt.

F. 403.

§. 109. Man setze auf die CR die RN perpendicular, mache sie der RN gleich, und ziehe NC, so ist wieder das rechtwinklichte Dreyeck RCN der Seite RCN gleich, und folgends der Winkel RCN gleich dem Winkel RCN; aber auch NC = NC. Diese NC kommt in unserer 403 Figur nochmals vor, weil die einzige NC in der dreyseitigen Ecke NRCM zu zwo Seiten gehöret, nemlich zu NCM und NCR, welche in der gegenwärtigen Figur von einander abgesondert werden müssen. Die Winkel MCR, RCN sind diejenigen, deren Flächen in der dreyseitigen Ecke den geraden Winkel R einschliessen. Man kan eine derselben, welche man wil vor die Grundseite annehmen, so ist die andere die Perpendicularseite. In unsern Figuren stellet MCR die Grundseite, und NCR die Perpendicularseite vor, derowegen ist MCR mit B, und NCR mit P bezeichnet. Man kan also diese Benennungen nach Belieben verwechseln; allein weil wir in den Figuren den Winkel an der Grundseite mit M, und den Winkel an der Perpendicularseite mit N bezeichnet haben; so muß man diese Benennungen zugleich verwechseln, wenn man jene verwechselt: das ist, so bald man die Seite P, die man vorher als die Perpendicularseite angesehen, vor die Grundfläche B annimmet, so muß man auch den Winkel, welchen man vorher als den Winkel an der Grundseite angesehen, und mit M bezeichnet hatte, als den Winkel an der Perpendicularseite ansehen, und wenn man sich nach unsern Figuren richten wil, mit N bezeich-

XIV. Abschnitt. zeichnen; im Gegentheil aber muß man den Winkel, welchen man vorhero N genennet, nunmehro M nennen.

§. 110. Man verlängere nunmehro CR bis RM der Seite RM des Dreyecks RCM gleich wird, und ziehe NM; so wird das rechtwinklichte Dreyeck NRM dem Dreyeck an den Ecken NRM gleich und ähnlich, und der Winkel desselben M, wird dem Winkel, welchen wir in der Ecke ebenfals mit M bezeichnet haben, gleich. XIV, 107. Die Linie NM aber wird der Linie NM gleich, welche eine Seite in dem Dreyeck NCM abgiebet, weil beyde der Linie NM in der Ecke gleich sind. Es sind also überhaupt in den gegenwärtigen drey Zeichnungen, die Linien und Winkel, welche einander gleich sind, mit einerley Buchstaben bezeichnet. Folgends können wir die Regeln, welche wir suchen, aus der 403 Figur allein schliessen, welches die Sache gar leicht machet; doch wird man nicht übel thun, wenn man zugleich die Augen von Zeit zu Zeit auf die vorhergehenden zwo Figuren zurück wirft.

Regeln zur Berechnung der geradewinklichten dreyseitigen Ecken.

§. 111. Man sehe MC als den Radius an, so ist NM die Tangente des Winkels NCM oder H, und MR ist die Tangente des des Winkels MCR, welchen wir B nennen. XIV, 47. Eben diese Linien kommen auch in dem Dreyeck MRN vor, und es verhält sich in diesem Dreyeck MN zu MR, wie der Sinus des geraden Winkels R, das ist, wie der Radius, zu dem Cosinus des Winkels M. XIV, 42. Wir haben also:

$MN : MR = tH : tB$, und

$MN : MR = r : \int cM$, folgends ist

$r : \int cM = tH : tB$.

Und dieses ist so gleich eine der gesuchten Regeln, vermittelst welcher man, wenn in einer rechtwinklichten Ecke, ausser den geraden Winkel, der Winkel M und die Hypotenuse H gegeben wird, die Grundseite B unmittelbar finden kan.

§. 112. Da aber auch die Glieder einer jeden Proportion sich dergestalt versetzen lassen, daß dasjenige Glied, welches man wil, die letzte Stelle einnehme, und da in unserm Exempel man auch sagen kan:

$\int cM : r = tB : tH$,

und $tH : tB = r : \int cM$,

so

so siehet man, daß eben diese Regel auch dienen könne, aus dem Winkel M, an der Grundseite, und aus der Grundseite B die Hypotenuse H zu finden: wie auch, aus der Hypotenuse H, und aus der Grundseite B den Winkel M zu schliessen, welcher an der Grundseite lieget. Wir erinnern dieses ein für allemal. Denn es ist nichts leichter als dieses auf alle ähnliche Fälle anzuwenden.

§. 113. Wir können aber auch in dieser Regel die Benennungen verwechseln, und an statt B schreiben P, welchem zu folge auch N an statt M gesetzt werden muß. XIV, 109. Dadurch bekommet die Regel dieses Ansehen:

$$r : scN = tH : tP.$$

wird aber im Grunde von der vorigen nicht verschieden.

§. 114. Die zweyte Regel heraus zu bringen, nehme man NC vor den Radius an, so ist NM der Sinus des Winkels NCM, und folgends $= sH$, und NR ist der Sinus von NCR $= sP$. Und da man die Linien NM, RN auch vermittelst des Dreyecks MRN mit einander vergleichen kan, so kan man wieder aus zwo Proportionen, wie vorher, schliessen. In dem Dreyeck NRM ist:

$NM : RN = r : sM$. Vorhero war

$NM : RN = sH : sP$, folgends ist:

$r : sM = sH : sP$.

Dieses ist die zweyte Regel und auf andere Fälle eingerichtet. Man kan in derselben wieder an statt P, B schreiben, und N an statt M setzen, so wird eben diese Regel durch andere Benennungen ausgedrückt, welche sie zur Anwendung bequemer machet. Sie stehet unter diesen Benennungen also: $r : sN = sH : sB$.

§. 115. Die dritte Regel erhält man, wenn man RC vor den Radius annimmet. Dadurch wird RM der Sinus des Winkels B und NR wird die Tangente zu P. Eben diese Linien kan man auch vermittelst des Dreyecks NRM vergleichen, in welchem sie ebenfals vorkommen. Es ist also

$RM : RN = sB : tP$, und

$RM : RN = r : tM$, folgends

$r : tM = sB : tP$, und dieses ist die Regel, welche wir suchten, in welcher man wieder die Benennungen P, B, wie auch M und N verwechseln, und dadurch eben diese Regel also ausdrucken kan:

$r : tN = sP : tB$.

XIV. Abschnitt.

§. 116. Aus diesen drey Regeln kan man nun die übrigen alle schliessen, und man braucht nicht einmal eine Figur dazu. Es ist klar, daß, da in einer solchen Proportion, als diejenigen sind, die wir bereits gegeben haben, drey Buchstaben vorkommen, welche drey Theile einer dreyseitigen Ecke bedeuten, man aus jeden zwey Theilen, die ausser dem geraden Winkel gegeben sind, und durch zwey dieser Buchstaben bedeutet werden, den dritten Theil finden könne, welchen der dritte Buchstaben bedeutet. Man muß sich also nur bemühen, vermittelst der bekannten Proportions-Regeln und demjenigen, so wir gewiesen, als wir die Sinus und Tangenten zu erklären uns bemüheten aus den bereits gefundenen Regeln andere zu schliessen, in welchen andere Buchstaben verknüpft werden: welches geschehen kan, weil die drey gefundenen Regeln zusammen alle Theile einer geradwinklichten Ecke enthalten. Wir haben diese Regeln, zu einiger Erleichterung der folgenden Schlüsse hier zusammen gesetzt.

Reg. I. $r : \int c M = t H : t B$,
oder $r : \int c N = t H : t P$.
Reg. II. $r : \int H = \int M : \int P$,
oder $r : \int H = \int N : \int B$.
Reg. III. $r : \int B = t M : t P$,
oder $r : \int P = t N : t B$.

§. 117. Nunmehro setzen wir uns vor, eine Regel heraus zu bringen, in welcher die drey Buchstaben M, N und P alleine vorkommen, welches in keiner der bereits gefundenen Regeln zutrift. So ist

Reg. II. $r : \int H = \int M : \int P$
wie auch $r : \int H = \int N : \int B$,
folgends $\int M : \int P = \int N : \int B$. Nun ist ferner
Reg. III. $r : t M = \int B : t P$
und überhaupt $\int P : \int c P = t P : r$
wie auch $t M : \int M = r : \int c M$, XIV, 52.

Setzet man nun die Verhältnisse dieser vier letztern Proportionen zusammen, so erhält man VIII, 40.

Reg. IV. $r : \int c P = \int N : \int c M$.

Man kan die Buchstaben dieser Regel wieder wechseln, und dieselbe dadurch folgendergestalt ausdrucken:

$r : \int c B = \int M : \int c N$.

§. 118. Die

§. 118. Die nächste Regel sol die Buchstaben B, P und H enthalten. Diese kan man also machen. Es ist:

Reg. IV. $r : \int cP = \int N : \int cM$

Reg. I. $r : tH = \int cM : tB$,

überhaupt $tH : \int H = r : \int cH$ XIV. 52.

Reg. II. $\int H : r = \int B : \int N$

überhaupt $r : \int cB = tB : \int B$

und $\int cB : r = \int cB : r$.

Man setze alle diese Verhältnisse zusammen, so wird

Reg. V. $r : \int cP = \int cB : \int cH$.

Man kan die Buchstaben P, B auch in dieser Regel versetzen, allein sie wird dadurch ganz und gar nicht geändert, wie man leicht siehet.

§. 119. Die letzte Regel endlich sol die Buchstaben M, N und H enthalten. Diese kan man folgendergestalt heraus bringen. Es ist:

Reg. V. $r : \int cP = \int cB : \int cH$

Reg. IV. $\int cP : r = \int cM : \int N$

und $\int M : \int cN = r : \int cB$

überhaupt $\int cN : tcN = \int N : r$, XIV. 52.

wie auch $tM : \int M = r : \int cM$.

Man setze diese Verhältnisse wieder zusammen, so kommt:

Reg. VI. $tM : tcN = r : \int cH$

oder $r : \int cH = tM : tcN$.

Auch hier kommt durch die Verwechselung der Benennungen M, N, nichts bequemers.

§. 120. Wir haben also nachfolgende zehen Regeln heraus gebracht:

I. $r : \int cM = tH : tB$.

II. $r : \int H = \int M : \int P$.

III. $r : \int B = tM : tP$.

IV. $r : \int N = \int cP : \int cM$,

V. $r : \int cB = \int cP : \int cH$,

VI. $r : \int cH = tM : tcN$.

VII. $r : \int cN = tH : tP$.

VIII. $r : \int H = \int N : \int B$.

IX. $r : \int P = tN : tB$.

X. $r : \int M = \int cB : \int cN$.

Deren vier letztere zwar aus den vier erstern durch die blosse Verwechselung der Benennungen P, B, und N, M, leicht können gemacht werden, aber doch wie bereits angemerket worden, einige Bequemlichkeit in der Anwendung geben. Und diese Regeln sind hinlänglich alle geradwinklichte dreyseitige Ecken aufzulösen, welches das einzige ist, so wir noch erweisen müssen.

XIV. Abschnitt.

§. 121. Man hat nemlich in einer dergleichen Ecke, ausser dem geraden Winkel, noch fünf Theile, drey Seiten nemlich B, P, H, und zween Winkel M, N. Aus jeden drey Theilen einer solchen Ecke sol jeder vierter Theil gefunden werden: der gerade Winkel aber stehet allezeit unter den bekannten drey Theilen; folgends sind ausser demselben noch zwey bekannte Theile, aus welchen ein jeder dritter zu finden ist. Nun enthält eine jede unserer Regeln, ausser dem Zeichen des Sinus eines geraden Winkels r, drey Buchstaben, welche drey Theile des Dreyecks bedeuten, aus denen zweyen, nach Anleitung der Regeln, der dritte durch die gemeine Proportionsregel, oder bequemer, durch die Logarithmen, gefunden werden kan: Es folget also, daß, wenn in unsern zehen Regeln jede drey der fünf Buchstaben B, P, H, M, N, vorkommen, welche man nur zusammen setzen kan, die Regeln zur Auflösung aller Fälle hinlänglich seyn werden.

§. 122. Es lassen sich aber drey und drey der fünf Buchstaben B, P, H, M, N auf diese Arten zusammen setzen:

BPH	BHM	BMN	PHM	PMN	HMN
BPM	BHN		PHN		
BPN					

und man siehet leicht, daß man sie nicht auf mehrere Arten zusammen setzen könne, wenn man auf die Ordnung Acht hat, welche wir bey dieser Zusammensetzung beobachtet haben, da wir nemlich erstlich die letztern; und so dann nach und nach auch die vorhergehenden Buchstaben so oft verändert, als dieses geschehen können. Nun sind diese zehen Zusammenfügungen der Buchstaben alle in den zehen Regeln enthalten, welche angegeben worden, wie man sehen kan, wenn man sich die Mühe geben wil, beydes zusammen zu halten; es sind also die Regeln vor alle Fälle, die bey den geradewinklichten Ecken vorkommen können, hinlänglich.

Anwendung dieser Regeln.

§. 123. Es ist kaum nöthig, daß wir zeigen, wie diese Regeln zu gebrauchen sind, so leicht ist dieser Gebrauch. Doch kan ein oder anderes Exempel nicht schaden. Es sey in einer geradwinklichten dreyseitigen Ecke, oder in einem sphärischen Dreyeck, aus der Grundseite, und aus der Hypotenuse der Winkel zu finden, welcher zwischen diesen beyden Seiten lieget; so ist dasjenige bekannt, so wir mit B bezeich-

bezeichnet haben, wie auch die Seite H, und wird der Winkel gesucht, bey welchem in unsern Figuren allezeit M stehet. Man nehme demnach aus den zehen gegebenen Proportionen diejenige, in welcher H, B und M vorkommen, diese ist die erste, $r : \int c M = t H : t B$, aber da hier M gesucht wird, so versetze man die Glieder dieser Proportion dergestalt, daß M das letzte werde, und mache $t H \; t B = r : \int c M$, so siehet man, daß man sagen müsse, wie die Tangente der Hypotenuse zur Tangente der Grundseite: so der Radius zu dem Cosinus des gesuchten Winkels M, welcher demnach vermittelst der Logarithmen leicht kan gefunden werden.

Es sey aus dem Winkel an der Perpendicularseite und aus dem Winkel an der Grundseite, die Grundseite zu finden, so hat man N, M, und B wird gesucht. Diese drey Buchstaben kommen in der zehenden Regel $r : \int M = \int c B : \int c N$ vor. Versetzt man nun die Glieder derselben dergestalt, daß das gesuchte B in die vierte Stelle komme, so stehet sie also: $\int M : r = \int c N : \int c B$, und man siehet, daß man sagen müsse, wie der Sinus des bekannten Winkels M zu dem Radius, so der Cosinus des ebensals bekannten Winkels N, zu dem Cosinus des Winkels B, welchen man suchte.

Es sey aus der Hypotenuse und aus der Perpendicularseite die Grundseite zu finden, so ist H und P gegeben, und B wird gesucht. Die fünfte Regel $r : \int c B = \int c P : \int c H$ enthält diese drey Buchstaben. Versetzt man die Glieder derselben und machet $\int c P : \int c H = r : \int c B$, so siehet man, daß man sagen müsse: wie der Cosinus der Perpendicularseite, zu dem Cosinus der Hypotenuse, so der Radius zu dem Cosinus der gesuchten Grundseite B.

§. 124. Es ist übrigens bey diesen Auflösungen zu merken, daß, da die Sinus und Tangenten welche man findet, zu spitzigen Winkeln so wohl als zu den stumpfen gehören, welche jene zu zweyen rechten Winkeln ergänzen, man wissen muß ob die Seite oder der Winkel, welchen man suchet, spitzig oder stumpf sey, wenn man das eigentliche Maaß desselben aus dem vermittelst der Regel gefundenen Sinus oder Tangenten bestimmen will. Dazu dienen die Eigenschaften, welche wir von diesen Ecken XII, 82. angemerket haben, daß nemlich B und N, wie auch P und M entweder zugleich spitzig, oder zugleich stumpf seyen. Wie auch, daß wenn H spitzig ist, P und B entweder beyde spitzig oder beyde stumpf seyn, XI, 89. da denn, dem vorigen zu folge, auch die Winkel M und N entweder beyde spitzig oder beyde

 de

XIV. Abschnitt.

de stumpf seyn müssen. Ferner daß, wenn H stumpf ist, nothwendig eine der Seiten P, B spitzig, und die andere stumpf seyn müsse; und daß folgends, bey diesem Umstand, auch einer der Winkel N, M spitzig sey, und der andere stumpf. Endlich daß, wenn die Seiten B, P, oder die Winkel M, N beyde spitzig oder stumpf sind, die Hypotenuse H spitzig sey; und stumpf, wenn einer der Winkel M, N, oder eine der Seiten B, P spitzig, und die andere stumpf ist, XII, 86. Es lassen sich aber doch vermittelst dieser Regeln die Arten der gefundenen Seiten oder Winkel, ob sie nemlich spitzig oder stumpf seyen, nicht allezeit bestimmen, und dieses deswegen, weil aus einerley gegebenen Stücken sich in gewissen Fällen, die wir XIII, gewiesen, zweyerley dreyseitige Ecken zusammen setzen lassen.

Regeln zur Berechnung der dreyseitigen Ecken, deren Winkel schief sind.

§. 125. Was nun die dreyseitigen Ecken anlangt, deren Winkel alle schief sind, so kan man dieselbe gröstentheils nicht anders berechnen, als wenn man sie aus zwey geradewinklichten Ecken zusammen setzet; oder heraus bringet, indem man eine dreyseitige Ecke die einen geraden Winkel hat, von einer andern dergleichen Ecke wegnimt. Wir haben bereits XII, 91. gewiesen, wie dieses zu thun sey. Es sey NC, Mmn eine dreyseitige Ecke, deren Winkel bey M und m von einerley Art sind, entweder beyde spitzig, oder beyde stumpf: so kan man durch NC eine Seite NRC auf MCm perpendicular legen, welche die Seite MCm in die zwey Theile MCR, RCm, und das schiefwinklichte Dreyeck in die zwey rechtwinklichte Dreyecke NCMR, und nCmR theilen wird. Der Winkel des schiefwinklichten Dreyecks, welcher der getheilten Seite MCm entgegen stehet, ist in diesem Fall aus den zwey Winkeln der geradewinklichten Dreyecke N und n zusammen gesetzet, und da wir diesen Winkel allezeit Nn nennen wollen, so ist in dem gegenwärtigen Falle, $Nn = N + n$. Uebrigens ist die Perpendicularseite $NCR = P$, den beyden geradewinklichten Dreyecken gemeinschaftlich, NCM ist die Hypotenuse des einen, die wir H nennen, und nCm die Hypotenuse des andern, die wir mit h bezeichnen wollen, MCR ist die Grundseite des einen B, und RCm die Grundseite des andern, die wir uns unter b vorstellen, MCm aber, die wir der Kürze halber Bb nennen, ist hier $= B + b$.

F. 404.

§. 126. Sind

F. 405.

§. 126. Sind aber die Winkel M und m verschiedener Art, dergleichen die 405 Figur vorstellet, da die schiefwinklichte dreyseitige Ecke wieder mit NCMmn bezeichnet worden; so fällt die Fläche, welche durch NC, gehet, und auf die Fläche, in welcher MCm lieget, perpendicular ist, ausser der Seite MCm, und man bekommet, wenn man sich diese Fläche NCR vorstellet, zwar wieder zwey rechtwinklichte Ecken, nemlich NCMR und nCmR. Allein die schiefwinklichte Ecke NCMmn wird nicht durch die Zusammensetzung derselben herausgebracht, sondern sie bleibt übrig, wenn man die nCmR von der NCMR wegnimt. Indessen ist die Perpendicularseite NCR = P wieder diesen beyden rechtwinklichten Ecken gemeinschaftlich, aber die Seite MCm, welche wir, wie vorhero Bb nennen, ist nunmehro der Unterschied der Grundseiten der geradewinklichten Ecken MCR — mCR. Nennen wir also MCR wieder B, und setzen mCR = b, so ist hier Bb = B — b. Eben so ist es mit dem Winkel, welcher der Seite MCm entgegen stehet, an dessen Spitze wir Nn gesetzet, so diesen Winkel bezeichnen sol. Wenn wir allezeit den Winkel MNR nennen N, und bezeichnen den Winkel mnR mit n, so ist Nn = N — n. Indessen wird in beyden Fällen aus dem Bb = B + b oder B — b und aus dem B, die andere Grundseite b gar leicht gefunden, und eben so giebt sich aus Nn = N + n oder N — n und dem Winkel N, der Winkel n. Sonst nennen wir auch hier NCM, H und nCm bezeichnen wir mit h, weil dieses die Hypotenusen der geradewinklichten Ecken sind.

§. 127. Um aber die Regeln heraus zu bringen, nach welchen dergleichen Ecken zu berechnen sind; darf man nur diejenigen, so für die rechtwinklichten Ecken gefunden worden, XIV. 120. auf die beyden geradewinklichten Ecken anwenden, welche wir uns in der schiefwinklichten vorstellen. Dadurch geben sich die Regeln für die schiefwinklichten Ecken, wenn man nemlich die Regeln dergestalt zusammen nimmet, daß die Theile der geradewinklichten Ecken, welche in der schiefwinklichten nicht enthalten sind, ausfallen. Die Art zu schliessen selbst wird dieses am deutlichsten weisen. Zum Ueberfluß können wir noch anmerken, daß man in allen diesen Regeln anstatt H auch h setzen könne, wenn man zugleich vor M, m vor N, n, und vor B, b, schreibet. Denn man thut dadurch in der That nichts anders, als daß man die allgemeine Regeln durch diejenige Benen-

nungen

XIV. Abschnitt. nungen ausdrucket, welche wir den Theilen der dreyseitigen Ecke nCmR gegeben. Die Benennung P aber darf nicht geändert werden, weil P den beyden geradewinklichten Ecken NCMR und nCmR gemeinschaftlich ist.

§. 128. Nun ist:

Reg. II. $r : \int H = \int M : \int P$, und folgends auch
$r : \int h = \int m : \int P$, und also VIII, 32.
$\int H : \int h = \int m : \int M$.

Dieses ist gleich die erste Regel vor die schiefwinklichte Dreyecke. Stehet man bey dieser Regel etwas stille, so findet man, daß sie eine grosse Gemeinschaft mit der Regel XIV, 83. habe, vermittelst welcher wir die meisten Auflösungen der ebenen Dreyecke verrichten können. In diesen Dreyecken verhalten sich jede zwo Seiten, wie die Sinus der Winkel, welche ihnen entgegen liegen, und hier verhalten sich die Sinus zwoer Seiten, wie die Sinus der Winkel, welche ihnen entgegen liegen. Denn m stehet der Seite H entgegen, und M ist der Seite h entgegen gesetzet. Eben dieses trift auch bey den Regeln, für die gerадewinklichte Dreyecke ein, aus welchen die gegenwärtige geschlossen worden ist, weil H dem geraden Winkel entgegen stehet, dessen Sinus r ist, und P dem Winkel M. Man kan also diese Regel leicht im Gedächtniß behalten, welches bey den übrigen allen nicht möglich seyn durfte, und auch eben nicht nothwendig ist, weil man bey dem Gebrauch derselben leicht eine Tafel nachschlagen kan, dergleichen diejenige ist, die wir geben werden.

§. 129. Die zweyte Regel berechnen wir folgendergestalt. Es ist die dritte der Regel für die gerадewinklichte Ecken:

$r : \int B = t M : t P$, und folgends
$r : \int b = t m : t P$, demnach VIII, 32.
$\int B : \int b = t m : t M$, welches die Regel ist, die wir suchten.

§. 130. Die dritte Regel folget aus der vierten für die gerадewinklichte Ecken. Diese war:

$r : \int c P = \int N : \int c M$, folgends ist auch
$r : \int c P = \int n : \int c m$, und also
$\int N : \int c M = \int n : \int c m$, oder
$\int N : \int n = \int c M : \int c m$. Dieses ist unsere dritte Regel.

§. 131. Aus

Anwendung dieser Regeln.

Zur bequemen Anwendung dieser Regeln, dienet nachstehende Tafel:

kannt	Q	Erste Regel	Zweyte Regel	Beweis
Es wird eine Seite gesuchet.				
H, M,	h	ſm : ſM = ſH : ſh		§. 128.
Bb, M,	h	r : ſcM = tH : tB	ſcB : ſcb = ſcH : ſch	§. 120, I. §. 132.
n, H, M,	h	r : tM = ſcH : tcN	ſcn : ſcN = tH : th	§. 120, VI. §. 134.
m, H,	Bb	r : ſcM = tH : tB	tm : tM = ſB : ſb	§. 120, I. §. 129
H, h,	Bb	r : ſcM = tH : tB	ſcH : ſch = ſcB : ſcb	§. 120, I. §. 132
n, m,	H	$t.\frac{cM+cm}{2} : t.\frac{cM-cm}{2} = t.\frac{N+n}{2} : t.\frac{N-n}{2}$	tM : r = tcN : ſcH	§. 131 §. 120, VI.
Es wird ein Winkel gesuchet.				
h, H,	m	ſh : ſH = ſM : ſm		§. 128
N, H,	m	r : tM = ſcH : tcN	ſN : ſn = ſcM : ſcm	§. 120, VI. §. 130
Bb, H,	m	r : ſcM = tH : tB	ſb : ſB = tM : tm	§. 120, I §. 129
H, M,	Nn	r : tM = ſcH : tcN	th : tH = ſcN : ſcn	§. 120, VI. §. 134
H, m,	Nn	r : tM = ſcH : tcN	ſcM : ſcm = ſN : ſn	§. 120, VI. §. 130
Bb, h	M	$t.\frac{cH+ch}{2} : t.\frac{cH-ch}{2} = t.\frac{cB+cb}{2} : t.\frac{cB-cb}{2}$	tH : tB = r : ſcM	§. 133 §. 120, I

XIV. Abschnitt.

nungen ausdrucket, welche wir den Theilen der dreyseitigen Ecke nCmR gegeben. Die Benennung P aber darf nicht geändert werden, weil P den beyden geradewinklichten Ecken NCMR und nCmR gemeinschaftlich ist.

§. 128. Nun ist:

Reg. II. $r : \int H = \int M : \int P$, und folgends auch
$r : \int h = \int m : \int P$, und also VIII, 32.
$\int H : \int h = \int m : \int M$.

Dieses ist gleich die erste Regel vor die schiefwinklichte Dreyecke. Stehet man bey dieser Regel etwas stille, so findet man, daß sie eine grosse Gemeinschaft mit der Regel XIV, 83. habe, vermittelst welcher wir die meisten Auflösungen der ebenen Dreyecke verrichten können. In diesen Dreyecken verhalten sich jede zwo Seiten, wie die Sinus der Winkel, welche ihnen entgegen liegen, und hier verhalten sich die Sinus zwoer Seiten, wie die Sinus der Winkel, welche ihnen entgegen liegen. Denn m stehet der Seite H entgegen, und M ist der Seite h entgegen gesetzet. Eben dieses trift auch bey den Regeln, für die geradewinklichte Dreyecke ein, aus welchen die gegenwärtige geschlossen worden ist, weil H dem geraden Winkel entgegen stehet, dessen Sinus r ist, und P dem Winkel M. Man kan also diese Regel leicht im Gedächtniß behalten, welches bey den übrigen allen nicht möglich seyn durfte, und auch eben nicht nothwendig ist, weil man bey dem Gebrauch derselben leicht eine Tafel nachschlagen kan, dergleichen diejenige ist, die wir geben werden.

§. 129. Die zweyte Regel berechnen wir folgendergestalt. Es ist die dritte der Regel für die geradewinklichte Ecken:

$r : \int B = tM : tP$, und folgends
$r : \int b = tm : tP$, demnach VIII, 32.
$\int B : \int b = tm : tM$, welches die Regel ist, die wir suchten.

§. 130. Die dritte Regel folget aus der vierten für die geradewinklichte Ecken. Diese war:

$r : \int cP = \int N : \int cM$, folgends ist auch
$r : \int cP = \int n : \int cm$, und also
$\int N : \int cM = \int n : \int cm$, oder
$\int N : \int n = \int cM : \int cm$. Dieses ist unsere dritte Regel.

§. 131. Aus

Anwendung dieser Regeln.

Zur bequemen Anwendung dieser Regeln, dienet nachstehende Tafel:

Bekannt	Q†	Erste Regel	Zweyte Regel	Beweis
Es wird eine Seite gesuchet.				
H, M,	h	$sm : sM = sH : sh$		§. 128.
Bb, M,	h	$r : scM = tH : tB$	$scB : scb = scH : sch$	§. 120, I. §. 132.
n, H, M,	h	$r : tM = scH : tcN$	$scn : scN = tH : th$	§. 120, VI. §. 134.
m, H,	Bb	$r : scM = tH : tB$	$tm : tM = sB : sb$	§. 120, I. §. 129
H, h,	Bb	$r : scM = tH : tB$	$scH : sch = scB : scb$	§. 120, I. §. 132
n, m,	H	$t.\frac{cM+cm}{2} : t.\frac{cM-cm}{2} = t.\frac{N+n}{2} : t.\frac{N-n}{2}$	$tM : r = tcN : scH$	§. 131 §. 120, VI.
Es wird ein Winkel gesuchet.				
h, H,	m	$sh : sH = sM : sm$		§. 128
Nn, H,	m	$r : tM = scH : tcN$	$sN : sn = scM : scm$	§. 120, VI. §. 130
Bb, H,	m	$r : scM = tH : tB$	$sb : sB = tM : tm$	§. 120, I §. 129
H, M,	Nn	$r : tM = scH : tcN$	$th : tH = scN : scn$	§. 120, VI. §. 134
H, m,	Nn	$r : tM = scH : tcN$	$scM : scm = sN : sn$	§. 120, VI. §. 130
Bb, h	M	$t.\frac{cH+ch}{2} : t.\frac{cH-ch}{2} = t.\frac{cB+cb}{2} : t.\frac{cB-cb}{2}$	$tH : tB = r : scM$	§. 133 §. 120, I

XIV. Abschnitt.

§. 136. Diese Tafel wird also gebraucht. Wenn ein Dreyeck aufzulösen, so zeichne man dasselbe nur schlecht weg, und nenne denjenigen Theil desselben, welchen man suchet Q, es mag nun dieser Theil eine Seite oder ein Winkel seyn. Den Theil aber, welcher dem gesuchten entgegen stehet, nenne man O. Es wird also, O ein Winkel, wenn Q eine Seite ist, und eine Seite, wenn Q ein Winkel ist. Ferner schreibe man an Q zu beyden Seiten A und a, welche Buchstaben demnach allezeit diejenigen Theile bedeuten werden, die unmittelbar an den gesuchten zu beyden Seiten liegen. Endlich schreibe man an O zu beyden Seiten B und *b*. Das erste B neben dem A, und das zweyte b neben dem a. Es werden dadurch die Buchstaben in folgender Ordnung stehen:

1 Figur	2 Figur
Wenn eine Seite gesucht wird.	Wenn ein Winkel gesucht wird.
O	B
B *b*	A O
A Q *a*	Q *a* *b*

§. 137. Nunmehro siehet man aus der vorgelegten Aufgabe leicht, was für Theile des Dreyecks gegeben sind, welches man berechnen sol. Diese Theile bemerke man. Ist zum Exempel eine Seite aus den drey Winkeln der dreyseitigen Ecke zu finden; so sind in der ersten Figur die gegebenen Theile O, A, a. Ist aber ein Winkel aus den drey Seiten zu finden, so sind in der zweyten Figur die gegebenen Theile O A a und dasjenige, so man suchet, ist allezeit Q. Diese Buchstaben O, A, a müste man also bey Auflösung dieser Aufgabe bemerken, und eben so verfähret man allezeit. Ist eine Seite aus dem Winkel zu finden, welcher ihr entgegen stehet, und aus den zwey übrigen Seiten, so sind die gegebenen Theile in der ersten Figur O, B, b; und ist ein Winkel aus den zwo Seiten zu finden, zwischen welchen er lieget, und aus einem von den übrigen Winkeln, so sind die bekannten Dinge A, a, B, oder A, a, b. Denn dieses letztere kan nichts anders bedeuten als das erstere, wie man aus der Figur siehet. Hat man nun die Theile des Dreyecks auf die Art bezeichnet, so suche man diese Buchstaben in der ersten Abtheilung der Tafel, unter der Benennung, Fälle, so hat man so gleich in eben der Zeile die Regeln, nach welchen das Dreyeck aufzulösen ist.

§. 138. Doch ehe man dieselbe anwendet, so sind die gegebenen Seiten und Winkel, wie auch dasjenige, so gesucht wird, noch mit den Benennungen auszudrücken, deren wir uns in der 404 und 405 Zeichnung bedienet haben. Wie dieses zu verrichten sey, weiset die zweyte Abtheilung der Tafel, über welcher das Wort, bekannt, stehet: und zwar dergestalt. Es stehen in derselben drey Buchstaben, welche den drey Buchstaben der ersten Abtheilung entgegen gesetzet sind, und welche die Theile der Ecken in der 304 und 305 Zeichnung, wie wir sie oben XIV, 125. 126. benennet haben, bedeuten. Man setze, daß der erste Buchstaben dieser zweyten Abtheilung so viel bedeute, als der erste Buchstabe der ersten Abtheilung, und eben dieses nehme man von dem zweyten und von dem dritten an, so siehet man, was in den sphärischen Dreyecken, die die eben erwehnten Zeichnungen vorstellen, vor Theile gegeben sind. Und vor den gesuchten Theil Q nehme man diejenige Seite oder den Winkel, welcher in der dritten Abtheilung der Tafel unter der Aufschrift Q angezeiget wird. Nur muß man nicht aus der Acht lassen, daß die Tafel zwey Theile hat, deren erstern man gebrauchen muß, wenn man eine Seite suchet, und den zweyten, wenn man einen Winkel haben wil, und es sind diese Dinge keinesweges zu verwechseln.

XIV. Abschnitt. F. 404. 405.

§. 139. Zum Exempel: Es ist aus einer Seite eines schiefwinklichten Dreyecks, und den zwey Winkeln, die an derselben liegen, eine Seite zu finden, die einem von den gegebenen Winkeln entgegen stehet: so sind die bekanten Theile ABO oder abO. Diese Buchstaben nun stehen in der dritten Reihe, und in der nächsten Abtheilung neben ihnen stehen Nn, H, M. Es ist demnach A = Nn, B = H, und M = O, Q aber ist h. Und man hat in einer dreyseitigen Ecke, oder sphärischen Dreyecke aus dem bekanten Winkel Nn, aus der Seite H und dem Winkel M, die Seite h zu finden.

§. 140. Wie nun aber dieses zu verrichten sey, weisen die zwo Regeln die nun in eben der Reihe weiter folgen. Wir wollen in unserm Exempel bleiben, da aus Nn, H und M die h zu finden ist. Die erste Regel welche dazu dienet, ist $r : t M = sc H : tc N$. Vermittelst derselben findet man also N, weil M und H bekant sind. Nun hatte man auch Nn = N + n oder N − n. Man kan also auch n finden, und nachdem dieses geschehen, so sind in der Regel, welche auf die vorige in eben der Reihe folget, $sc\, n : sc\, N = t H : t h$, die drey erstern Glieder bekant, und es kan also das vierte Glied gefunden werden, welches man suchte.

 §. 141.

XIV. Abschnitt.

§. 141. Auf eben die Art verfähret man bey allen Regeln, und wir sehen nichts, was einen Leser, welcher die Geduld gehabt, uns bisher zu folgen, aufhalten könne. Dasjenige so wir bey den rechtwinklichten Ecken XIV, 124. bemerket haben, daß zuweilen einige Zweydeutigkeit daraus entspringe, daß ein jeder Sinus oder eine Tangente, zweyen Winkeln zukommet, hat auch hier statt, und wird so oft es möglich ist, durch die eben daselbst gegebenen Regeln gehoben, und durch diejenige, welche die Lage der Perpendicularfläche aus der Art der Winkel M und m bestimmet.

§. 142. Daß aber die Regeln, deren Gebrauch wir dergestalt gewiesen haben, hinlänglich sind, alle schiefwinklichte dreyseitige Ecken zu berechnen, kan folgender gestalt erhellen. Da wir den gesuchten Theil immer Q, und die übrigen Theile A, a, B, b, O genennet haben, so müssen die Regeln, wenn sie vollständig seyn sollen, zeigen, wie aus jeden dreyen der letztern Theile Q zu finden sey. Setzet man nun jede drey der letztern fünf Buchstaben A, *a*, B, *b*, O wie man nur kan, zusammen, so kommen dadurch nachfolgende Verknüpfungen heraus

A *a* B	A B *b*	A *b* O	*a* B *b*	*a* *b* O	B *b* O.
A *a* *b*	A B O		*a* B O		
A *a* O					

Es sind aber in diesen Verknüpfungen diejenigen, in welchen bloß die kleinen Buchstaben a, b mit den grössern A, B verwechselt sind, von denselben nicht verschieden, und bedeuten nichts anders als jene. Lässet man also diese als überflüssig weg, so bleiben bloß diese sechs Verknüpfungen der gegebenen Theile übrig, A *a* B, A *a* O, A B *b*, A B O, A *b* O, B *b* O. Und alle diese kommen in der Tafel XIV, 135. unter der Aufschrift der Fälle vor, so wohl wenn der gesuchte Theil eine Seite ist, als auch, wenn ein Winkel gesucht wird, wie man so gleich sehen wird, wenn man sich die Mühe geben will, diese sechs Verknüpfungen in der Tafel aufzusuchen. Ja wir haben auch die übrigen, die von den gegenwärtigen nur in der Benennung unterschieden sind, in die Tafel gebracht, damit dieselbe desto bequemer werde, indem sie zu beyderley Benennung eingerichtet ist.

ENDE.

Drukfehler.

Pag.
6 lin. 26. lies andern, für andere.
10 - 7 - als 530000000.
13 - 18 - Einheiten für Eintheile.
22 - 30 - 9 für 19.
25 - 28 - vermindern für verminderе.
50 - 36 - Ordnungen.
125 - 35 - auch für auf.
133 - 29 - andere Zahl.
149 - 7 - worzu wir ebenfalls.
200 - 26 - mag wol.
228 - 18 BF für BF =
230 - 33 - und da der
237 - 27 - aus derselben f. aus denselben
263 - 22 ACB für ABC
275 - 36 A für C
282 - 24 CF für DF
ead. - 26 - der Linie für die Linie
303 - 19. - AD für AB
305 - 25 - wodurch, wie wir
315 - 24 - B für D
333 - 3 - der gleichen für dergleichen.
348 - 18 - $2 \times 5, 2 \times 3$ für $2 + 5, 2 + 3$
355 - 8 - abstehen für ab stehen
358 - 6 - oder so viele
367 - 36 - einerley, wie auch die vierten; die ersten und dritten aber sind verschieden.
390 - vlt. - Ab für AB
425 - vlt. - A:E für A:D.
445 - 20 *del.* und allgemein ist.
454 - 9 lies der für des
464 - 8 - vielek für viereк.
470 - 25 - EF für DEF
476 - 23 - Verhältnisse.
480 - 28 - eine für einer

Pag.
481 lin. 14 - grösseren für Grössen der
481 - 15 - setze ein (.) nach kleineren.
ead - 25 - lies Ja für In
494 - 34 - eines ED von dem andern CB
496 - 5 - BC^q für BD^q
499 - 10 — für =
521 - 21 - man mag für mag man
543 - 1 ac für ac
548 - 18 - BC für DC
ead. 20 - D:d für B:d
550 - 2 - geraden Linien DA
553 - 3 - AE für AB
554 - 25 - HL für HKL
ead. - 30 - des für das
557 - vlt. setze ein (;) nach D
558 - 1 lies E, G für EF
562 - 31 Radius CN des, für Radius des
578 - 3 - F. 343. für F. 349
581 - 1 - KIEFGK für HIEFGK
598 - 8 - ABHD für AB, HD
608 - 24 - BGDF für BG = DF
611 - 5 - ABCD für AD
615 - 9 - zwo für zwar.
616 - 20 - über für aber.
617 - 24 - dbc für abc
618 - 12 - ElFbGKBH
ead. - 36 - = 6R für + 6R
625 - 20 - geradewinklichten.
646 - 1 - $\frac{m}{a^t}$
ead. - 31, setze ein (;) nach $2a^n$
647 - 15 - lies $+ 3a$ für $\times 3a$
655 - 8 - $- 3a^2c$ für $- 3ac^2$
661 - 15 - als die Helfte der Zahl.

Pag. 665. lin. 2. lies beidemal $\frac{u-a}{b-a} \times a$ für $\frac{u-a}{b-a}+a$

ead. ... 13. ... $\frac{624}{4}$ für $\frac{24}{4}$

ead. ... 19 ... jenem für einem

ead. ... 24 ... lies ohne Absatz: das ist, $a-b : a = a-u : s-u$

ead. ... 26 ... $\frac{a-u}{a-b} \times a+u$ für $\frac{a-b}{a-b} \times a \times u$

666 ... 5 ... $\frac{a-u}{a-b} \times a$ für $\frac{a-u}{a-u} \times a$

ead. ... 19 ... $\frac{aa}{a-b}$.

ead. ... 26 ... $6\frac{1}{4\frac{1}{31}}$

667 ... 6 ... desjenigen für dasjenige.

ead. ... 11 ... $-au+au$

683 11 ... $\overline{a+b}^n$ für $\overline{a+b^n}$ Eben dieses und dergleichen versehen, kommen auch l. 32, und insonderheit p. 685. 686 öfters vor: zuweilen stehet auch blos $a+b^e$ vor $\overline{a+b}^e$

684 .. 8 ... $\overline{a+b}^n = \overline{10+1}^6$ für $\overline{a+b^n} = \overline{10+1^6}$

685 ... 6 ... Umstand, für Verstand

686 ... 25 ... $\overline{a+b}^{\frac{re}{e}}$.

Pag.

Pag. 687. lin. 1. lies: Man nehme $e = 1$, wie man der Bequemlichkeit halben gemeiniglich zu thun pfleget; so wird $\frac{re}{t} = \frac{r}{t}$. Setzet man nun diesen Bruch an die Stelle des n der Regel, und bezeichnet die Division, wie auch sonst VI, 42 zugeschehen pfleget, in den Exponenten der Dignitäten durch ein (:); so wird $a^n = a^{r:t}$

$$n \times a^{n-1}b = \frac{r}{t} \times a^{r:t-1}b = \frac{r}{t} \times \frac{a^{r:t}b}{a}$$

$$n.\frac{n-1}{2} \times a^{n-2}b^2 = \frac{r}{t}.\frac{r-t}{2t} \times a^{r:t-2}b^2 = \frac{r}{t}.\frac{r-t}{2t} \times \frac{a^{r:t}b^2}{a^2}$$

$$n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3} \times a^{n-3}b^3 = \frac{r}{t}.\frac{r-t}{2t}.\frac{r-2t}{3t} \times \frac{a^{r:t}b^3}{a^3}$$

und so fort, wie man leicht siehet. Demnach ist $\overline{a+b}^{r:t} =$

$$a^{r:t} + \frac{r}{t} \times \frac{a^{r:t}b}{a} + \frac{r}{t}.\frac{r-t}{2t} \times \frac{a^{r:t}b^2}{a^2} + \frac{t}{r}.\frac{r-t}{2t}.\frac{r-2t}{3t} \times \frac{a^{r:t}b^3}{a^3},$$

und sofort. Oder, wenn man den gemeinschaftlichen Factor $a^{r:t}$ von dem übrigen absondert, so wird

$$\overline{a+b}^{r:t} = a^{r:t} \times \left(1 + \frac{r}{t} \times \frac{b}{a} + \frac{r}{t}.\frac{r-t}{2t} \times \frac{b^2}{a^2} + \frac{r}{t}.\frac{r-t}{2t}.\frac{r-2t}{3t} \times \frac{b^3}{a^3} + \ldots\right)$$

Pag. 687. lin. 12, 16, 17. lies $+$ für $\times$
ead. 18. r für t

p. 688. lin. 1.) $\overline{a-b}^{r:t}$, für $\overline{a-b}^{\frac{r}{t}}$

pag. 688. l. 9.) lies $= a^{r:t} \times (1 - \frac{r}{t} \cdot \frac{b}{a} + \frac{r}{t} \cdot \frac{r-t}{2t} \times \frac{b^2}{a^2} -$

$\frac{r}{t} \cdot \frac{r-t}{2t} \cdot \frac{r-2t}{3t} \times \frac{b^3}{a^3} +$ &c.

pag. 689. l. 1) lies $\frac{r}{t} \cdot \frac{r-t}{2r} \cdot \frac{r-2t}{3r}$ wird $\frac{r}{t} \cdot \frac{-t}{2t} \cdot \frac{-2t}{3t}$

$= \frac{r}{3t}$. Das folgende Glied $\frac{r}{t} \cdot \frac{r-t}{2t} \cdot \frac{r-2t}{3t} \cdot \frac{r-3t}{4t}$ verwandelt sich in dieses $\frac{r}{t} \cdot \frac{-t}{2t} \cdot \frac{-2t}{3t} \cdot \frac{-3t}{4t} = \frac{-r}{4t}$

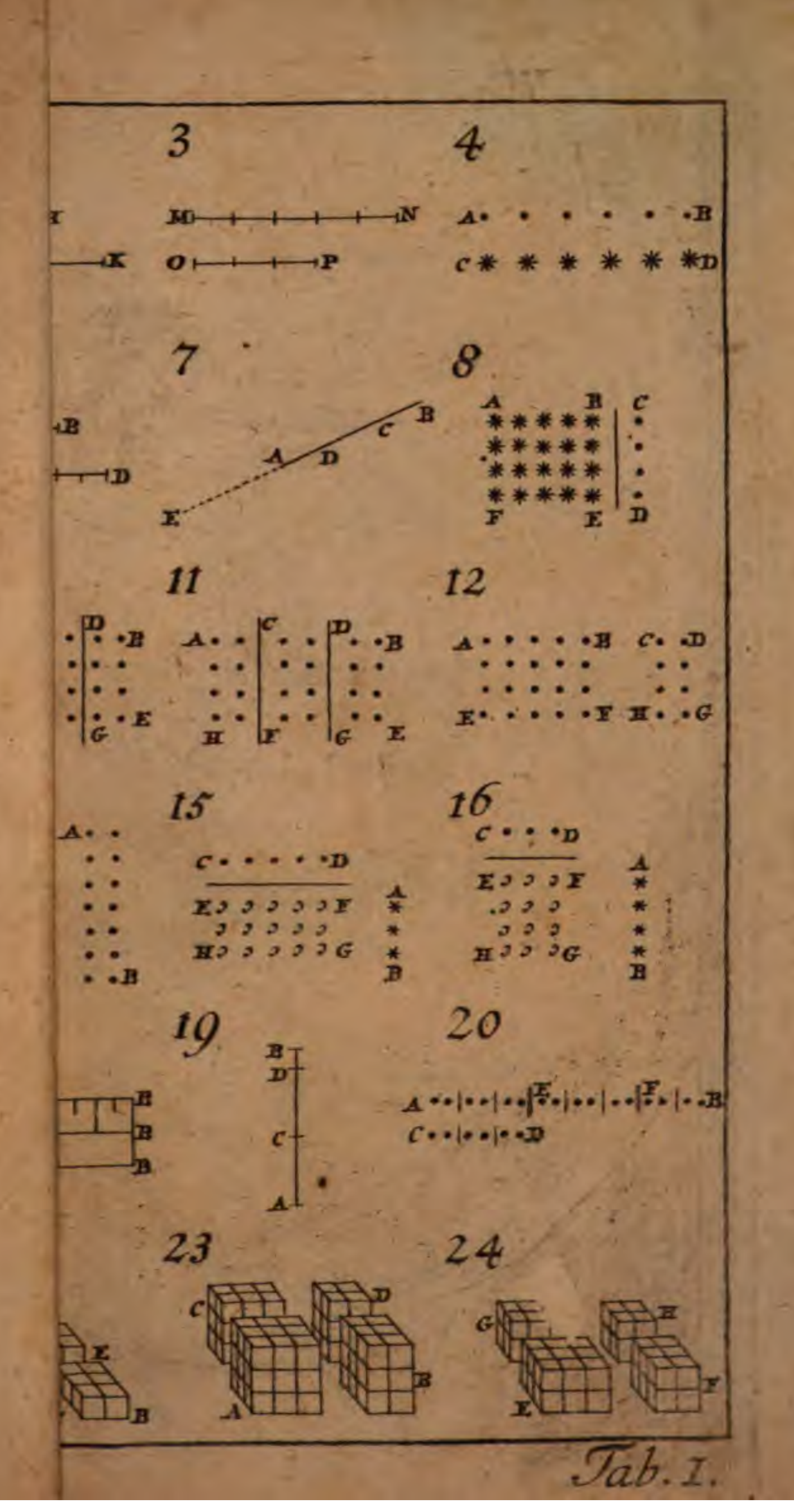
lin. 6.) $\overline{a+b}^{r:t} = a^{r:t} \times (1 + \frac{r}{t} \cdot \frac{b}{a} - \frac{r}{2t} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{r}{3t} \cdot$

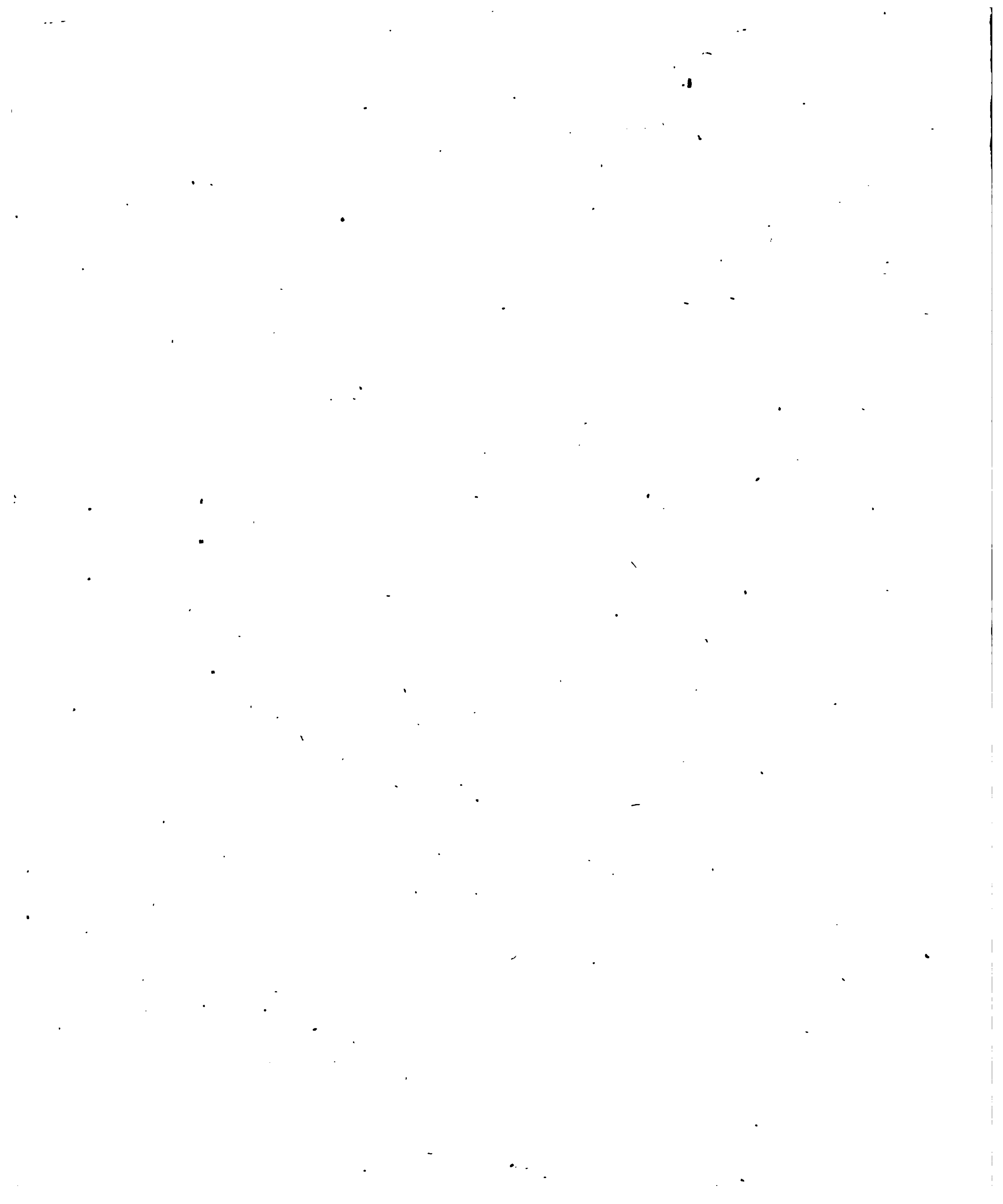
$\frac{b^3}{a^3} - \frac{r}{4t} \cdot \frac{b^4}{a^4} +$ &c.

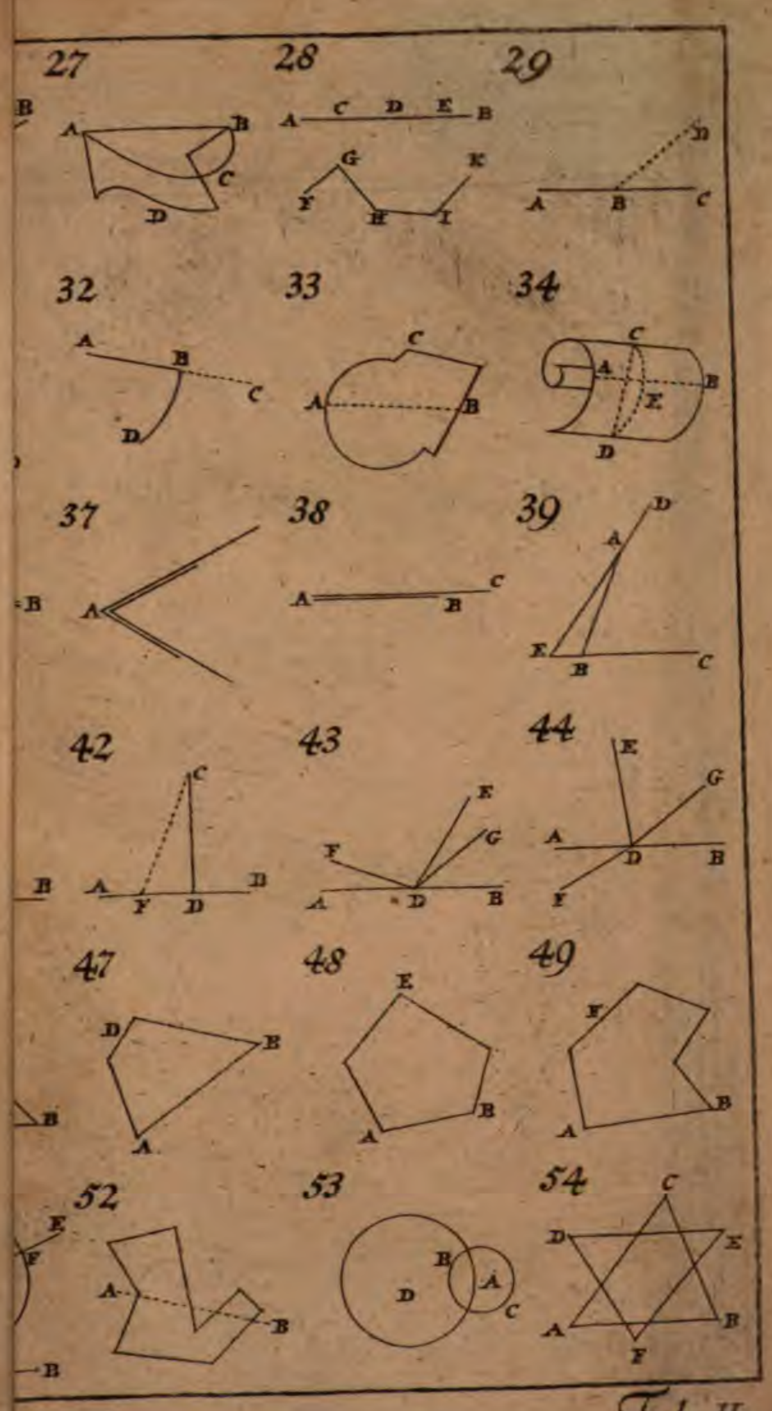
lin. 8.) $\overline{a-b}^{r:t} = a^{r:t} \times (1 - \frac{r}{t} \cdot \frac{b}{a} - \frac{r}{2t} \cdot \frac{b^2}{a^2}$

$- \frac{r}{3t} \cdot \frac{b^3}{a^3} - \frac{r}{4t} \cdot \frac{b^4}{a^4} -$ und so fort.

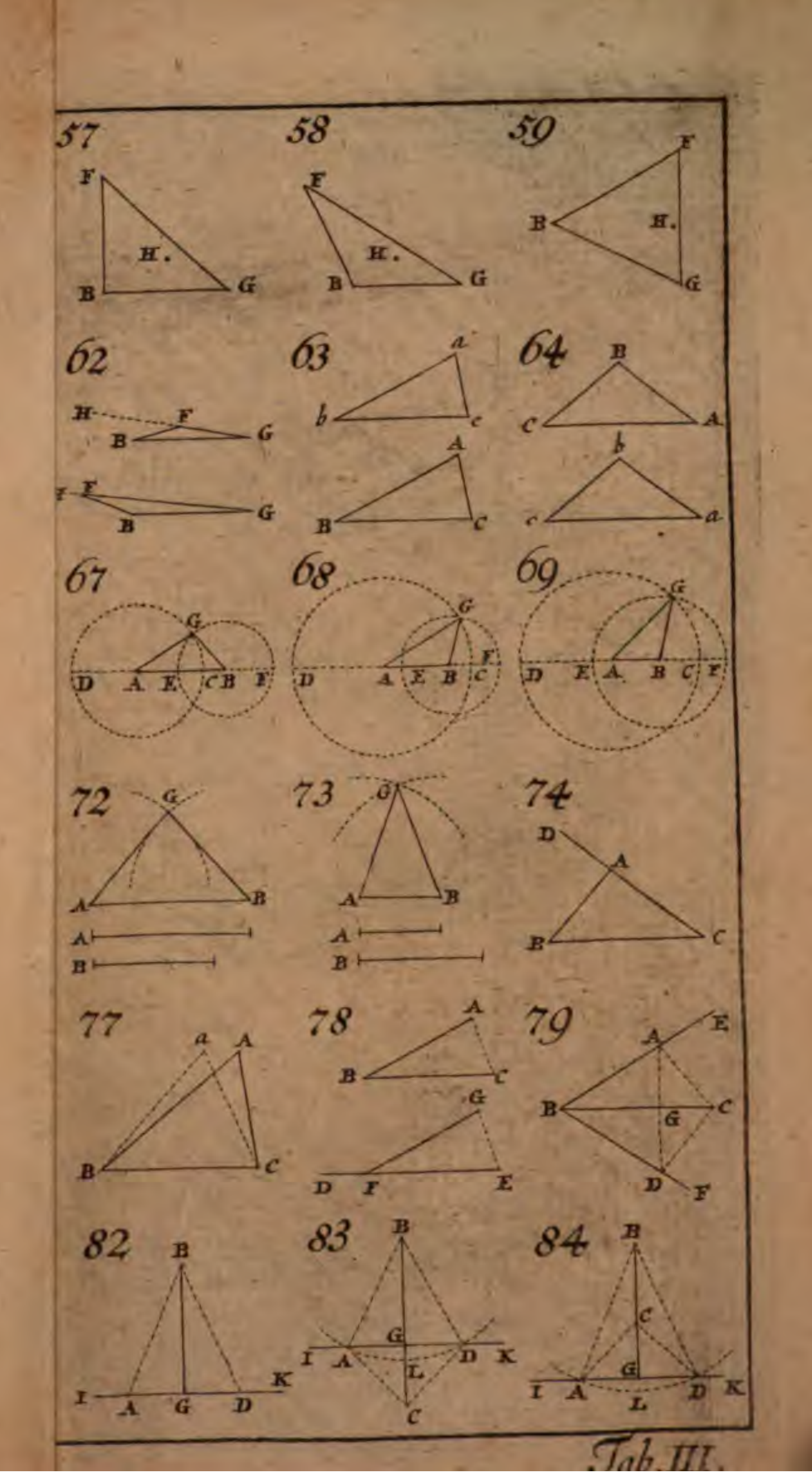
pag. 697 lin. 29 lies die, für der
707 . . . 4 . . . &c. für 2 l c
713 . . . 16 . . . $l. \overline{a-d:a} : l. a: \overline{a+d}$
714 . . . 7 . . . $\frac{d^2}{2}$ für $\frac{d}{2}$
716 . . . 7 *del.* vor
725 . . . 11 lies um für und
728 . . . 2 AD für ABD
ead. 20, 22, 31 S für *s*
756. . . 8. lies ADC für ABC
762 . . . 15 . . . BC = 62, 53.
763 . . . 9 . . . AD für CD
777 . . . 4 . . . . *fcM : fcm* für fcM fcM

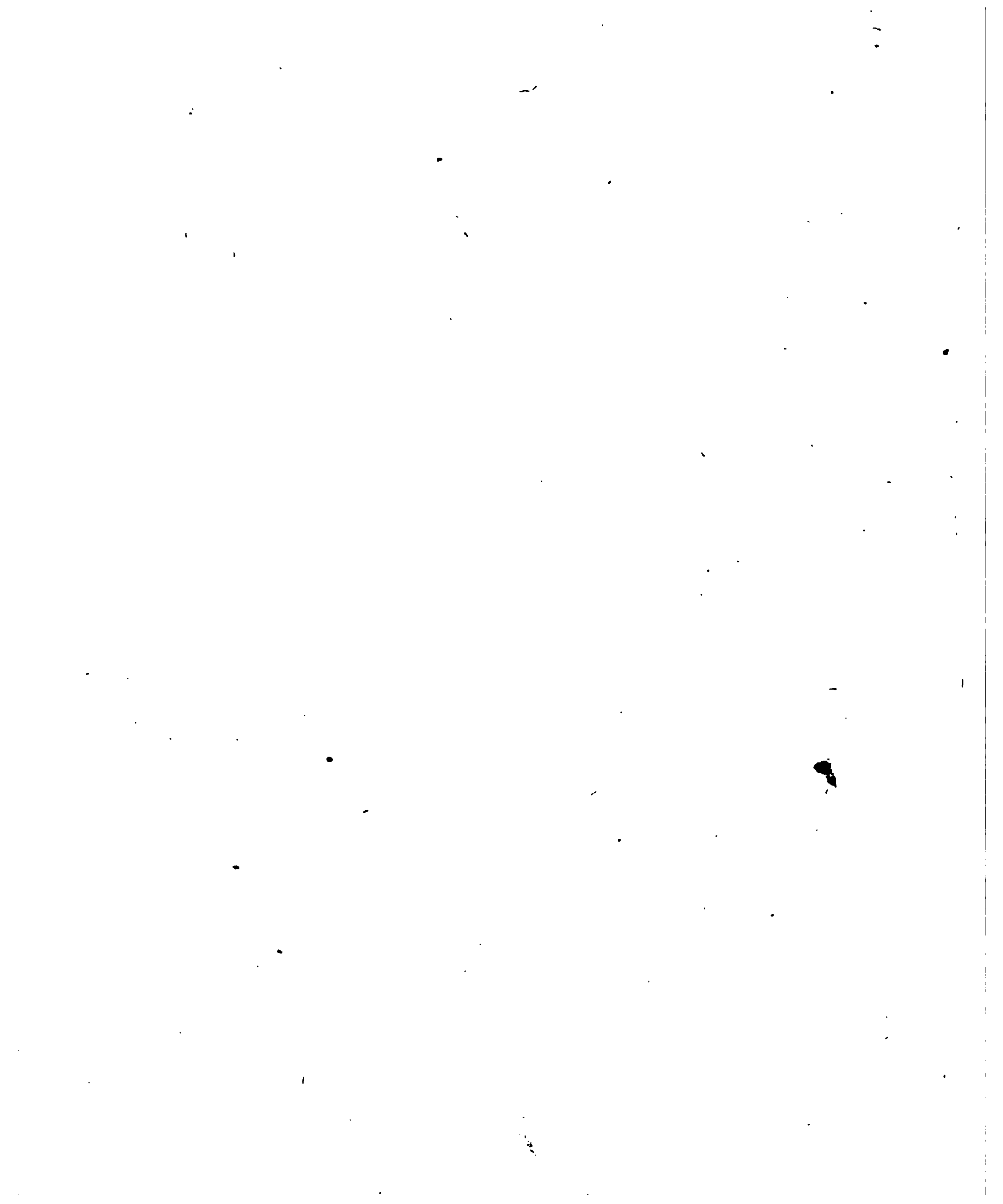

3
4
M
N
A
B
C
D
O
P
K
7
8
E
F
11
12
H
G
15
16
19
20
23
24
Tab. I.

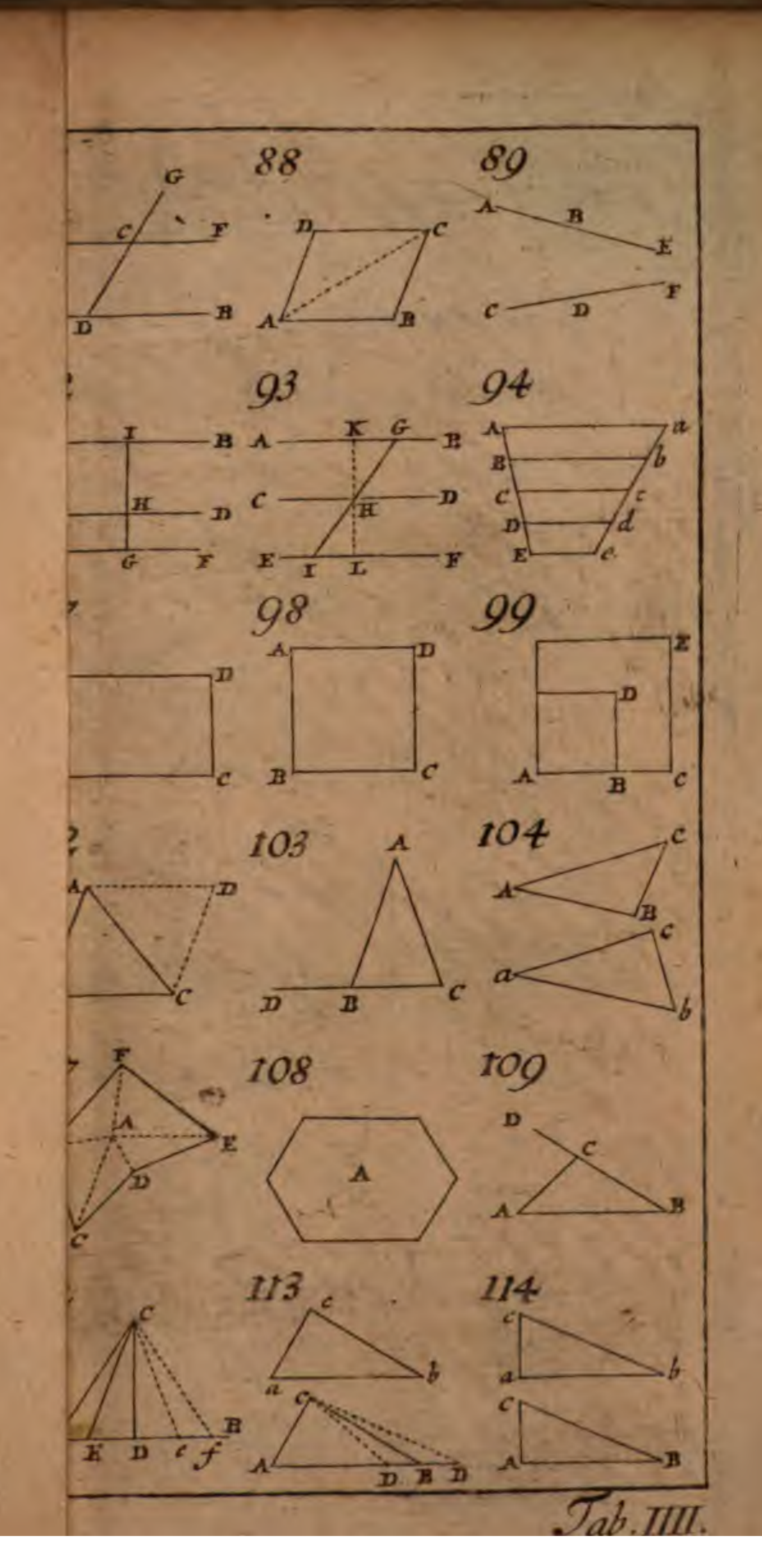


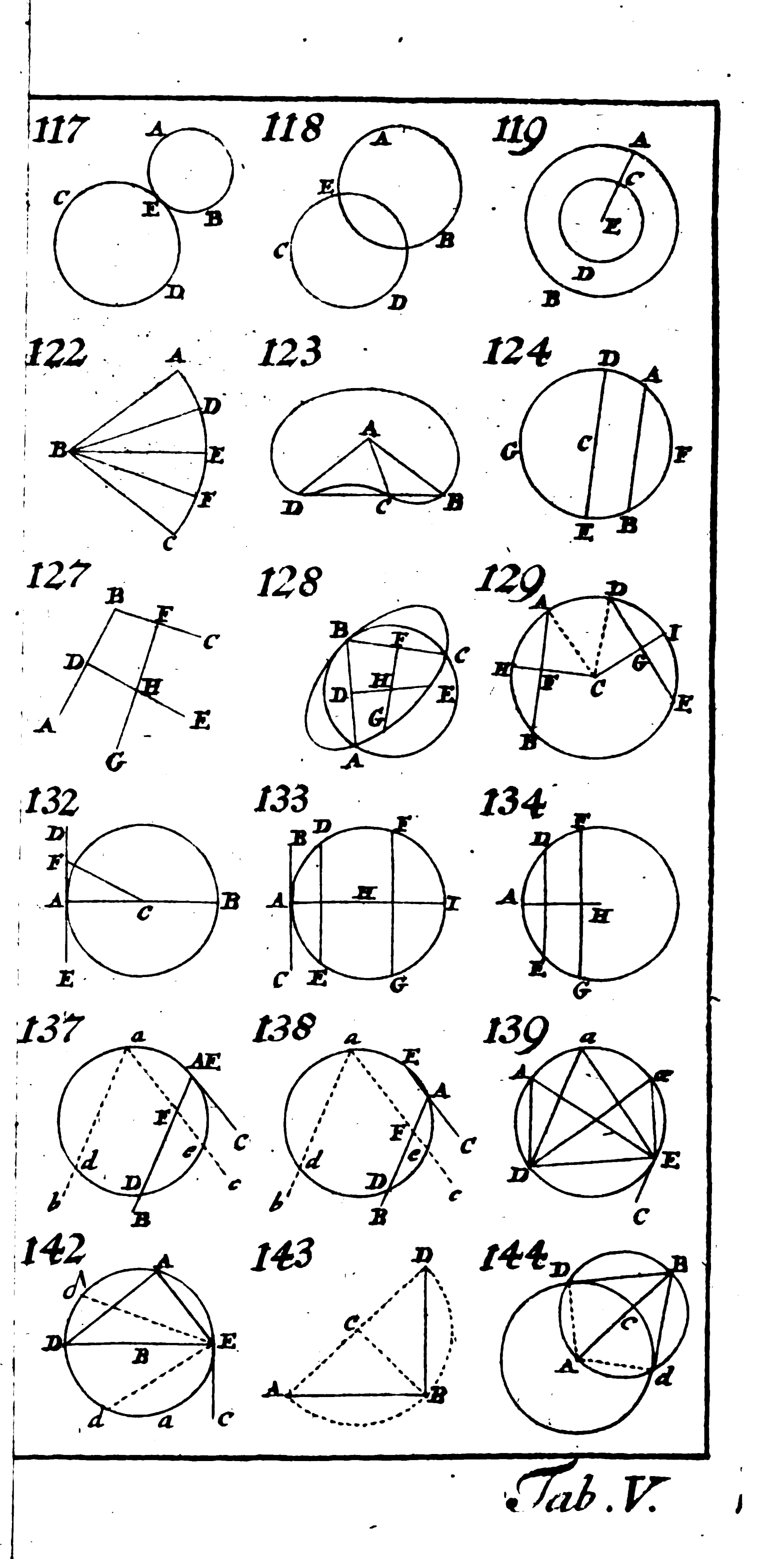


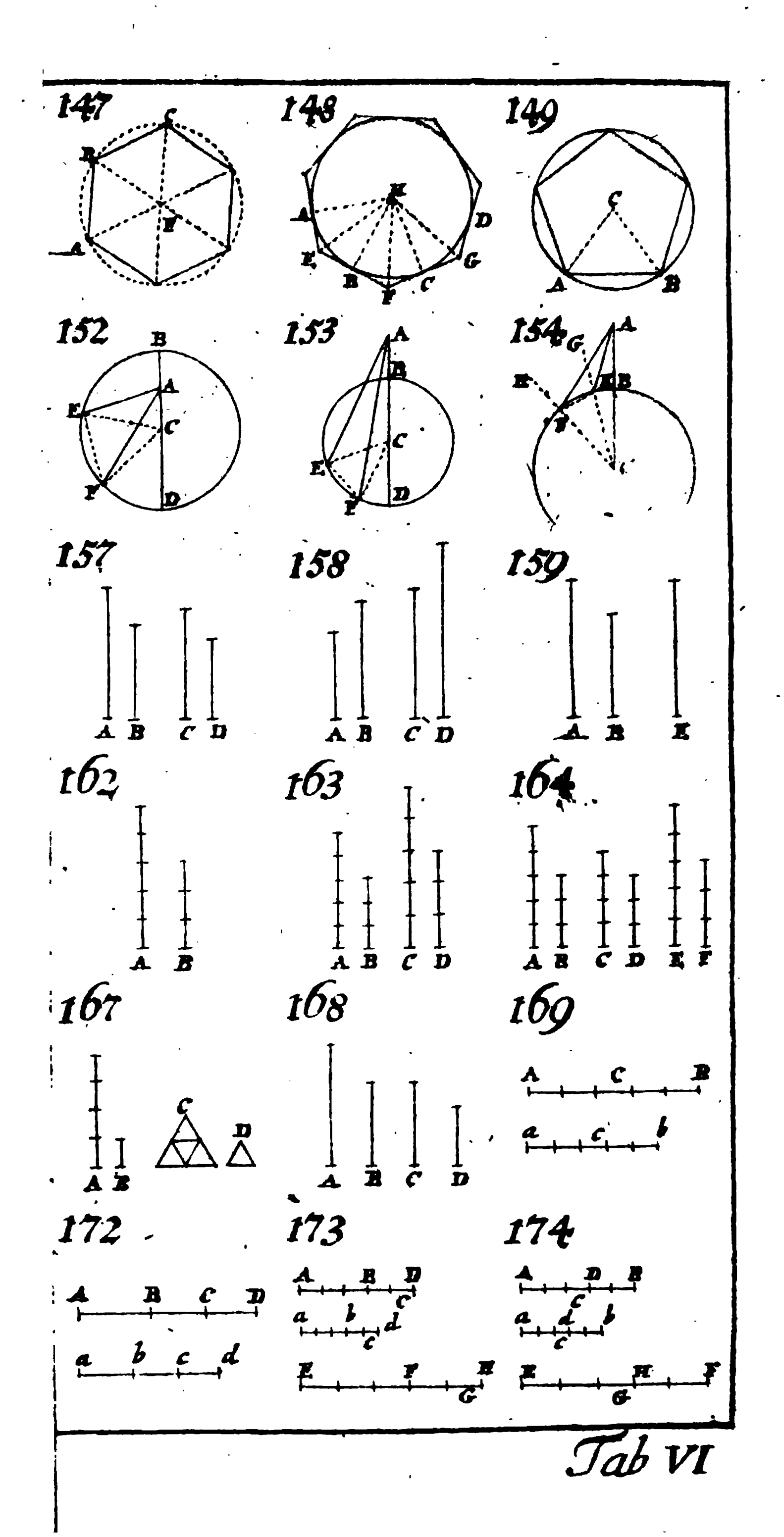
Tab. II.

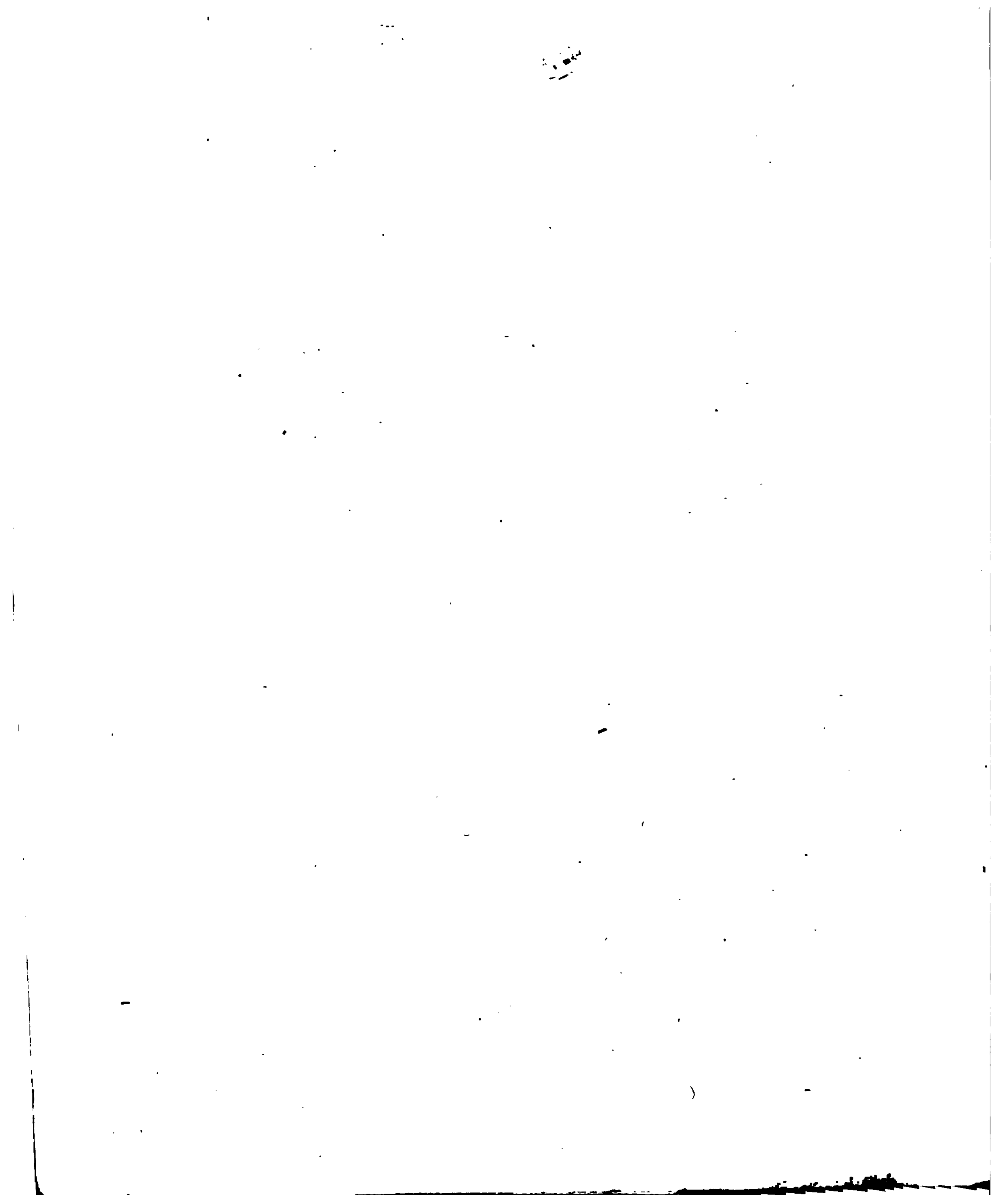

57
58
59
62
63
64
67
68
69
72
73
74
77
78
79
82
83
84
Tab. III.

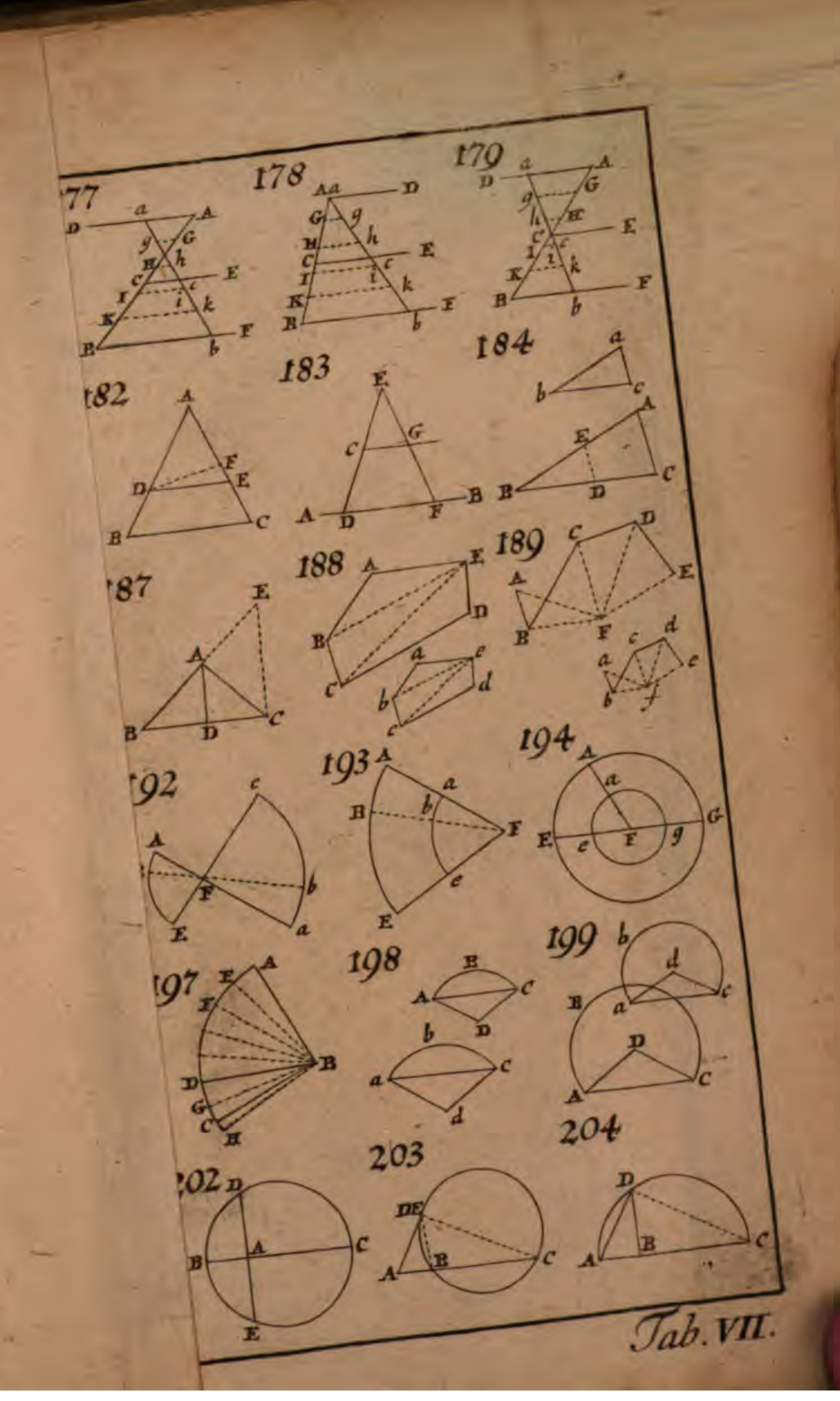


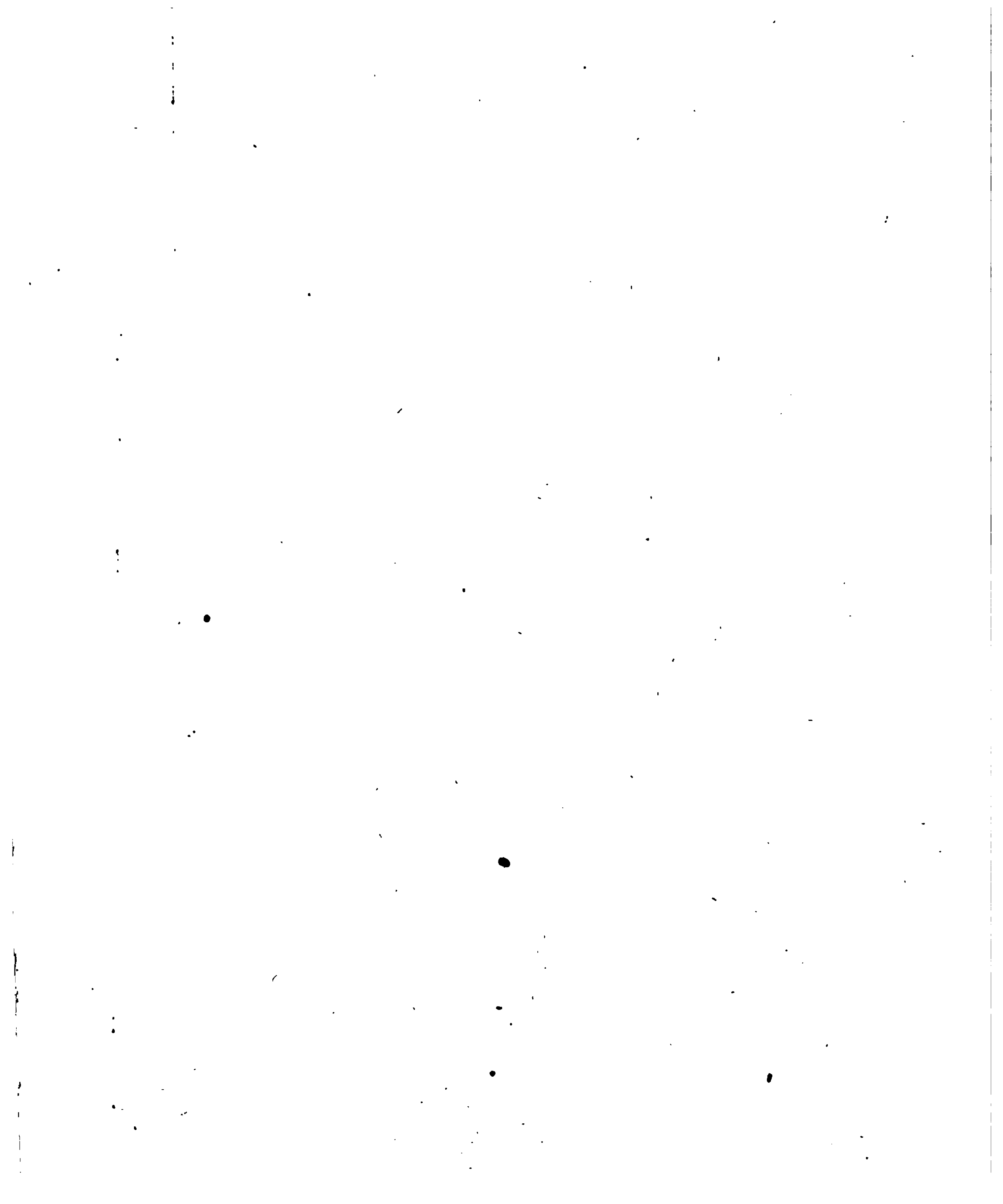

88
89
93
94
98
99
103
104
108
109
113
114
Tab. IIII.

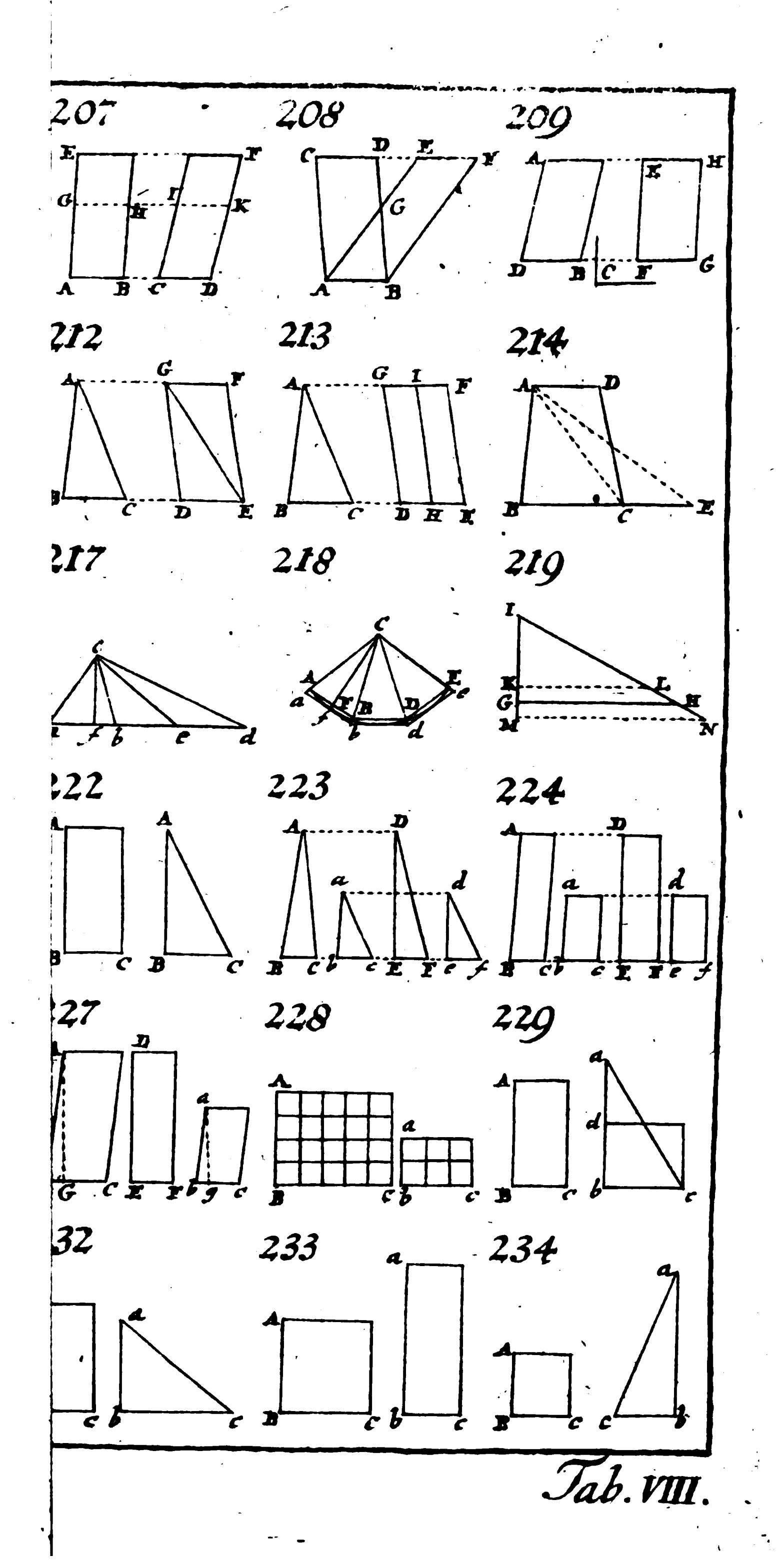

117
118
119
122
123
124
127
128
129
132
133
134
137
138
139
142
143
144
Tab. V.

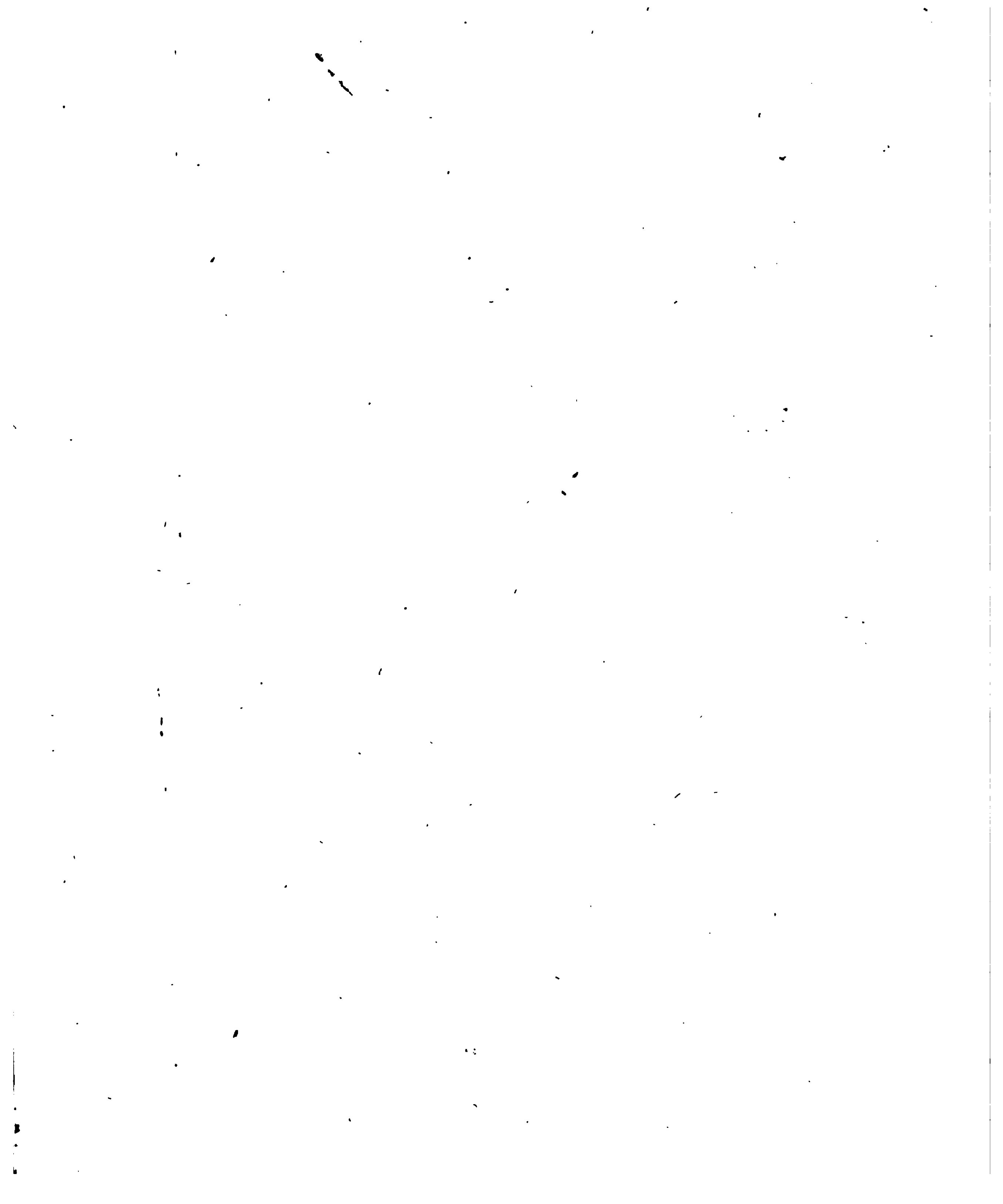

147
148
149
152
153
154
157
158
159
162
163
164
167
168
169
172
173
174
Tab VI

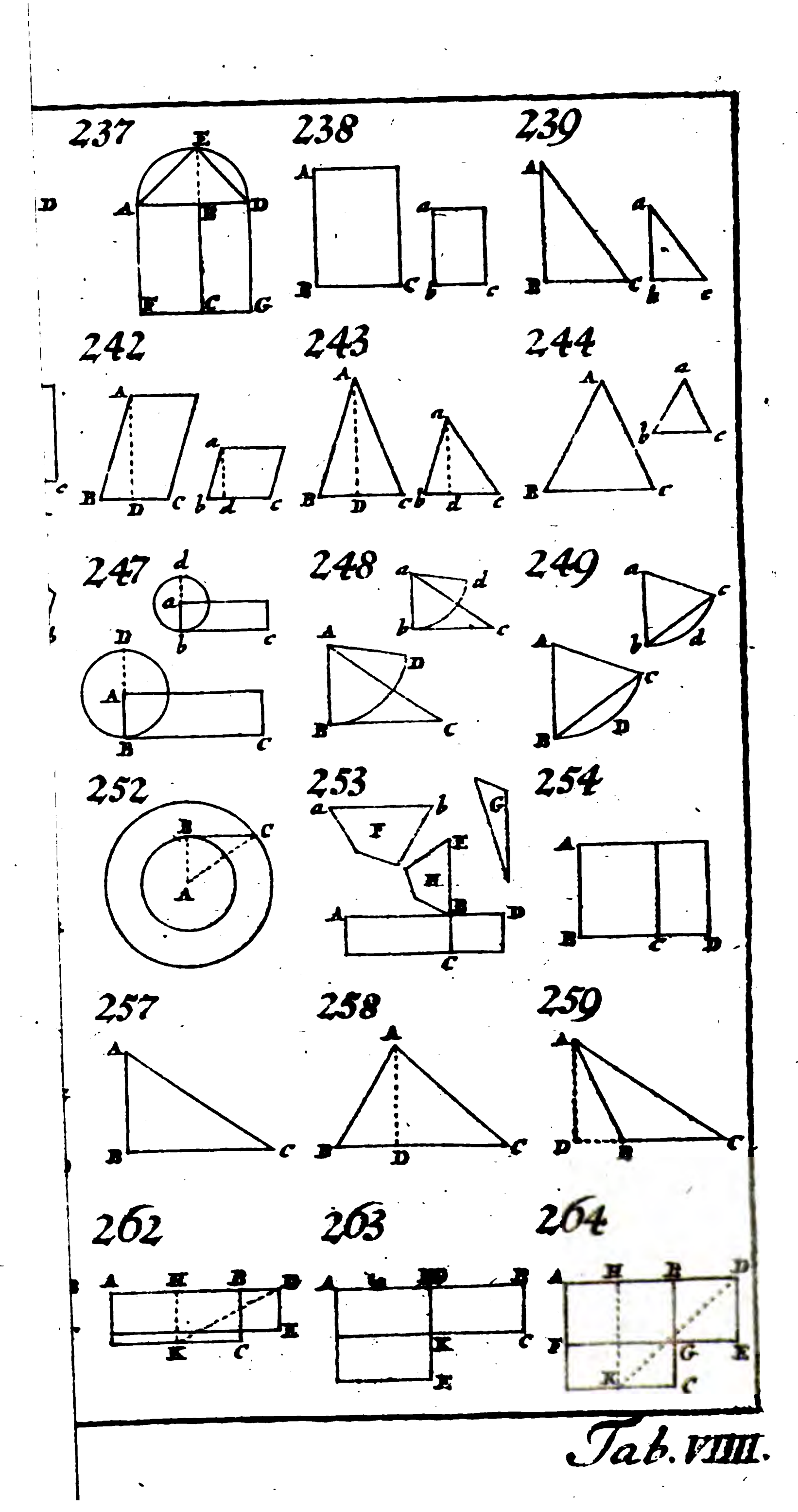



177
178
179
182
183
184
187
188
189
192
193
194
197
198
199
202
203
204
Tab. VII.

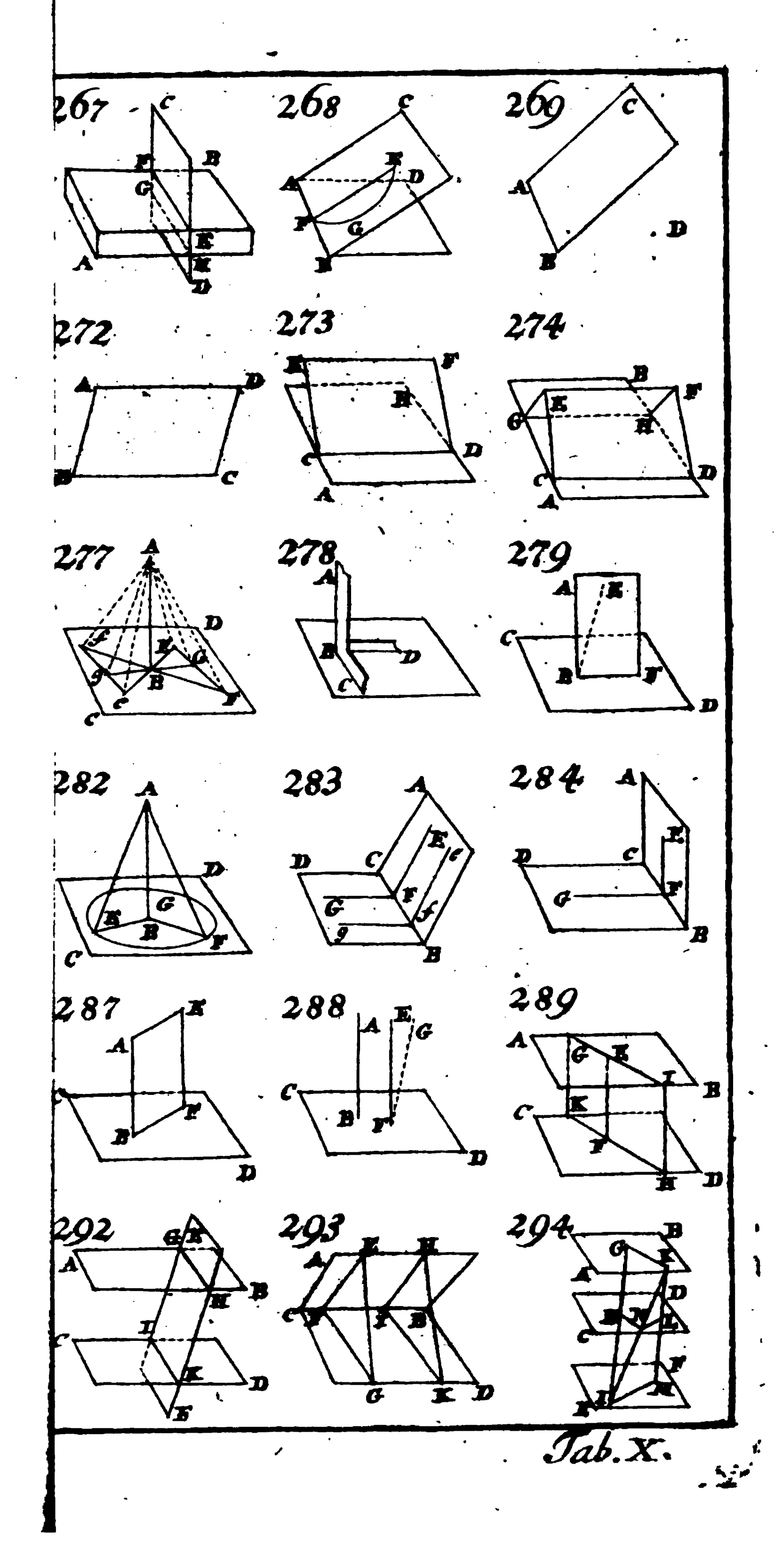



207
208
209
212
213
214
217
218
219
222
223
224
227
228
229
232
233
234
Tab. VIII.

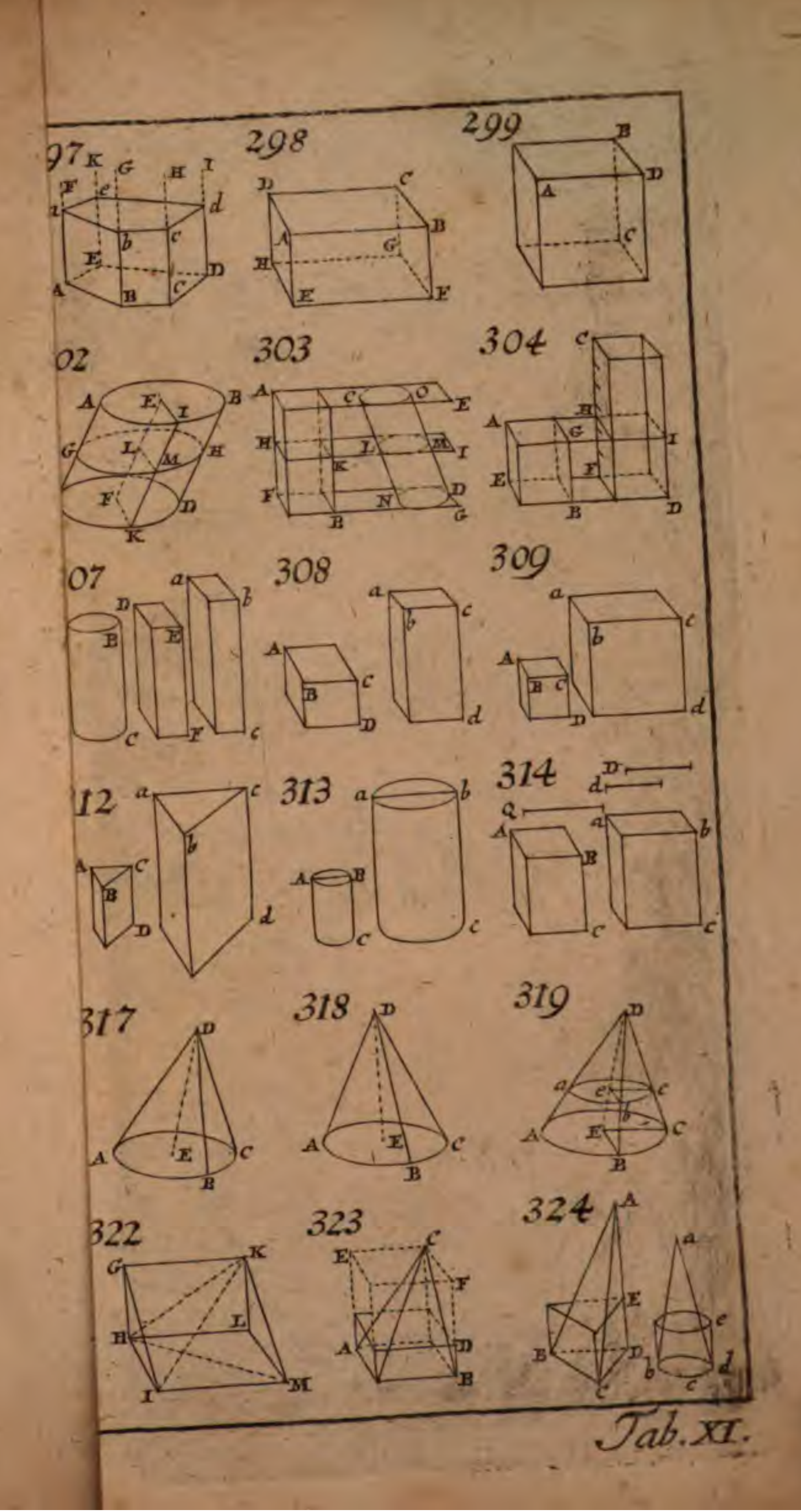



237
238
239
242
243
244
247
248
249
252
253
254
257
258
259
262
263
264
Tab. VIIII.

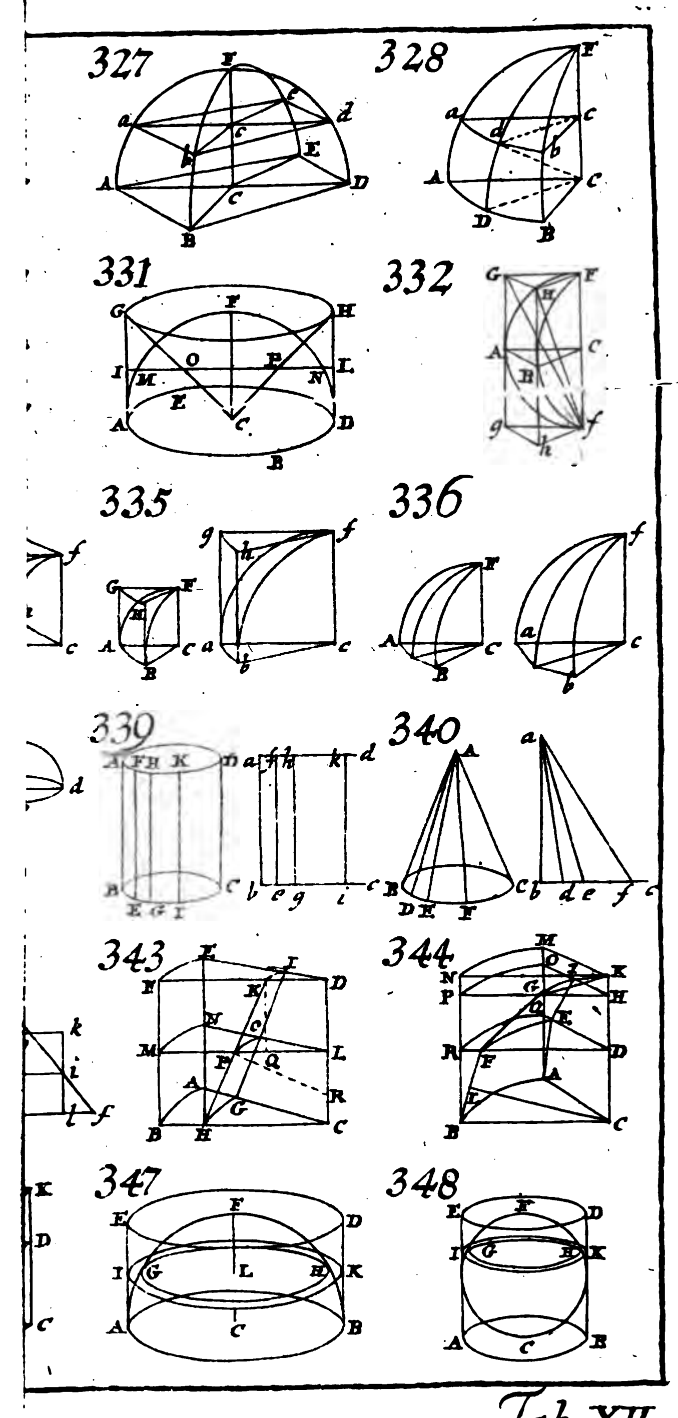



267
268
269
272
273
274
277
278
279
282
283
284
287
288
289
292
293
294

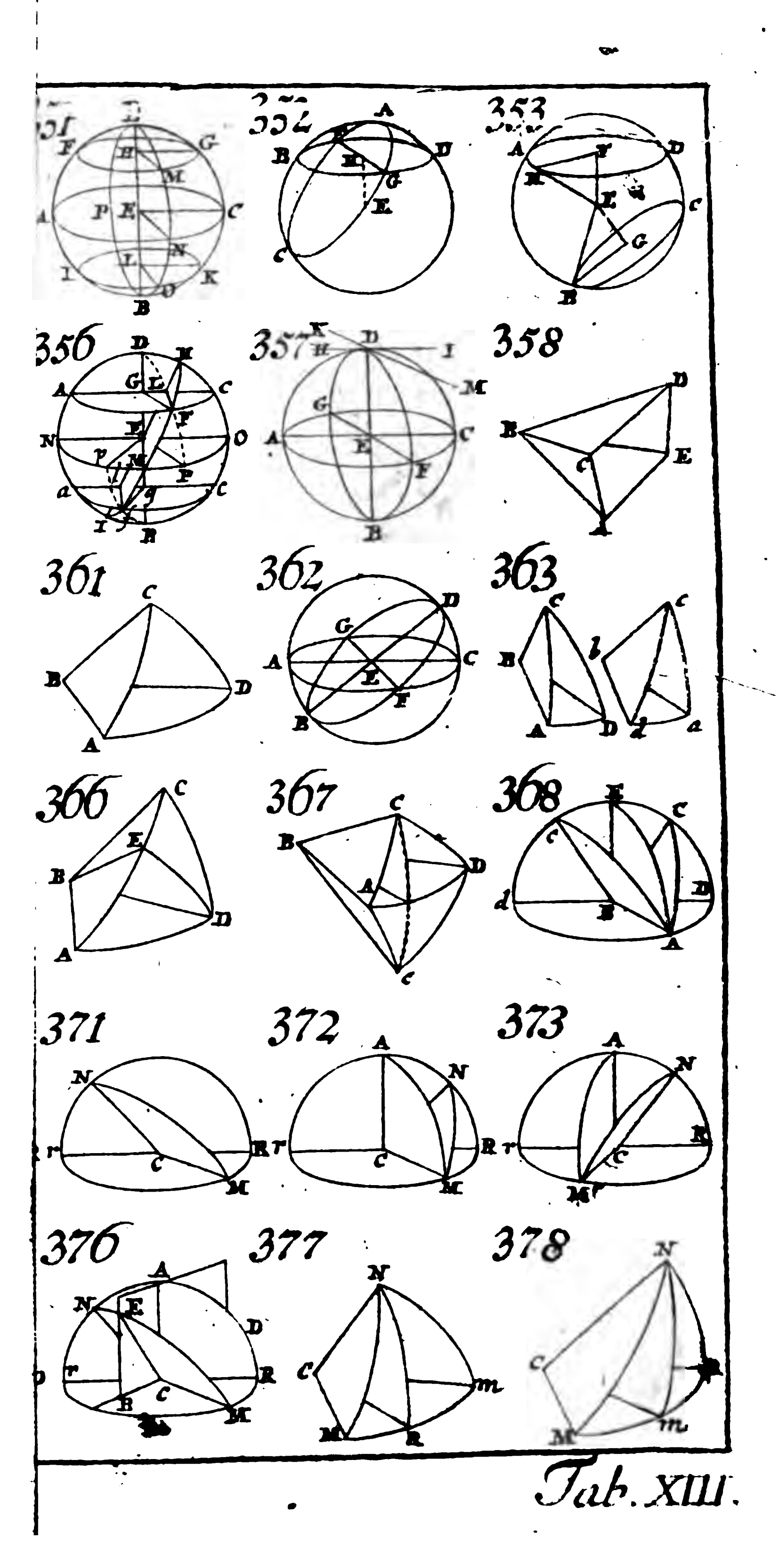
Tab. X.



97
298
299
02
303
304
07
308
309
12
313
314
317
318
319
322
323
324
Tab. XI.



Tab. XII.


351
352
353
356
357
358
361
362
363
366
367
368
371
372
373
376
377
378
Tab. XIII.

